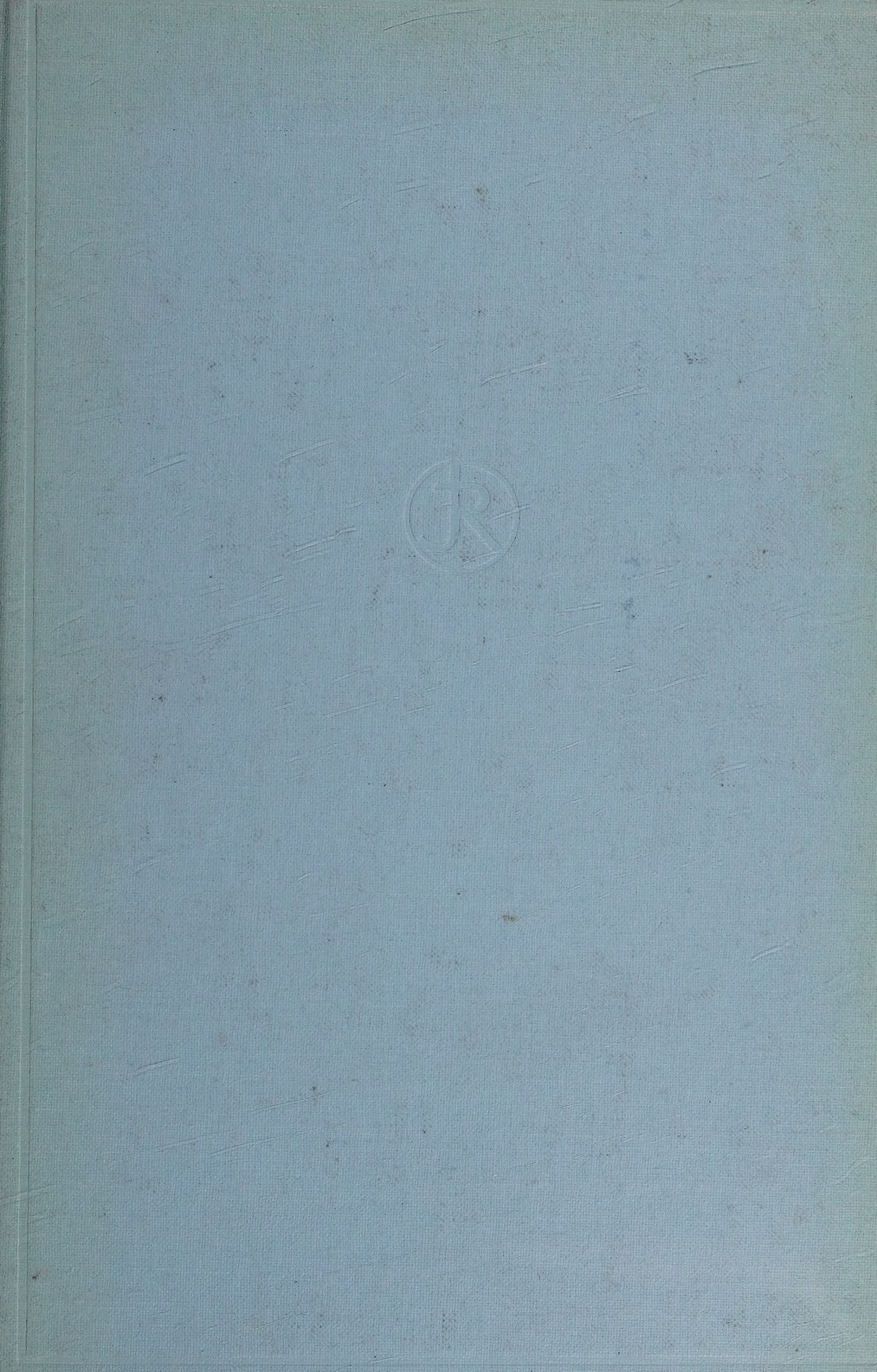




ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 17

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1953

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 3–12

И. М. ВИНОГРАДОВ

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Работа содержит элементарное доказательство равномерности распределения простых чисел по модулю q.

Обозначения. Буквою N обозначаем число с условием $N \geqslant N_0$, где N_0 — достаточно большое постоянное, превосходящее 2.

q — целое число с условием $1 < q < N$; a — взаимно простое с q.

ε — произвольно малое положительное постоянное.

θ — число с условием $-1 < \theta < 1$. $A \ll B$ равносильно $A = O(B)$.

Символ $\{z\}$ обозначает дробную часть вещественного числа z.

σ — число с условием $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$; $\psi(z)$ — периодическая функция с периодом 1, определяемая равенствами

$$\psi(z) = 1 - \sigma, \text{ если } 0 \leqslant \{z\} < \sigma,$$

$$\psi(z) = \quad -\sigma, \text{ если } \sigma \leqslant \{z\} < 1.$$

$\pi_\sigma(z)$ — число простых чисел, не превосходящих N, наименьшие неотрицательные вычеты которых по модулю q меньше σq; следовательно, $\pi_1(z)$ равно числу $\pi(N)$ всех простых чисел, не превосходящих N.

В настоящей работе дано новое полностью элементарное доказательство равномерности распределения простых чисел по модулю q, состоящей в том, что $\pi_\sigma(N)$ асимптотически (предполагается, что с возрастанием N числа q и Nq^{-1} также растут и притом не слишком медленно) равно $\sigma\pi(N)$; в прежних моих работах [см., например, (1)] эта равномерность устанавливалась путем применения метода тригонометрических сумм. Новый метод основан на элементарной лемме 4, которая выводится способом, уже применявшимся в одной из моих прежних работ (2). Эта лемма позволяет решать вопрос, оценивая сумму $\sum\limits_{p \leqslant N} \psi\left(\frac{a}{q} p\right)$ путем непосредственного применения моего метода оценки сумм с простыми числами 1937 г.

Ради краткости я ограничиваюсь выводом остаточного члена порядка

$$N^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-\delta}\right), \quad \delta = \frac{1}{6},$$

однако не очень сложное видоизменение метода позволяет заменить δ и числом 0,2. Установленная равномерность имеет место в случае, когда q и Nq^{-1} растут не медленнее, чем N^{ε_0} $(\varepsilon_0 > 2\varepsilon)$; но элементарные доказа-

тельства можно дать и в случае, когда q и Nq^{-1} растут не медленнее $(\ln N)^{12}$, а также в случае, когда рост числа q ограничен условиями

$$(\ln N)^{\varepsilon_1} \leqslant q \leqslant (\ln N)^{12}.$$

Подобным элементарным путем может быть установлена равномерность распределения по модулю q и для простых чисел, принадлежащих заданной арифметической прогрессии, для произведений заданного числа простых чисел, для чисел n с заданным значением функций $\mu(n)$, а также для многих других числовых последовательностей.

ЛЕММА 1. *Пусть* $\tau \geqslant 1$. *Тогда всякое вещественное число* α *можно представить в форме*

$$\alpha = \frac{A}{Q} + \frac{\theta}{Q\tau}, \quad (A, Q) = 1, \quad 0 < Q \leqslant \tau.$$

Доказательство. Эта лемма есть видоизменение леммы 7, гл. моей монографии (1).

ЛЕММА 2. *Пусть вещественное число* α *представлено в форме, указанной в лемме* 1, β — *вещественное*, c — *целое. Тогда имеем*

$$\left| \sum_{x=c}^{c+Q-1} \psi(\alpha x + \beta) \right| < 2.$$

Доказательство. При $Q \leqslant 2$ лемма тривиальна; поэтому предположим, что $Q > 2$. Имеем

$$\alpha x + \beta = \frac{Ax + f(x)}{Q}, \quad f(x) = \beta Q + \frac{\theta x}{\tau}.$$

Наименьшее значение $f(x)$ мы представим в форме $n + \varkappa$, где n — целое и $0 \leqslant \varkappa < 1$. Тогда

$$f(x) = n + \varkappa + \lambda(x),$$

где $0 \leqslant \lambda(x) < 1$. Находим:

$$\{\alpha x + \beta\} = \left\{ \frac{r + \varkappa + \rho(r)}{Q} \right\},$$

где r — наименьший неотрицательный вычет $Ax + n$ по модулю q и $\rho(r) = \lambda(x)$. Неравенство

$$0 \leqslant \{\alpha x + \beta\} < \sigma$$

может выполняться лишь при $r = Q - 1, 0, 1, \ldots, [\sigma Q]$, где при целом σQ последнее значение исключается; следовательно, указанное неравенство может выполняться лишь при $< \sigma Q + 2$ значениях r. Оно наверно выполняется при $r = 0, 1, \ldots, [\sigma\theta] - 2$, т. е. при $> \sigma Q - 2$ значениях r. Поэтому, представляя число выполнений в форме $\sigma Q + F$, будем иметь $|F| < 2$, причем рассматриваемая в лемме сумма равна

$$(1 - \sigma)(\sigma Q + F) - \sigma(Q - \sigma Q - F) = F.$$

ЛЕММА 3. *Пусть* h — *целое*, x *пробегает* X_0 *последовательных чисел ряда* $1, 2, \ldots, q$, *а* y *пробегает* Y_0 *различных чисел того же ряда, вза-*

имно простых с q. Тогда имеем:

$$\sum_x \sum_y \psi\left(\frac{xy+h}{q}\right) < 4q(\ln q)^2.$$

Доказательство. При $q \leqslant 70$ лемма тривиальна. Поэтому предположим, что $q > 70$. При заданном y представим $\frac{y}{q}$ в форме

$$\frac{y}{q} = \frac{A_0}{Q_0} + \frac{\theta_0}{Q_0 X_0}, \quad (A_0, Q_0) = 1, \quad 0 < Q_0 \leqslant X_0.$$

Пусть X_1 — остаток от деления X_0 на Q_0. Если $X_1 > 0$, то представим $\frac{y}{q}$ в форме

$$\frac{y}{q} = \frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta_1}{Q_1 X_1}, \quad (A_1 Q_1) = 1, \quad 0 < Q_1 \leqslant X_1,$$

и т. д., пока не придем к некоторому $X_{n+1} = 0$. Применяя лемму 2, убедимся, что часть рассматриваемой в лемме двойной суммы, отвечающая заданному y, численно будет

$$< 2\left[\frac{X_0}{Q_0}\right] + 2\left[\frac{X_1}{Q_1}\right] + \cdots + 2\left[\frac{X_n}{Q_n}\right] \leqslant \frac{2X_0}{Q_0} + \frac{2X_1}{Q_1} + \cdots + \frac{2X_n}{Q_n}.$$

А вся двойная сумма численно будет

$$< \sum_y \left(\frac{2X_0}{Q_0} + \frac{2X_1}{Q_1} + \cdots + \frac{2X_n}{Q_n}\right),$$

где числа $Q_0, X_1, Q_1, \ldots, X_n, Q_n$ (разумеется, также и число n) зависят от выбора y. Найденное выражение есть сумма слагаемых вида $\frac{2X}{Q}$, причем каждому такому слагаемому отвечает система условий:

$$\frac{y}{q} = \frac{A}{Q} + \frac{\theta}{QX}, \quad (A, Q) = 1, \quad 0 < Q \leqslant X,$$

равносильная системе условий:

$$yQ - Aq = t, \quad (A, Q) = 1, \quad 0 < Q \leqslant X, \quad |t| < \frac{q}{X}. \qquad (1)$$

Четвертое из условий (1) дает $X < \frac{q}{|t|}$; поэтому слагаемое $\frac{2X}{Q}$ может быть заменено слагаемым $\frac{2q}{Q|t|}$. Третье и четвертое из условий (1) мы заменим более грубыми условиями:

$$0 < Q \leqslant q, \quad |t| < \frac{q}{Q}.$$

При $(Q, q) = \delta$ первое из условий (1) выполняется лишь при $|t| = t_1\delta$ (t_1 — целое). В этом случае числа Q и $|t|$ определят 2δ пар значений y и A, причем сумма соответствующих слагаемых $\frac{2q}{Q|t|}$ будет

$$\leqslant 2\frac{q}{Qt_1\delta}2\delta = 4\frac{q}{Qt_1}.$$

Поэтому рассматриваемая в лемме двойная сумма численно

$$<4q \sum_{0<Q\leqslant q} \frac{1}{Q} \sum_{0<t<\frac{q}{Q}} \frac{1}{t},$$

что при $q>70$, как нетрудно убедиться, будет $<4q(\ln q)^2$.

ЛЕММА 4. *Пусть x пробегает X различных чисел ряда $1, 2, \ldots, q$, а y пробегает Y различных чисел того же ряда, взаимно простых с q. Тогда для суммы*

$$S=\sum_x \sum_y \psi\left(\frac{axy}{q}\right)$$

имеем неравенство

$$|S|<2\sqrt{XYq}\ln q.$$

Доказательство. Имеем (y_1 пробегает те же значения, что и y):

$$|S|^2 \leqslant X \sum_{\xi=1}^{q} \sum_{y} \sum_{y_1} \psi\left(\frac{a\xi y}{q}\right) \psi\left(\frac{a\xi y_1}{q}\right) = X \sum_y S_y,$$

$$S_y=\sum_{y_1} \sum_{u=0}^{q-1} \psi\left(\frac{u}{q}\right) \psi\left(\frac{u y_1 y^{-1}}{q}\right)=\sum_u \sum_v \psi\left(\frac{u}{q}\right) \psi\left(\frac{uv}{q}\right),$$

где v — наименьший неотрицательный вычет числа $y_1 y^{-1}$ по модулю q и, следовательно (когда y_1 пробегает все свои Y значений), пробегает Y различных чисел ряда $1, 2, \ldots, q$, взаимно простых с q. Разбивая сумму S_y на две суммы, в первую из которых включаем слагаемые с $u<\sigma q$, а во вторую — слагаемые с $u \geqslant \sigma q$, и применяя к каждой сумме в отдельности лемму 3, получим:

$$|S_y|<4q(\ln q)^2(1-\sigma)+4q(\ln q)^2 \sigma=4q(\ln q)^2,$$

$$|S|^2<4XYq(\ln q)^2, \quad |S|<2\sqrt{XYq}\ln q.$$

ЛЕММА 5. *Пусть x пробегает ряд различных чисел, содержащихся среди X последовательных целых чисел, а y пробегает ряд различных чисел, содержащихся среди Y последовательных целых чисел и взаимно простых с q. Тогда для суммы*

$$S=\sum_x \sum_y \psi\left(\frac{axy}{q}\right)$$

имеем оценку:

$$S \ll XYF, \quad F=\sqrt{\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{q}+\frac{q}{XY}}\ \ln q.$$

Доказательство. Подразделяя в случае $X>q$ интервал значений x на $\ll \frac{X}{q}$ интервалов, а в случае $Y>q$ интервал значений y на $\ll \frac{Y}{q}$ интервалов, придем к суммам, рассмотренным в лемме 4. Поэтому

при $X \leqslant q$, $Y \leqslant q$ получим

$$S \ll \sqrt{XYq}\ln q=XY\sqrt{\frac{q}{XY}}\ln q \ll XYF;$$

при $X \leqslant q$, $Y > q$ получим

$$S \ll \frac{Y}{q}\sqrt{Xqq}\ln q = XY\sqrt{\frac{1}{X}}\ln q \ll XYF;$$

при $X > q$, $Y \leqslant q$ получим

$$S \ll \frac{X}{q}\sqrt{qYq}\ln q = XY\sqrt{\frac{1}{Y}}\ln q \ll XYF;$$

при $X > q$, $Y > q$ получим

$$S \ll \frac{X}{q}\frac{Y}{q}\sqrt{qqq}\ln q = XY\sqrt{\frac{1}{q}}\ln q \ll XYQ.$$

ЛЕММА 6. *Пусть*

$$1 \leqslant U < N, \quad 1 \leqslant \Delta \leqslant U, \quad U + \Delta \leqslant N,$$

$$S = \sum_x \sum_y \psi\left(\frac{axy}{q}\right),$$

где x и y пробегают целые числа, принадлежащие двум возрастающим последовательностям, причем значения y взаимно просты с q и суммирование распространяется на область

$$U < x \leqslant U + \Delta, \quad \frac{N}{U+\Delta} < y \leqslant \frac{N}{x}. \qquad (2)$$

Тогда имеем

$$S \ll \frac{N\Delta^2}{U^2} F_1,$$

$$F_1 = \sqrt{\frac{1}{\Delta} + \frac{U^2}{N\Delta} + \frac{1}{q} + \frac{qU^2}{N\Delta^2}(\ln q)^2}.$$

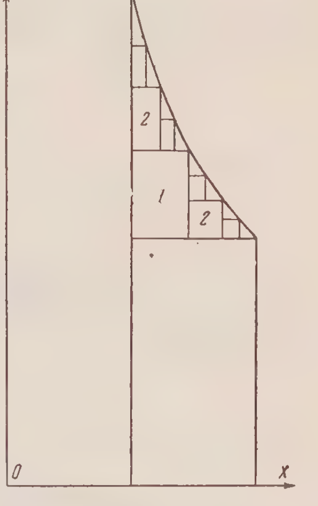


Рис. 1

Доказательство. Пусть $F_1 \leqslant F_0$, где F_0 — достаточно малое положительное постоянное < 1 (в противном случае лемма тривиальна). Пусть r_0 — наибольшее целое число с условием $2^{r_0} \leqslant F_1^{-1}$. Из области (2) выделим «первую», «вторые», «третьи», ... , «r_0-е» области, согласно схеме, указанной на чертеже. Здесь r-я область представится прямоугольником с основанием длиною

$$\frac{\Delta}{2^r}$$

и высотой длиною, имеющей точный порядок

$$\frac{N\Delta}{U^2 2^r}$$

(левая и нижняя стороны прямоугольника к области не причисляются).

Число r-х областей равно 2^{r-1}. Согласно лемме 5, часть суммы S, отвечающая одной из r-х областей, будет

$$\ll \frac{\Delta}{2^r}\frac{N\Delta}{U^r 2^r}\sqrt{\frac{2^r}{\Delta}+\frac{U^2 2^r}{N\Delta}+\frac{1}{q}+\frac{qU^2 2^{2r}}{N\Delta^2}}\ \ln q \ll \frac{N\Delta^2}{U^2 2^r}F_1(\ln q)^{-1}.$$

Часть суммы S, отвечающая невыделенным областям, будет

$$\ll \frac{N\Delta}{U^2}\frac{\Delta}{2^{r_0}} \ll \frac{N\Delta^2}{U^2}F_1.$$

Поэтому

$$S \ll \frac{N\Delta^2}{U^2}\left(\sum_{r=1}^{r_0}\frac{2^{r-1}}{2^r \ln q}+1\right)F_1 \ll \frac{N\Delta^2}{U^2}F_1.$$

Следствие. *Пусть*

$$1 \leqslant U \leqslant N, \quad 0 < \Delta \leqslant U, \quad U+\Delta \leqslant N,$$

$$S_0 = \sum_x \sum_y \psi\left(\frac{axy}{q}\right),$$

где x и y пробегают целые числа, принадлежащие двум возрастающим последовательностям, причем значения y взаимно просты с q и могут повторяться каждое не более K раз. Пусть суммирование распространяется на область

$$U < x \leqslant U+\Delta, \quad 0 < y \leqslant \frac{N}{x}.$$

Тогда имеем:

$$S \ll NKF_2, \quad F_2 = \sqrt{\frac{1}{U}+\frac{U}{N}+\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}(\ln q)^2.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно рассматривать лишь случай $K=1$ и $\Delta \geqslant 1$. Тогда часть S суммы S_0, рассмотренная в лемме 6, будет $\ll NF_2$. А оставшаяся часть суммы S_0, т. е. сумма, распространенная на область

$$U < x \leqslant U+\Delta, \quad 0 < y \leqslant \frac{N}{U+\Delta},$$

согласно лемме 5, будет

$$\ll \Delta\frac{N}{U}\sqrt{\frac{1}{\Delta}+\frac{U}{N}+\frac{1}{q}+\frac{qU}{\Delta N}}\ \ln q \ll NF_2.$$

ЛЕММА 7. *Пусть x, y, m пробегают взаимно простые с q положительные числа, принадлежащие трем возрастающим последовательностям. Пусть, далее,*

$$1 < U < N, \quad U < U' \leqslant 2U,$$

$$S = \sum_x \sum_y \sum_m \psi\left(\frac{axym}{q}\right),$$

где суммирование распространяется на область

$$U < x \leqslant U', \quad xym \leqslant N, \quad (x, y) = 1.$$

Тогда имеем:

$$S \ll N^{1+\varepsilon} F_3, \quad F_3 = \sqrt{\frac{1}{U} + \frac{U}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$

Доказательство. Пусть $F_3 \leqslant F_0$, где F_0 — достаточно малое положительное постоянное < 1 (в противном случае лемма тривиальна). Имеем

$$S = \sum_d \mu(d) S_d,$$

где d пробегает целые положительные числа, одновременно делящие числа хотя бы одной из возможных пар x, y. При этом

$$S_d = \sum_{x'} \sum_{y'} \sum_m \psi\left(\frac{ad^2 x' y' m}{q}\right),$$

где x', y' пробегают частные от деления на d чисел x и y, кратных d, причем суммирование распространяется на область

$$\frac{U}{d} < x' \leqslant \frac{U'}{d}, \quad x' y' m \leqslant \frac{N}{d^2}.$$

Но при $N_1 \leqslant N$ число пар y', m с условием $y'm = N_1$ будет $\ll N^{\varepsilon'}$. Поэтому при $d \leqslant F_3^{-1}$ будет (лемма 6, следствие)

$$S_d \ll \frac{N^{1+\varepsilon'}}{d^2} \sqrt{\frac{d}{U} + \frac{Ud^2}{dN} + \frac{1}{q} + \frac{qd^2}{N}} (\ln q)^2 \ll \frac{N^{1+\varepsilon'}}{d} F_3 (\ln q)^2.$$

При $d > F_3^{-1}$ имеем:

$$S_d < \frac{N^{1+\varepsilon'}}{d^2} \ll \frac{N^{1+\varepsilon'}}{d} F_3.$$

Отсюда уже легко убедимся в справедливости леммы 7.

ЛЕММА 8. *Пусть* ν — *произвольное постоянное с условием* $0 < \nu \leqslant 0{,}1$, P — *произведение простых чисел, не превосходящих* $N^{\frac{1}{3}}$, d *пробегает не превосходящие* N *делители числа* P,

$$D = (\ln N)^{\frac{\ln \ln N}{\ln (1+\nu)}}.$$

Тогда все значения d *могут быть распределены среди* $< D$ *классов. Часть этих классов включает только значения* d *с условием*

$$d \leqslant N^{\frac{1}{3}+\nu}.$$

Для каждого из остальных классов существуют целое положительное H *и две возрастающие последовательности* (x) *и* (y) *целых положительных чисел с условием*

$$N^{\frac{1}{3}} < x \leqslant N^{\frac{2}{3}+\nu}$$

такие, что все числа класса, взятые каждое H *раз, и только эти числа,*

получим, если из всех произведений xy выберем лишь удовлетворяющие условиям

$$xy \leqslant N, \quad (x, y) = 1.$$

Доказательство. Эта лемма есть частный случай леммы 6, гл. IX моей монографии [1].

ТЕОРЕМА. *Пусть p пробегает простые числа*

$$S = \sum_{p \leqslant N} \psi\left(\frac{ap}{q}\right).$$

Тогда имеем:

$$S \ll N^{1+\varepsilon} F_4, \quad F_4 = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + N^{-\frac{1}{6}}}.$$

Доказательство. Пусть ν — произвольно малое положительное постоянное $< 0{,}1$, P — произведение всех не делящих q простых чисел с условием $p \leqslant N^{\frac{1}{3}}$, Q — произведение всех не делящих q простых чисел с условием $N^{\frac{1}{3}} < p \leqslant N$. Находим ($p_1$ и p_2 пробегают простые числа):

$$\frac{1}{2} \sum_{p_1 \backslash Q} \sum_{\substack{p_2 \backslash Q \\ p_1 p_2 \leqslant N}} \psi\left(\frac{a p_1 p_2}{q}\right) + S + O\left(N^{\frac{2}{3}}\right) = \sum_{d \backslash P} \sum_{\substack{(m, q)=1 \\ 0 < dm \leqslant N}} \mu(d)\, \psi\left(\frac{adm}{q}\right). \qquad (3)$$

Двойная сумма, стоящая в левой части равенства (3), согласно следствию леммы 6 (все значения $x = p_1$ лежат в интервале $N^{\frac{1}{3}} < x < N^{\frac{2}{3}}$, который можно разбить на $\ll \ln N$ интервалов вида, указанного в следствии леммы 6), будет

$$\ll N^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} + \frac{N^{\frac{2}{3}}}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}} \ll N^{1+\varepsilon} F_4.$$

Все значения d, входящие в правую часть равенства (3), разобьем на классы, как указано в лемме 8. Получим $\ll N^{\varepsilon'}$ классов; для чисел одного и того же класса $\mu(d)$ сохраняет одно и то же значение.

Сначала рассмотрим класс, для которого, согласно лемме 8, можно указать целое положительное H и две возрастающие последовательности (x) и (y) целых положительных чисел с условием

$$N^{\frac{1}{3}} < x \leqslant N^{\frac{2}{3}+\nu}$$

таких, что все числа класса, взятые каждое H раз, и только эти числа, получим, если из всех произведений xy выберем лишь удовлетворяющие условиям

$$xy \leqslant N, \quad (x, y) = 1.$$

Часть суммы, стоящей в правой части равенства (3), отвечающая вы-

бранному классу, будучи умножена на одно из чисел H, $-H$, примет вид:

$$\sum_x \sum_y \sum_m \psi\left(\frac{axym}{q}\right),$$

где суммирование распространяется на область

$$N^{\frac{1}{3}} < x \leqslant N^{\frac{2}{3}+\nu}, \quad xym \leqslant N, \quad (x, y) = 1.$$

Последняя же сумма, согласно лемме 7 (интервал, в котором лежат значения x, можно разбить на $\ll \ln N$ интервалов вида, указанного в лемме 7), будет

$$\ll N^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} + \frac{N^{\frac{2}{3}+\nu}}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}} \ll N^{1+\varepsilon''} F_4.$$

Далее, рассмотрим указанные в лемме классы, содержащие только значения d с условием $d \leqslant N^{\frac{1}{3}+\nu}$. При этом ограничимся лишь классами, содержащими значения d с условием $\mu(d) = 1$ (классы, содержащие значения d с условием $\mu(d) = -1$, рассматриваются аналогично). Часть суммы, стоящей в правой части равенства (3), отвечающая всем таким классам, может быть представлена в форме:

$$S' + S'' + S''', \quad S' = \sum_{d > \frac{N}{q}} \sum_{m \leqslant \frac{N}{d}} \psi\left(\frac{adm}{q}\right),$$

$$S'' = \sum_{d \leqslant \frac{N}{q}} \sum_{m \leqslant \left[\frac{N}{dq}\right] q} \psi\left(\frac{adm}{q}\right), \qquad S''' = \sum_{d \leqslant \frac{N}{q}} \sum_{\left[\frac{N}{dq}\right] q < m \leqslant \frac{N}{d}} \psi\left(\frac{adm}{q}\right).$$

Очевидно, сумма S' может быть отличной от нуля только в случае, когда

$$\frac{N}{q} < N^{\frac{1}{3}+\nu};$$

в этом случае S', согласно следствию леммы 6 $\Big($интервал $\frac{N}{q} < d \leqslant N^{\frac{1}{3}+\nu}$, в котором лежат значения $x = d$, можно разбить на $\ll \ln N$ интервалов вида, указанного в следствии леммы 6$\Big)$, будет

$$\ll N^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{Nq^{-1}} + \frac{N^{\frac{1}{3}+\nu}}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}} \ll N^{1+\varepsilon} F_4.$$

Часть суммы S'', отвечающую заданному d, можно представить в виде произведения $\left[\frac{N}{dq}\right]$ на сумму

$$\sum_{\substack{0 \leqslant \rho < q \\ (\rho, q) = 1}} \psi\left(\frac{\rho}{q}\right) = \sum_{\delta \setminus q} \mu(\delta) \sum_{u=0}^{q\delta^{-1}-1} \psi\left(\frac{u}{q\delta^{-1}}\right),$$

которая, согласно лемме 2, будет $\ll \tau(q) \ll N^{\varepsilon'}$. Поэтому

$$S'' \ll \sum_{d<\frac{N}{q}} \frac{N^{1+\varepsilon'}}{dq} \ll \frac{N^{1+\varepsilon}}{q}.$$

Значения d, входящие в S''', распределятся среди интервалов

$$1 \leqslant d \leqslant \frac{N}{s_0 q},\ \frac{N}{s_0 q} < d \leqslant \frac{N}{(s_0-1)\,q}, \ldots, \frac{N}{2q} < d \leqslant \frac{N}{q},$$

где s_0 — наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{\frac{N}{q}}$. Часть суммы S''', отвечающая первому интервалу, очевидно, будет

$$\ll \frac{N}{s_0 q}\, q \ll N \sqrt{\frac{q}{N}}.$$

Часть $S(s)$ суммы S''', отвечающая какому-либо другому интервалу:

$$\frac{N}{sq} < d \leqslant \frac{N}{(s-1)\,q},$$

очевидно, равна

$$\sum_{\frac{N}{sq}<d\leqslant\frac{N}{(s-1)q}} \ \sum_{(s-1)q<m\leqslant\frac{N}{d}} \psi\left(\frac{adm}{q}\right)$$

и, следовательно, согласно лемме 6 $\left(\frac{N}{qs\,(s-1)}\right.$ вместо Δ и $\frac{N}{sq}$ вместо $\left.U\right)$, будет

$$\ll \frac{N}{s^2}\sqrt{\frac{qs^2}{N} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \frac{qs^2}{N}}\,(\ln q)^2 \ll \frac{N}{s}\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\ (\ln q)^2.$$

При этом

$$\sum_{s=2}^{s_0} S(s) \ll N^{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}.$$

Собирая все доказанное, мы и убеждаемся в справедливости теоремы.

Следствие. *Имеем:*

$$\pi_\sigma(N) = \sigma\pi(N) + O(N^{1+\varepsilon}F_4).$$

Доказательство. Находим (полагаем $a = 1$):

$$S = (1-\sigma)\,\pi_\sigma(N) - \sigma\left(\pi(N) - \pi_\sigma(N)\right) = \pi_\sigma(N) - \sigma\pi(N).$$

Поступило
12. XI. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. Наук СССР, т. XXIII (1947), гл. IX и XI.

[2] Виноградов И. М., Элементарное доказательство одной общей теоремы аналитической теории чисел, Изв. Акад. Наук СССР, т. 19, № 16—17 (1925), 785—796.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 13—30

А. Д. МЫШКИС

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе доказано экстремальное свойство решения первой краевой задачи теории потенциала для некоторого нового функционала — именно, «нагрузки» функции. Этот функционал тесно связан с решением так называемой видоизмененной (или «свободной») первой краевой задачи. Проводится также сравнение «нагрузки» с интегралом Дирихле.

§ 1. Введение

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве $E_n (n \geqslant 2)$ дана ограниченная область G с границей Γ. Под «поверхностью» мы будем в этой работе понимать гладкую замкнутую $(n-1)$-мерную поверхность, т. е. непрерывно дифференцируемое конечное $(n-1)$-мерное многообразие, ориентированное и целиком лежащее в $\bar{G} = G + \Gamma$; такие поверхности мы будем обозначать буквой S, иногда с индексами. Ориентация S определяет наружную и внутреннюю части $E_n - S$ по отношению к S; их мы будем обозначать соответственно через $\mathscr{E}(S)$ и $I(S)$. В том случае, когда $S \subset \Gamma$, мы будем считать S ориентированной так, что $G \subset I(S)$.

Пусть функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ задана и непрерывно дифференцируема на G и пусть дана поверхность $S \subset G$. Тогда мы будем обозначать через $\Pi(u, S)$ поток градиента u внутрь S, т. е.

$$\Pi(u, S) = \oint\limits_S \operatorname{grad}_n u \cdot dS = \oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по внутренней нормали.

Под нагрузкой функции u мы будем понимать функционал

$$H(u) = H_G(u) = \sup \sum_{i=1}^{k} |\Pi(u, S_i)| \quad (0 \leqslant H(u) \leqslant \infty), \tag{1}$$

где sup берется по произвольным конечным системам поверхностей $S_1, \ldots, S_k (\subset G)$, внутренности которых попарно не пересекаются. (Этот функционал введен в работе ([1]), стр. 133.)

Далее, введем обозначение для интеграла Дирихле:

$$D(u) = D_G(u) = \frac{1}{2} \int\limits_G \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dG \quad (0 \leqslant D(u) \leqslant \infty).$$

В случае двух аргументов функцию u можно рассматривать как описывающую форму равновесия мембраны, мало отклоненной от горизонтального положения. Тогда, как известно, первая краевая задача теории потенциала может быть истолкована как задача отыскания формы равновесия ненагруженной мембраны, натянутой на жесткий контур (не обязательно связный). При таком истолковании становится ясным минимальное свойство интеграла Дирихле для этого решения, так как интеграл Дирихле пропорционален потенциальной энергии мембраны, накопленной ею за счет отклонения от горизонтального положения; естественно, что эта энергия у натянутой мембраны минимальна, когда вся нагрузка с площади мембраны снята.

Однако нетрудно проверить, что при таком же истолковании «нагрузка» функции u пропорциональна арифметической сумме сил, приложенных к площади мембраны и к кускам ее контура для поддержания равновесия (так как поток $\Pi(u, S)$ пропорционален силе, с которой внутренняя по отношению к S часть мембраны действует на внешнюю). Это является причиной минимального по отношению к нагрузке свойства гармонической функции в сравнении со всеми другими, принимающими на Γ данные значения: нагрузка мембраны минимальна, когда силы на ее площадь не действуют. Решая первую краевую задачу теории потенциала, мы снимаем все силы, действующие на площадь мембраны; при этом нагрузка решения может остаться отличной от нуля только за счет сил, приложенных к отдельным кускам контура (если он не связный). Отметим, что когда мы снимем и эти силы, то получим решение так называемой видоизмененной (или «свободной») первой краевой задачи; этому решению будет посвящена одна из ближайших работ.

Мы проведем сравнение нагрузки функции с ее интегралом Дирихле. Интеграл Дирихле обладает, в сравнении с нагрузкой, преимуществами квадратичного функционала. Однако он легче «принудительно» обращается в бесконечность при «плохих» граничных условиях. Известно ([2]), что можно построить пример граничных условий на окружности, которым не может удовлетворять никакая гладкая функция с конечным интегралом Дирихле; в этом случае вариационный метод в обычном своем виде отказывает. Для нагрузки же такого примера не может быть, если только граница области регулярна и состоит из конечного числа компонент связности (правда, для более сложных областей это уже не так).

В § 2, 3 и 5 мы докажем несколько лемм. Некоторые из них имеют самостоятельный интерес и поэтому приведены в более сильном виде, чем это необходимо для доказательства основных теорем.

§ 2. Об обобщенном операторе Лапласа

Мы воспроизведем здесь некоторые известные свойства обобщенного оператора Лапласа (по И. И. Привалову), а также докажем нужные для дальнейшего леммы. Подробные сведения об этом операторе можно найти в книге ([3]).

Пусть в области G дана непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда значением ее обобщенного оператора Лапласа в точке $A \in G$ называется

предел

$$\Delta^* f(A) = \lim_{h\to 0}\left\{\left[\frac{1}{|Ш(A,\ h)|}\int\limits_{Ш(A,\ h)} f(M)\,dШ_M - f(A)\right] : \frac{h^2}{2(n+2)}\right\}$$

(где $Ш(A,\ h)$ — шар радиуса h с центром A, а $|Ш(A,\ h)|$ — объем этого шара), если он существует.

Если f обладает непрерывными производными второго поряда, то

$$\Delta^* f \equiv \Delta f.$$

Если в области G $\Delta^* f \equiv 0$, то функция f гармонична (в обычном смысле) Если же $\Delta^* f \geqslant 0$, то функция f субгармонична в G.

Объемный потенциал

$$v(A) = \int\limits_G \frac{\rho(B)}{|AB|^{n-2}}\,dG_B \qquad (n \geqslant 3),$$

$$v(A) = \int\limits_G \rho(A)\ln\frac{1}{|AB|}\,dG_B \quad (n = 2)$$

с непрерывной и абсолютно интегрируемой в G плотностью ρ всегда непрерывен и обладает в G обобщенным оператором Лапласа

$$\Delta^* v(A) \equiv -n(n-2)\,|Ш(A,\ 1)|\,\rho(A) \quad (n \geqslant 3),$$

$$\Delta^* v(A) \equiv -2\pi\rho(A) \quad (n = 2).$$

Отсюда сразу следует, что если функция $f(A)$ обладает в G непрерывным и абсолютно интегрируемым $\Delta^* f$, то она равна линейной комбинации потенциала с плотностью $\Delta^* f$ и гармонической функции; в частности, f имеет непрерывные первые производные в G.

ЛЕММА 1. *Пусть $u(A)$ непрерывна в G и обладает непрерывным $\Delta^* u$. Пусть, далее, $S \subset G$, $I(S) \subset G$. Тогда*

$$\Pi(u,\ S) = -\int\limits_{I(S)} \Delta^* u \cdot dG. \tag{2}$$

Доказательство. Возьмем $S_1 \subset G$ так, чтобы

$$\overline{I(S)} \subset I(S_1).$$

Тогда, в силу сказанного выше, u в $I(S_1)$ можно представить в виде суммы объемного потенциала u_1 с непрерывной в $\overline{I(S_1)}$ плотностью и гармонической функции u_2. Для u_2 обе части равенства (2) равны нулю в силу известной формулы Грина. Если теперь вычислить $\frac{\partial u_1}{\partial n}$ при помощи дифференцирования под знаком интеграла и переменить после этого порядок интегрирования в выражении для $\Pi(u_1,\ S)$ (законность обеих этих операций доказывается обычным путем), то мы докажем, что и u_1 удовлетворяет неравенству (2). Отсюда и следует лемма 1.

Следствие. Пусть u в G непрерывна и имеет непрерывный $\Delta^* u$. Тогда:

а) если $\int\limits_G |\Delta^* u|\,dG = \infty$, то $H(u) = \infty$;

б) если Г связно (или, что то же, если $E_n - G$ связно) и $\int\limits_G |\Delta^* u| dG < \infty$, то

$$H(u) = \int\limits_G |\Delta u| dG + \left| \int\limits_G \Delta u \, dG \right|;$$

в) если Г состоит из компонент связности $S_1, \ldots, S_k$, а первые производные от u равномерно непрерывны в G, то

$$H(u) = \sum_{i=1}^{k} |\Pi(u, S_i)| + \int\limits_G |\Delta^* u| dG. \tag{3}$$

Замечание 1. Аналогично легко получить, что если u гармонична в G, а $E_n - G$ состоит из конечного числа компонент связности $k_1, \ldots, k_k$, то

$$H(u) = \sum_{i=1}^{k} |\Pi(u, S_i)| < \infty,$$

где $S_i \subset G$ выбраны так, что

$$K_i \subset \mathcal{E}(S_i), \quad K_i \subset I(S_j) \quad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, k).$$

Замечание 2. Если Г связно, то по известной теореме Бохера-Кёбе [см., например, (4), стр. 317], равенство $H(u) = 0$ равносильно гармоничности u.

Замечание 3. Определение нагрузки естественно переносится на случай $n = 1$, т. е. для функции $u = u(x)$, непрерывно дифференцируемой на интервале $a < x < b$. В этом случае легко проверить, что если полное изменение $V(u')$ функции $u'(x)$ на (a, b) бесконечно, то и $H(u) = \infty$; если же $V(u') < \infty$, то

$$H(u) = V(u') + |u'(b) - u'(a)|.$$

ЛЕММА 2. *Пусть функция u в области G непрерывна, субгармонична и отрицательна. Пусть для некоторого $A \in \Gamma$ найдется открытый шар $Ш(O, |OA|) \subset G$. Тогда найдутся числа $\alpha > 0$, $\beta < 0$ такие, что на радиусе OA из $|AB| < \alpha$ $(B \in OA)$ следует:*

$$u(B) \leqslant \beta |AB|.$$

Доказательство. Пусть

$$G_1 = Ш(O, |OA|) - Ш\left(O, \frac{1}{2}|OA|\right)$$

и пусть v — гармоническая в G_1 функция, равная нулю на внешней поверхности G_1 и равная достаточно малой по абсолютной величине отрицательной константе — на внутренней. Тогда, очевидно, $\frac{\partial v}{\partial n} < 0$ в A. Но разность $u - v$ субгармонична в G_1 и все предельные ее значения на Γ_1 не положительны. Поэтому $u < v$ в G_1. Отсюда и следует справедливость леммы 2.

Замечание. Отметим, что из этой леммы, в частности, сразу следует единственность решения задачи Неймана в классе непрерывных в G функций, если множество Г гладкое и до каждой его точки можно коснуться изнутри G шаром.

ЛЕММА 3. *Пусть* Γ *состоит из компонент связности* $S_1, \ldots, S_k$, *причем вблизи любого* $A \in S_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ *одна из координат точек* S_i *представима в виде функции прочих, первые производные которой удовлетворяют условию Гёльдера. Пусть на* $\bar{G}$ *задана функция* $u(x_1, \ldots, x_n)$, *причем* $u = 0$ *на* Γ *и* u *можно распространить в* $\bar{G}$ *до функции, непрерывной в окрестности* $\bar{G}$ *и имеющей там же непрерывный* Δ^*. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| dS \leqslant \int_G |\Delta^* u| \, dG, \tag{4}$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\Delta^* u$ *в* G *не меняет знака.*

Доказательство. Пусть сначала $\Delta^* u$ на G не меняет знака, например, $\Delta^* u \geqslant 0$. Тогда u субгармонична в G и потому $u \leqslant 0$. Отсюда следует, что $\frac{\partial u}{\partial n} \leqslant 0$ на Γ и лемма 1 дает:

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| dS = -\sum_{i=1}^{k} \Pi(u, S_i) = \int_G \Delta^* u \, dG = \int_G |\Delta^* u| \, dG,$$

что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что $\Delta^* u$ в G меняет знак. Тогда построим непрерывную, ограниченную в $G_1 \supset \bar{G}$ функцию $\tilde{u}$, обладающую непрерывным $\Delta^* \tilde{u}$ и совпадающую с u на $\bar{G}$. Обозначим

$$\rho_1(A) = \max\{\Delta^* \tilde{u}(A), 0\}, \quad \rho_2(A) = -\min\{\Delta^* \tilde{u}(A), 0\} \quad (A \in G_1)$$

и построим в G_1 объемные потенциалы u_1 и u_2 с плотностями соответственно ρ_1 и ρ_2. Пусть, далее, v_1 и v_2 — гармонические в G функции, совпадающие соответственно с u_1 и u_2 на Γ. Первые производные от функций u_1 и u_2 как от объемных потенциалов, по известной теореме Дини [см. ([5]); при $n = 3$ доказательство имеется в книге Н. М. Гюнтера ([6]), стр. 82], удовлетворяют условию Гёльдера с любым показателем $\alpha < 1$. Поэтому по общей теореме Жиро [см. ([7])] первые частные производные от v_1 и v_2 будут равномерно непрерывны в G. Следовательно, применяя формулу Грина для v_j и лемму 1 для u_j, получим

$$\sum_{i=1}^{k} \Pi(u_j - v_j, S_i) = -\int_G \Delta^* u_j dG = -\int_G \rho_j dG \quad (j = 1, 2).$$

Однако, в силу единственности решения задачи Дирихле для гармонических функций, $u \equiv (u_1 - v_1) - (u_2 - v_2)$ в G. Поэтому лемма 2 и последнее равенство дадут:

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| dS =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \left| \frac{\partial (u_1 - v_1)}{\partial n} - \frac{\partial (u_2 - v_2)}{\partial n} \right| dS < \sum_{i=1}^{k} \left[\int_{S_i} \left| \frac{\partial (u_1 - v_1)}{\partial n} \right| dS + \int_{S_i} \left| \frac{\partial (u_2 - v_2)}{\partial n} \right| dS \right] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} [\Pi(u_1 - v_1, S_i) + \Pi(u_2 - v_2, S_i)] = \int_G \rho_1 dG + \int_G \rho_2 \, dG = \int_G |\Delta^* u| \, dG, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Из одной теоремы Витнея [см. ([8]), стр. 65] следует, что для продолжимости функции u, о которой говорится в лемме 3, достаточно, чтобы все S_i были дважды непрерывно дифференцируемыми многообразиями, а все вторые частные производные от u были равномерно непрерывны в G.

§ 3. О емкости и обобщенном решении

С каждой непрерывной функцией f, заданной на границе Γ области G, как известно, ассоциируется гармоническая в G функция — обобщенное решение задачи Дирихле, — достигающая заданных граничных значений во всех регулярных точках Γ. При этом множество всех нерегулярных точек Γ имеет нулевую емкость и обобщенное решение не зависит от значений f в этих точках. (Все эти понятия подробно освещены в работе М. В. Келдыша ([9]).)

Напомним для дальнейшего, что граница компактного множества F имеет ту же емкость, что и F, а также тот факт, легко доказываемый при помощи одной теоремы Василеско [см. ([9]), стр. 183], что при построении обобщенного решения граничные изолированные множества нулевой емкости являются устранимыми особенностями. Точнее говоря, пусть компактное $F \subset G$ имеет нулевую емкость и на $\Gamma + F$ задана непрерывная функция f. Тогда обобщенное решение задачи Дирихле в $G - F$ при этих краевых условиях совпадает в $G - F$ с обобщенным решением v задачи Дирихле для G, когда краевые значения на Γ задаются функцией f.

Нам понадобится теорема Келлога [см. ([10])] о том, что если в G дана аналитическая функция u и $F \subset G$ компактно, то совокупность значений u на множестве $F \cap E\{\operatorname{grad} u = 0\}$ конечна. Отсюда следует, что совокупность значений u на $E\{\operatorname{grad} u = 0\}$ не более чем счетная.

Отметим, что при $n = 2$ для гармонических функций v легко доказать более сильное утверждение: *если* $E\{\operatorname{grad} v = 0\}$ *имеет предельную точку* $A \in G$, *то* $v \equiv \text{const}$ *в* G.

Действительно, это сразу следует из возможности построения вблизи A гармонической, сопряженной к v, функции.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\Gamma = F_1 + F_2$, *где* F_1 *и* F_2 *замкнуты и не пересекаются. Пусть*

$$S \subset G, \quad F_1 \subset I(S), \quad F_2 \subset \mathscr{E}(S)$$

и на Γ *задана непрерывная функция* f, *причем* $f \geqslant 0$ *на* F_1, $f \leqslant 0$ *на* F_2, *а* v *есть обобщенное решение задачи Дирихле в* G *при таких краевых условиях. Тогда*

$$\Pi(v, S) \geqslant 0.$$

Для $\Pi(v, S) > 0$ *необходимо и достаточно, чтобы* F_1 *и* F_2 *имели положительную емкость и чтобы* $f \neq 0$ *по крайней мере в одной регулярной точке* Γ.

Доказательство. Необходимость обоих условий следует из первых двух абзацев этого параграфа. Покажем их достаточность.

Пусть оба условия выполнены и для определенности $f < 0$ хотя бы в одной регулярной точке F_2. Положим $f_1 = 0$ на F_1, $f_1 = f$ на F_2 и

пусть v_1 — обобщенное решение задачи Дирихле в G при краевых условиях f_1. Тогда

$$\Pi(v,\ S)=\Pi(v_1,\ S)+\Pi(v-v_1,\ S)$$

и поэтому, в силу равноправия F_1 и F_2, при доказательстве леммы достаточно ограничиться случаем, когда $f\equiv 0$ на F_1 и $f<0$ хотя бы в одной регулярной точке F_2. При этих предположениях не может быть $v\equiv 0$ и поэтому $v<0$ в G. Возьмем $S_1\subset G$ так, чтобы

$$S\subset I(S_1),\quad F_2\subset \mathscr{E}(S_1),$$

и ограничимся рассмотрением $I(S_1)\cap G$. Таким образом, без ограничения общности мы будем считать, что $F_2=S_1$ и $f<0$ всюду на F_2.

Аппроксимируем теперь область G последовательностью областей $G_1\subset G_2\subset\ldots$, граница каждой из которых Γ_i состоит из конечного числа гладких поверхностей и содержит F_2, т. е.

$$\Gamma_i=F_2+M_i.$$

Пусть v_i — решение задачи Дирихле в G_i при краевых условиях $v_i=0$ на M_i, $v_i=f$ на F_2. Тогда из упомянутой выше теоремы Келлога следует, что для некоторого числа $a<0$ будет

$$\max_{S_1} v<a,\quad E\{\operatorname{grad} v=0\}\cap E\{v=a\}=\Lambda,$$

$$E\{\operatorname{grad} v_i=0\}\cap E\{v_i=a\}=\Lambda\quad (i=1,2,\ldots).$$

Множества $E\{v_i=a\}$ состоят каждое из конечного числа попарно не пересекающихся аналитических поверхностей $S_i^1,\ldots,S_i^{k_i}$ (без особых элементов), которые мы ориентируем так, чтобы на них было $\frac{\partial v_i}{\partial n}>0$. Тогда легко проверить, что

$$\Pi(v_i,S)=\sum_{j=1}^{k_i}\Pi(v_i,S_i^j)\quad (i=1,2,\ldots).$$

В силу того, что емкость F_1 положительна, $\sup v=0$, и потому $E\{v=a\}$ не пусто. Это множество состоит из конечного или счетного числа $(n-1)$-мерных попарно не пересекающихся аналитических многообразий без особых элементов $T_1, T_2,\ldots$ (быть может, некоторые из них бесконечны). При этом любое компактное $F\subset G$ пересекается только с конечным числом T_i. Ориентируем все T_i так, чтобы на них было $\frac{\partial v}{\partial n}>0$.

Пусть $C\subset E\{v=a\}$ компактно. Так как $\operatorname{grad} v\neq 0$ на $E(v=a\}$ и в силу равномерной сходимости $v_1, v_2,\ldots$ к v в некоторой окрестности C, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $i_0=i_0(C,\varepsilon)$, что при $i>i_0$ будет

$$\Pi(v_i,S)=\sum_{j=1}^{k_i}\Pi(v_i,S_i^j)>\int_C\frac{\partial v}{\partial n}\,dS-\varepsilon. \tag{6}$$

Однако

$$\Pi(v_i,S)\xrightarrow[i\to\infty]{}\Pi(v,S).$$

Отсюда и из (6) сразу следует, что

$$\Pi(v, S) \geqslant \sum_i \int_{T_i} \frac{\partial v}{\partial n} dS;$$

но подинтегральная функция в правой части этого неравенства всюду положительна. Стало быть, лемма 4 доказана.

§ 4. Экстремальное свойство нагрузки

ТЕОРЕМА 1. *Пусть на $\overline{G}$ дана непрерывная функция u, имеющая в G непрерывный $\Delta^* u$. Пусть v — обобщенное решение задачи Дирихле в G при краевых значениях u. Тогда*

$$H(v) \leqslant H(u). \tag{7}$$

Если $v \not\equiv u$ и Γ состоит из конечного числа компонент связности, то

$$H(v) < H(u). \tag{8}$$

Доказательство. Аппроксимируем G последовательностью областей

$$G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G_2 \subset \overline{G}_2 \subset \ldots$$

с достаточно гладкими границами

$$\Gamma_i = \sum_{l=1}^{l_i} S_i^l.$$

Пусть v_i гармонична в G_i, причем $v_i = u$ на Γ_i. Построим последовательность достаточно гладких в G_{i+1} функций $u_i^1, u_i^2, \ldots$ таких, что равномерно в $\overline{G}_i$ при $j \to \infty$

$$u_i^j \rightrightarrows u, \quad \frac{\partial u_i^j}{\partial x_k} \to \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (k = 1, \ldots, n), \quad \Delta u_i^j \to \Delta^* u; \tag{9}$$

это можно сделать, например, разлагая u на гармоническую функцию и потенциал в G_{i+1} и строя потенциалы с гладкими плотностями, равномерно аппроксимирующими $\Delta^* u$.

Пусть v_i^j гармонична в G, причем $v_i^j = u_i^j$ на Γ_i. Тогда по теореме Жиро [см.[11]], функция v_i^j дважды равномерно непрерывно дифференцируема в G_i. Учитывая лемму 3, замечание к ней и формулу (3), получим

$$H_{G_i}(v_i^j) = \sum_l |\Pi(v_i^j, S_i^l)| + \int_{G_i} |\Delta v_i^j| \, dG \leqslant \sum_l |\Pi(u_j^i, S_i^l)| + \sum_l |\Pi(v_i^j - u_i^j, S_i^l)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_l |\Pi(u_i^j, S_i^l)| + \int_{G_i} |\Delta(v_i^j - u_i^j)| \, dG =$$
$$= \sum_l |\Pi(u_i^j, S_i^l)| + \int_{G_i} |\Delta u_i^j| \, dG = H_{G_i}(u_i^j). \tag{10}$$

Но, в силу (3) и (9),

$$H_{G_i}(u_i^j) \xrightarrow[j \to \infty]{} H_{G_i}(u).$$

Поэтому, переходя в неравенстве (10) к пределу при $j \to \infty$, находим:

$$H_{G_i}(v_i) \leqslant H_{G_i}(u).$$

Переходя теперь к пределу при $i \to \infty$, получим неравенство (7).

Для доказательства неравенства (8), достаточно убедиться в существовании такого числа $a > 0$, при котором для каждого достаточно большого i найдется такое $j_0 = j_0(i)$, что при $j > j_0$ будем иметь:

$$H_{G_i}(v_i^j) \leqslant H_{G_i}(u_i^j) - a \tag{11}$$

(напомним, что, в силу замечания 1 к лемме 1, $H_G(v) < \infty$).

Мы рассмотрим два случая.

А. $\Delta^* u$ в G меняет знак. Выберем сферы C_1 и C_2 такие, что

$$\overline{\mathscr{E}(C_1)} \subset G, \quad \overline{\mathscr{E}(C_2)} \subset G, \quad \sup_{\mathscr{E}(C_1)} \Delta^* u < -b < 0, \quad \inf_{\mathscr{E}(C_2)} \Delta^* u > b.$$

Пусть C_m' — сфера, концентрическая с C_m, причем

$$\overline{\mathscr{E}(C_m')} \subset \mathscr{E}(C_m) \quad (m = 1, 2),$$

а $S \subset G$ таково, что

$$C_1 + C_2 \subset I(S) \subset G.$$

Мы будем считать i настолько большим, что $I(S) \subset G_i$, а при фиксированном i считать j настолько большим, что

$$\sup_{\mathscr{E}(C_1)} \Delta u_i^j < -\frac{b}{2}, \quad \inf_{\mathscr{E}(C_2)} \Delta u_i^j > \frac{b}{2}.$$

Обратимся к доказательству леммы 3 и положим в нем G и u равными нашим G_i и $v_i^j - u_i^j$. Тогда функция

$$w_m = u_m - v_m \quad (m = 1, 2)$$

субгармонична в G_i и равна 0 на Γ_i. Далее, всюду в $\overline{\mathscr{E}(C_m)}$

$$\Delta w_m (= \rho_m) = (-1)^{m-1} \Delta (v_i^j - u_i^j) = (-1)^m \Delta u_i^j > \frac{b}{2} \quad (m = 1, 2).$$

Поэтому всюду в $\mathscr{E}(C_m)$

$$w_m(P) \leqslant -\frac{b}{4n}(R_m^2 - |O_m P|^2),$$

где O_m и R_m — центр и радиус сферы C_m. Отсюда следует, что в $\mathscr{E}(C_m')$

$$w_m \leqslant -\frac{b}{4n}(R_m^2 - R_m'^2) < -C < 0 \quad (m = 1, 2),$$

где R_m' — радиус сферы C_m'.

Функция w_2, как субгармоническая и равная 0 на Γ_i, меньше гармонической в $I(S) \cap I(C_2')$ функции $\tilde{v}$, равной 0 на S и $-C$ на C_2'. Отсюда

$$\sup_{\mathscr{E}(C_1')} w_2 < \sup_{\mathscr{E}(C_1')} \tilde{v} = -d < 0.$$

Обратимся к неравенству (5) и заметим, что при $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$

$$|a - b| = |a| + |b| - 2\min\{|a|, |b|\}.$$

Следовательно, в нашем случае при выводе неравенства (5) можно написать:

$$\sum_{l=1}^{l_i} \int_{S_i^l} \left| \frac{\partial w_1}{\partial n} - \frac{\partial w_2}{\partial n} \right| dS =$$

$$= \sum_{l=1}^{l_i} \left[\int_{S_i^l} \left| \frac{\partial w_1}{\partial n} \right| dS + \int_{S_i^l} \left| \frac{\partial w_2}{\partial n} \right| dS - 2 \int_{S_i^l} \min \left\{ \left| \frac{\partial w_1}{\partial n} \right|, \left| \frac{\partial w_2}{\partial n} \right| \right\} dS \right],$$

т. е. неравенство (4) можно уточнить. Это дает, взамен (10):

$$H_{G_i}(v_i^j) \leqslant H_{G_i}(u_i^j) - 2 \sum_l \left[\int_{S_i^l} \min \left\{ \left| \frac{\partial w_1}{\partial n} \right|, \left| \frac{\partial w_2}{\partial n} \right| \right\} dS \right]. \qquad (12)$$

Пусть функция v_0 гармонична в $G_i \cap I(C_1')$, равна 0 на Γ_i и $-d\ (> -C)$ на C_1'. Тогда, в силу субгармоничности w_1 и w_2, в $G_i \cap I(C_1')$ будет

$$w_1 < v_0, \quad w_2 < v_0,$$

откуда следует, что на всех $S_i^l\ (l = 1, \ldots, l_i)$

$$\left| \frac{\partial w_1}{\partial n} \right| \geqslant \left| \frac{\partial v_0}{\partial n} \right|, \quad \left| \frac{\partial w_2}{\partial n} \right| \geqslant \left| \frac{\partial v_0}{\partial n} \right|.$$

Таким образом, неравенство (12) дает:

$$H_{G_i}(v_i^j) \leqslant H_{G_i}(u_i^j) - 2 \sum_l \int_{S_i^l} \left| \frac{\partial v_0}{\partial n} \right| dS = H_{G_i}(u_i^j) - 2 \int_{C_1'} \frac{\partial v_0}{\partial n} dS. \qquad (13)$$

Пусть, далее, сфера C концентрична с C_1' и такова, что $G \subset I(C)$, а функция $\overline{v}_0$ гармонична в $I(C) \cap I(C_1')$ и равна 0 на C и $-d$ на C_1'. Тогда $\overline{v}_0 < v_0$ всюду в $G_i \cap I(C_1')$, откуда следует, что на C_1' будет

$$\frac{\partial \overline{v}_0}{\partial n} \leqslant \frac{\partial v_0}{\partial n}.$$

Таким образом, из (12) получаем:

$$H_{G_i}(v_i^j) \leqslant H_{G_i}(u_i^j) - 2\Pi(\overline{v}_0, C_1').$$

Отсюда и вытекает неравенство (11), так как $\overline{v}_0$ и C_1' не зависят от i и j.

Б. $\Delta^* u$ в G не меняет знака, например, $\Delta^* u \geqslant 0$. Мы докажем, что при старых значениях a, i, j [ср. (11)] будет

$$\sum_{l=1}^{l_i} |\Pi(v_i^j, S_i^l)| \leqslant \sum_l |\Pi(u_j^i, S_i^l)| + \sum_l |\Pi(v_i^j - u_i^j, S_i^l)| - a, \qquad (14)$$

откуда при помощи (10) получится (11).

Пусть $K^1, \ldots, K^p$ — компоненты связности Γ. Выберем $S^l \subset G$ $(l = 1, \ldots, p)$ так, чтобы

$$K^l \subset \mathscr{E}(S^l), \quad K^l \subset I(S^j) \quad (l \neq j;\ l, j = 1, \ldots, p).$$

Тогда

$$\sum_{l=1}^{p} \Pi(v, S^l) = 0.$$

Отсюда следует, что среди K^l можно найти компоненту, имеющую положительную емкость, для которой $\Pi(v, S^l) \leqslant 0$. Обозначим ее через K^1. Будем считать, что при каждом i число S_i^l равно p, и покажем, что

$$\Pi(v_i^j - u_i^j, S_i^1) \geqslant a \tag{15}$$

(a, i и j имеют прежний смысл; S_i^1 — та из S_i^l, для которой $K^1 \subset \mathscr{E}(S_i^l)$). Приняв это, положим i настолько большим, что

$$S^1 \subset G_i \text{ и } \Pi(v_i, S^1) \leqslant \frac{a}{4}.$$

Тогда найдется $j_0(i)$ такое, что при $j > j_0$

$$\Pi(v_i^j, S_i^1) = \Pi(v_i^j, S^1) \leqslant \frac{a}{2}.$$

Это соотношение и неравенство (15) показывают, что

$$\Pi(u_i^j, S_i^1) \leqslant -\frac{a}{2}.$$

Отсюда

$$|\Pi(v_i^j, S_i^1)| \leqslant |\Pi(u_i^j, S_i^1)| + |\Pi(v_i^j - u_i^j, S_i^1)| - a,$$

откуда вытекает неравенство (14).

Нам осталось доказать неравенство (15). Так как $v \not\equiv u$, то $\Delta^* u \not\equiv 0$, и, значит, найдутся концентрические сферы C и C' такие, что

$$\overline{\mathscr{E}(C')} \subset \mathscr{E}(C), \quad \overline{\mathscr{E}(C)} \subset G, \quad \inf_{\mathscr{E}(C)} \Delta^* u = b > 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\Delta(v_i^j - u_i^j) < 0$ всюду в G (этого можно добиться добавлением к u_i^j функции $c\sum_{s=1}^{n} x_s^2$, где $c > 0$ достаточно мало). Мы будем считать i настолько большим, что

$$C + S^1 \subset G_i,$$

а при фиксированном i будем считать j настолько большим, что

$$\Delta(v_i^j - u_i^j) < -\frac{b}{2}$$

на $\mathscr{E}(C)$. Тогда аналогично п. А получим, что супергармоническая функция $v_i^j - u_i^j$ на $\mathscr{E}(C')$ превосходит некоторую постоянную $d > 0$, не зависящую от i и j.

Пусть теперь $\overline{v}_i^j$ гармонична в $G_i \cap I(C')$, причем

$$\overline{v}_i^j = v_i^j - u_i^j$$

на $\Gamma_j + C'$. Тогда всюду в $G_i \cap I(C')$ будет

$$\overline{v}_i^j < v_i^j - u_i^j,$$

откуда

$$\Pi(v_i^j - u_i^j, S_i^1) \geqslant \Pi(\bar{v}_i^j, S_i^1). \tag{16}$$

Пусть, далее, $\bar{v}_i$ гармонична в $G_i \cap I(C')$, причем $\bar{v}_i = 0$ на Γ_i и $\bar{v}_i = d$ на C'. Тогда $\bar{v}_i^j \geqslant \bar{v}_i$ всюду в $G_i \cap I(C')$. Отсюда

$$\Pi(\bar{v}_i^j, S_i^1) \geqslant \Pi(\bar{v}_i, S_i^1) = \Pi(\bar{v}_i, S^1), \tag{17}$$

Пусть, наконец, $\bar{v}$ — обобщенное решение задачи Дирихле при краевых условиях $\bar{v} = 0$ на Γ, $v = d$ на C'. Тогда

$$\lim_{i \to \infty} \Pi(\bar{v}_i, S^1) = \Pi(\bar{v}, S^1). \tag{18}$$

Однако из леммы 4 следует, что $\Pi(\bar{v}, S^1) > 0$. Отсюда и из неравенств (16)—(18) следует (15). Теорема 1 доказана.

Замечание. Естественно ожидать, что утверждение теоремы останется справедливым и при менее ограничительных предположениях относительно u и G. Именно, от u надо потребовать только непрерывную дифференцируемость, от области G — только ограниченность (а для неравенства (8) условие $H(v) < \infty$). Приведенное доказательство показывает, во всяком случае, что ограничения, наложенные на область, несущественны, если Δu в G меняет знак.

§ 5. Дальнейшие леммы

ЛЕММА 5. *Пусть на $\bar{G}$ дана непрерывная функция u, непрерывно дифференцируемая в G. Пусть v — обобщенное решение задачи Дирихле G при краевом условии $v = u$ на Γ. Тогда*

$$D(v) + D(u - v) \leqslant D(u). \tag{19}$$

Доказательство. Аналогично § 4 построим последовательности областей G_i и функций v_i, u_i^j и v_i^j, но вместо условия (9) будем требовать лишь, чтобы

$$u_i^j \to u, \quad \frac{\partial u_i^j}{\partial x_k} \to \frac{\partial u}{\partial x_k} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

(функции u_i^j можно построить хотя бы при помощи осреднения u). Тогда по теореме Жиро, цитированной в § 2, функции v_i^j равномерно непрерывно дифференцируемы в G_i. Отсюда, по формуле Грина, получим:

$$D_{G_i}(u_i^j) = D(v_i^j + (u_i^j - v_i^j)) = D(v_i^j) + D(u_i^j - v_i^j) +$$
$$+ 2 \int\limits_{G_i} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_i^j}{\partial x_k} \frac{\partial (u_i^j - v_i^j)}{\partial x_k} dG = D_{G_i}(v_i^j) + D_{G_i}(u_i^j - v_i^j).$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$, получим, что

$$D_{G_i}(u) \geqslant D_{G_i}(v_i) + D_{G_i}(u - v_i).$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, получим (19).

Следствие. Пусть на Γ задана непрерывно дифференцируемая функция f (т. е. на Γ существуют n непрерывных функций $f_1, \ldots, f_n$ таких,

что при $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$ будет

$$f(B) = f(A) + \sum_{k=1}^{n} f_k(A)(x_{kB} - x_{kA}) + \varepsilon(A, B)|AB|,$$

где $\varepsilon(A, B) \to 0$ равномерно вместе с $|AB|$). Пусть v — обобщенное решение задачи Дирихле в G при таком краевом условии. Тогда $D(v) < \infty$.

Действительно, согласно цитированной в § 2 теореме Витнея, в E_n существует непрерывно дифференцируемая функция u, совпадающая с f на Γ. Но тогда $D_G(u) < \infty$, и лемма 5 дает требуемое.

ЛЕММА 6. *Пусть v гармонична в G, $\Gamma = E_1 + E_2$ и в каждой точке E_1 существует $\lim v = 0$. Тогда при $d(E_2) < d(G)$ и $P \in G$*

$$|v(P)| \leqslant \sup_G |v| \left(\frac{d(E_2)}{r(P, E_2)}\right)^{n-2} \quad (n \geqslant 3);$$
$$|v(P)| \leqslant \sup_G |v| \frac{\ln d(G) - \ln r(P, E_2)}{\ln d(G) - \ln d(E_2)} \quad (n = 2), \qquad (20)$$

где d — диаметр, а r — расстояние от точки до множества.

Доказательство. Выберем $Q \in \overline{E}_2$ так, чтобы $PQ = r(P, E_2)$, и образуем гармоническую функцию

$$\overline{v}(M) = \sup_G |v| \left(\frac{d(E_2)}{|QM|}\right)^{n-2} \quad (n \geqslant 3),$$

$$\overline{v}(M) = \sup_G |v| \frac{\ln d(G) - \ln |QM|}{\ln d(G) - \ln d(E_2)} \quad (n = 2).$$

Тогда в каждой точке Γ будет $\overline{\lim} |v| \leqslant \overline{v}$. В силу принципа максимума отсюда следует, что всюду в G $|v| \leqslant \overline{v}$, откуда и вытекает (20).

§ 6. Сравнение нагрузки функции с интегралом Дирихле

ТЕОРЕМА 2. *Пусть на G задана непрерывно дифференцируемая функция u. Обозначим $E_c(u) = E\{u = c\} \cap E\{\operatorname{grad} u \neq 0\}$. Тогда*

$$D_G(u) = \frac{1}{2} \int_{\inf u}^{\sup u} dc \int_{E_c(u)} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| dS, \qquad (21)$$

где n означает нормаль к $E_c(u)$. При этом внутренний интеграл в правой части является измеримой функцией c (более точно, не выше третьего класса по Бэру).

Доказательство. Пусть множество $G - E\{\operatorname{grad} u = 0\}$ распадается на компоненты связности $G_1, G_2, \ldots$. Тогда, очевидно,

$$D_G(u) = \sum_i D_{G_i}(u), \qquad \int_{E_c(u)} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| dS = \sum_i \int_{E_c(u) \cap G_i} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| dS.$$

Отсюда следует, что при доказательстве (21) без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{grad} u \neq 0$ всюду в G. Таким образом,

$$E_c(u) = E\{u = c\}.$$

Аналогично, аппроксимируя G областями изнутри, мы получим, что без ограничения общности можно считать G обладающей достаточно гладкой границей, а u — непрерывно дифференцируемой в окрестности $\overline{G}$. Приняв все это, рассмотрим разбиение G на элементы объема, каждый из которых ограничен сверху и снизу кусками непрерывно дифференцируемых поверхностей $u = c$ и $u = c + dc$ площади dS, а с боков—цилиндрической поверхностью высоты dh, нормальной к $E\{u = c\}$. Тогда при равномерном уменьшении dc и всех размеров dS получим, с точностью до бесконечно малых равномерно высшего порядка в сравнении с dG, что

$$dD_G(u) = \frac{1}{2} |\operatorname{grad} u|^2 \cdot dG = \frac{1}{2} |\operatorname{grad} u| \, dh \cdot |\operatorname{grad} u| \, dS = \frac{1}{2} dc \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| dS.$$

Суммирование обеих частей этого равенства по всем элементам объема и дает (21) (нетрудно проверить, что часть суммы, распространенная по тем из элементарных объемов, которые пересекаются с Г, стремится к 0 при равномерном уменьшении dc и всех размеров dS). Из приведенного рассуждения легко следует также утверждение теоремы о классе подинтегральной функции.

Замечание. Каждая из компонент связности $(E_c(u))_i$ множества $E_c(u)$ является $(n-1)$-мерным непрерывно дифференцируемым ориентируемым многообразием (быть может, бесконечным). После произвольной ориентации $(E_c(u))_i$ на нем $\frac{\partial u}{\partial n}$ сохраняет знак. Таким образом,

$$\int\limits_{E_c(u)} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| dS = \sum_i \left| \int\limits_{(E_c(u))_i} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \right|.$$

Следствие 1. Пусть функция u непрерывна в $\overline{G}$ и непрерывно дифференцируема в G, причем множество

$$T = u(\Gamma) + u(E\{\operatorname{grad} u = 0\})$$

имеет меру 0. Тогда

$$D_G(u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\inf u}^{\sup u} \sum_i |\Pi(u, S_i(c))| \, dc, \tag{22}$$

где $\sum_i |\Pi(u, S_i(c))|$ означает (конечную) сумму, взятую по всем компонентам связности $S_i(c)$ множества $E\{u = c\}$. При этом подинтегральная функция определена всюду, кроме замкнутого множества T. На каждом ограниченном смежном интервале к T эта функция непрерывна.

В частности, эти утверждения справедливы для функций u, непрерывных на $\overline{G}$ и аналитических в G, если $u(\Gamma)$ имеет меру 0. Наконец, если u, кроме того, гармонична в G, то нетрудно проверить, что подинтегральная функция в (22) постоянна на каждом ограниченном смежном интервале к T.

Следствие 2. В условиях предыдущего следствия

$$D_G(u) \leqslant H_G(u) \operatorname*{Кол}_G u;$$

в частности, из $H_G(u) < \infty$ следует, что $D_G(u) < \infty$.

Действительно, легко видеть, что подинтегральная функция в (22) при $c \in T$ ограничена сверху числом $H_G(u)$.

Однако в условиях следствия 1 возможно, что

$$D_G(v) < \infty = H_G(u).$$

Это мы покажем, построив пример области G и непрерывной на $\overline{G}$ функции v, гармонической в G, для которой множество $v(\Gamma)$ счетно, а

$$D_G(v) < \infty = H_G(v).$$

Пример. Будем считать, что $n = 2$, и отправляться от последовательности соприкасающихся колец G_i $(i = 1, 2, \ldots)$ (см. рис. 1) с центрами A_i, наружными радиусами i^{-2} и внутренними $i^{-2}e^{-\sqrt{i}}$ (при $n > 2$ в качестве G_i надо брать полые шары с радиусом внутренней сферы $(i^{2n-4} + \sqrt{i})^{-\frac{1}{n-2}}$; в остальном конструкция не отличается от случая $n = 2$). Пусть v_i — гармоническая функция в G_i, равная 0 на внешней и $\sqrt{i^{-1}}$ на внутренней окружностях. Тогда, очевидно,

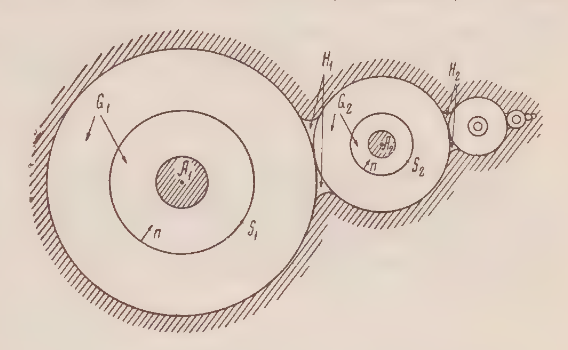


Рис. 1

$$v_i(P) = -i^{-1}\ln(i^2|PA_i|) \quad (P \in G_i), \quad \Pi(v_i, S_i) = 2\pi i^{-1}, \quad D_{G_i}(v_i) = \pi i^{-\frac{3}{2}}$$
$$(i = 1, 2, \ldots).$$

Превратим открытое множество $\sum_{i=1}^{\infty} G_i$ в область G, проделав гладкие отверстия H_i. Пусть v гармонична в G, причем $v = 0$ на внешнем контуре G и $v = \sqrt{i^{-1}}$ на внутреннем контуре G_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$D(v) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} D_{G_i}(v_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi i^{-\frac{3}{2}} < \infty. \tag{23}$$

Действительно, пусть функция u^* определена по закону: $u^* = v_i$ на G_i, $u^* = 0$ на H_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$D(u^*) = \sum_i D_{G_i}(v).$$

Изменив u^*, мы можем построить функцию u, совпадающую с u^* на Γ и непрерывно дифференцируемую в G, так, чтобы $D(u)$ отличалось от

$D(u^*)$ произвольно мало. Но по лемме 5, $D(v) \leqslant D(u)$. Отсюда и следует (23).

Докажем, что если H_i достаточно малы, то

$$\Pi(v, S_i) \geqslant \frac{1}{2}\Pi(v_i, S_i) \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{24}$$

откуда

$$H(v) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \Pi(v, S_i) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \Pi(v_i, S_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\pi}{i} = \infty.$$

Для доказательства (24) заметим, что на каждом $\Gamma_i (= \overline{G}_i - G_i)$

$$v - v_i = 0$$

всюду, кроме частей границ H_{i-1} и H_i, где, во всяком случае,

$$0 < v - v_i < 1.$$

Функцию $v - v_i$ можно представить в виде суммы гармонических в G_i функций $\overline{v}_i$ и $\widetilde{v}_i$, первая из которых равна нулю всюду на Γ_i, кроме части границы H_{i-1}, а вторая — всюду, кроме части границы H_i, причем в G_i

$$0 < \overline{v}_i < 1, \quad 0 < \widetilde{v} < 1.$$

Применяя к функциям $\overline{v}_i$ и $\widetilde{v}_i$ лемму 6, мы видим, что при достаточно малых H_{i-1} и H_i, вне зависимости от размеров прочих H, обе эти функции, а потому и их первые частные производные, будут произвольно малы вблизи S. Поэтому

$$|\Pi(v - v_i, S_i)| \leqslant \frac{1}{2}\Pi(v_i, S).$$

Отсюда получаем (24). Пример построен.

Приводимая ниже теорема 3 дает класс гармонических функций, имеющих заведомо конечную нагрузку и конечный интеграл Дирихле (последнее вытекает из следствия к лемме 5).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\Gamma = F_1 + F_2$, *где* F_1 *и* F_2 *замкнуты и не пересекаются. Пусть* $S \subset G$ *таково, что* $F_1 \subset I(S)$, $F_2 \subset \mathscr{E}(S)$. *Пусть* v — *обобщенное решение задачи Дирихле в* G *при краевом условии* $v = C_1$ *на* F_1, $v = C_2 \leqslant C_1$ *на* F_2. *Тогда*

$$H(v) = 2\Pi(v, S) < \infty. \tag{25}$$

Доказательство. Аппроксимируем G последовательностью областей

$$G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G_2 \subset \overline{G}_2 \subset \ldots$$

с достаточно гладкими границами, причем граница Γ_i области G_i состоит из частей Γ'_i и Γ''_i, расположенных соответственно вблизи F_1 и F_2:

$$\Gamma'_i = \sum_{l=1}^{p_i} S_i^l, \quad \Gamma''_i = \sum_{l=1}^{q_i} \widetilde{S}_i^l, \quad F_1 \subset \sum_{l=1}^{p_i} \mathscr{E}(S_i^l), \quad F_2 \subset \sum_{l=1}^{q_i} \mathscr{E}(\widetilde{S}_i^l) \quad (i=1, 2, \ldots).$$

Пусть v_i гармонична в G_i и $v_i = C_1$ на всех $\widetilde{S}_i^l$, $v_i = C_2$ на всех $\widetilde{S}_i^l$.

Тогда по формуле Грина

$$\sum_{l=1}^{p_i} \Pi(v_i, S_i^l) + \sum_{l=1}^{q_i} \Pi(v_i, \tilde{S}_i^l) = 0.$$

Отсюда, в силу следствия в) из леммы 1 и очевидных неравенств (ср. лемму 4),

$$\Pi(v_i, S_i^l) \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, p_i), \quad \Pi(v_i, \tilde{S}_i^l) \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, q_i),$$

получаем, что при достаточно больших i

$$H_{G_i}(v_i) = 2\sum_{l=1}^{q_i} \Pi\left(v_i, \tilde{S}_i^l\right) = 2\Pi(v_i, S).$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, получим:

$$H_G(v) \leqslant 2\Pi(v, S). \tag{26}$$

Возьмем в определении нагрузки (1) в качестве S_i одно и то же S, ориентированное двумя возможными способами. Тогда сразу получим

$$H_G(v) \geqslant 2\Pi(v, S).$$

Это неравенство вместе с (26) дает (25). Теорема 3 доказана.

Замечание. Можно отказаться от требования постоянства краевого условия $v = f$ на F_j $(j = 1, 2)$, требуя только его непрерывность, но дополнительно предполагая связность F_j и выполнение неравенства

$$\max_{F_2} f < \min_{F_1} f.$$

Тогда соотношение (25) остается справедливым; доказательство почти не меняется.

Приводимая ниже теорема 4 дает класс гармонических функций, имеющих заведомо конечную нагрузку, но интеграл Дирихле которых может быть бесконечным, что показывает известный пример Адамара (²).

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\Gamma = \sum_{j=1}^{k} F_j$, *где все* F_j *замкнуты и попарно не пересекаются, а все* $F_1, \ldots, F_{k-1}$ *связны. Пусть* v — *обобщенное решение задачи Дирихле в* G *при краевом условии* $v = f$ *на* Γ, *где* f — *непрерывная функция, принимающая на* F_k *конечное число значений. Тогда* $H(v) < \infty$.

Доказательство. Граничные условия можно представить в виде суммы таких, которые удовлетворяют условиям теоремы 3 или замечания к ней. Поэтому теорема 4 следует из теоремы 3, замечания к ней и неравенства

$$H\left(\sum_{i=1}^{i_0} u_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} H(u_i).$$

В заключение выражаю благодарность О. А. Олейник за ценные замечания, использованные мною при написании настоящей статьи.

Поступило
25. IX. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мышкис А., «Свободная» задача Дирихле (тезисы), Вестник Моск. университета, 3—4 (1946), 131—136.

[2] Hadamard J., Sur le principe de Dirichlet, Bull. Soc. math. Fr., 34 (1906), 135—138.

[3] Привалов И. И., Субгармонические функции, Москва, ГТТИ, 1937.

[4] Мышкис А. Д., Об одном признаке субгармоничности, Мат. сб., 25 (67) : 2 (1949), 315—320.

[5] Dini U., Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deusième ordre, Acta Mathem., 25 : 1—2 (1901), 185—230.

[6] Gunther N. M., La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique, Paris, 1934.

[7] Giraud G., Sur les équations non linéaires du type elliptique, théorème général et application, C. R. Paris, 195 : 26 (1932), 1361—1363.

[8] Whitney H., Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Amer. Math. Soc., 36 (1934), 63—89.

[9] Келдыш М. В., О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Успехи мат. наук, VIII (1940), 171—231.

[10] Kellog O. D., Singular manifolds among those of an analytic family, Bull. Amer. Math. Soc., XXXV (1929), 711—716.

[11] Giraud G., Sur certains problèmes aux limites, concernant les équations du type elliptique, C. R. Paris, 190 (1930), 613—614.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 31—50

А. И. ЛАПИН

ТЕОРИЯ СИМВОЛА ШАФАРЕВИЧА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Работа содержит полную теорию введенного в ([3]) символа (λ, μ). В первой части ее доказывается инвариантность этого символа, которая затем, во второй части, используется для построения локальной теории полей классов.

Настоящая работа посвящена исследованию символа (λ, μ), введенного в работе ([3]). Этот символ определен для любых отличных от 0 чисел λ и μ дискретно нормированного поля k характеристики 0, содержащего корень степени p^n из 1, с полем классов вычетов характеристики p. Значение этого символа есть p^n-примарное число, определенное с точностью до множителя, являющегося p^n-й степенью; в случае же, когда поле классов вычетов конечно, можно считать, что значение символа (λ, μ) есть корень p^n-й степени из единицы.

Для любых двух чисел λ и μ значение символа (λ, μ) совпадает со значением символа норменного вычета $\left(\frac{\lambda, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$, но определяется символ (λ, μ), в отличие от символа норменного вычета, явно по числам λ и μ, а именно, его конструкция является аналогом конструкции вычета абелева дифференциала теории алгебраических функций. В работе ([3]), в которой был определен символ (λ, μ), были доказаны некоторые его свойства, а также показано его применение к нахождению явной формы общего закона взаимности.

Как и в случае вычета абелева дифференциала, наиболее тонким локальным свойством символа (λ, μ) является независимость его от выбора простого числа π поля k, входящего в определение символа (λ, μ). Это свойство инвариантности доказано в работе ([3]) только для случая, когда $n = 1$, т. е. когда значения символа (λ, μ) являются корнями простой степени из единицы. Целью настоящей работы является доказательство инвариантности символа (λ, μ) в общем случае. Это доказательство проводится совершенно элементарно, без использования теории полей классов или свойств символа норменного вычета, что, в свою очередь, дает возможность вывести теорию полей классов из свойств символа (λ, μ). В настоящей работе таким путем выводится локальная теория полей классов в предположении, что основное поле содержит корень степени p^n из единицы, где p^n — показатель групп Галуа рассматриваемых расширений.

Всюду в настоящей работе мы предполагаем, что $p \neq 2$, так как для $p=2$ определение символа (λ, μ) несколько отличается от определения его при $p>2$.

Когда настоящая работа была уже сдана в печать, появились работы (1) и (2), посвященные тому же вопросу. В частности, в работе (2) содержится доказательство инвариантности символа (λ, μ). Однако методы работы (2) и настоящей работы не имеют ничего общего. В то время как в работе (2) используются свойства символа норменного вычета, наше доказательство не опирается ни в какой своей части на теорию полей классов, что дает возможность получить новый вывод этой теории на основе свойств символа (λ, μ).

Во всем дальнейшем мы будем предполагать знакомство читателя с работой (3) и пользоваться обозначениями и определениями этой работы. Заметим, наконец, что поле классов вычетов поля k мы будем считать конечным, как это имеет место в теории алгебраических чисел.

§ 1. Инвариантность символа (λ, μ)

1. Инвариантность и норменное свойство. Будем сокращенно писать

$$\lambda = N_{\mu}^{(n)} \Lambda,$$

если

$$\lambda = N_{K/k} \Lambda,$$

где $\Lambda \in K$ и $K = k\left(\sqrt[p^n]{\mu}\right)$. Символ (λ, μ), определенный при помощи простого числа π, будем обозначать через $(\lambda, \mu)_\pi$. Мы будем говорить, что символ $(\lambda, \mu)_\pi$ обладает норменным свойством, если $(\lambda, \mu)_\pi = 1$ тогда и только тогда, когда $\lambda = N_{\mu}^{(n)} \Lambda$.

ТЕОРЕМА 1. *Выполнение норменного свойства для символа* $(\lambda, \mu)_\pi$ *при любом* π *эквивалентно инвариантности символа* (λ, μ).

Для доказательства понадобится несколько простых лемм.

ЛЕММА 1. *Для заданных* π *и* α *существует такое простое число* τ, *что* $(\tau, \alpha)_\pi = 1$.

Доказательство. Пусть

$$\delta_\pi \alpha \approx E(\alpha_0).$$

Дословно повторяя рассуждения, содержащиеся в доказательстве невырожденности символа (λ, μ) в работе (3) на стр. 129, найдем такую единицу ε, что

$$(\varepsilon, \alpha)_\pi \approx E(-\alpha_0).$$

Число $\tau = \pi\varepsilon$ и будет искомым числом.

ЛЕММА 2. *Если существует такое* Λ, *что* $\lambda = N_{\mu}^{(n)} \Lambda$, *то существует такое* M, *что* $\mu = N_{\lambda}^{(n)} M$.

Доказательство. Так как одновременно

$$\lambda = N_{\mu}^{(n)} \Lambda \quad \text{и} \quad \mu = N_{\mu}^{(n)} \left(-\sqrt[p^n]{\mu}\right),$$

то

$$\lambda\mu = N_\mu^{(n)}\left(-\Lambda \sqrt[p^n]{\mu}\right).$$

Из леммы Шеваллей [см. (5), стр. 449] и из равенства

$$\lambda\mu = N_{\lambda\mu}^{(n)}\left(-\sqrt[p^n]{\lambda\mu}\right)$$

следует, что существует такое A, для которого

$$\lambda\mu = N_\lambda^{(n)} A.$$

Но тогда искомым числом M будет число $-\sqrt[p^n]{\lambda}\,A$.

ЛЕММА 3. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *абелева группа, а* $\varphi(x, y)$ *и* $\psi(x, y)$ — *две билинейные функции на* $\mathfrak{A}$ *со значениями в группе вычетов* $(\mathrm{mod}\, p^n)$. *Если* $\varphi(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\psi(x, y) = 0$, *то существует такое* $a \not\equiv 0\,(p)$, *что*

$$\varphi(x, y) = a\psi(x, y)$$

при всех x и y.

Доказательство. Для линейных функций аналогичное утверждение очевидно. Действительно, если $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ — две линейные функции, обращающиеся в 0 на одной и той же подгруппе $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ — циклическая группа. Пусть $x_0 + \mathfrak{B}$ — ее образующий. Если

$$\chi_1(x_0) = a\chi_2(x_0),$$

то

$$\chi_1(x) = a\chi_2(x)$$

для любого x.

Фиксируя в $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ сначала x, а потом y, мы получим линейные функции. Применяя предшествующее соображение, мы видим, что должны существовать две такие функции $f(y)$ и $g(x)$, что

$$\varphi(x, y) = f(y)\,\psi(x, y) = g(x)\,\psi(x, y). \tag{A}$$

Мы можем предполагать, что не для всех x и y

$$\psi(x, y) \equiv o\,(p).$$

В этом случае можно для любых $y_1 \neq 0$ и $y_2 \neq 0$ найти такое x_1, что

$$\psi(y_1, x_1) \not\equiv o\,(p), \quad \psi(y_2, x_1) \not\equiv o\,(p).$$

Подставляя y_1, y_2 и x_1 в (A), видим, что

$$f(y_1) = f(y_2) = g(x_1),$$

а следовательно, $f(y)$ есть постоянная.

Доказательство теоремы 1. [Пусть доказано норменное свойство для $(\lambda, \mu)_\pi$ при любом π. $(\lambda, \mu)_\pi = 1$ тогда и только тогда, когда $(\lambda, \mu)_\tau = 1$. Действительно, и то и другое имеет место, в силу норменного свойства, тогда и только тогда, когда $\lambda = N_\mu^{(n)}\Lambda$ при некотором Λ. Согласно лемме 3, существует такое a, не зависящее от λ и μ, что

$$(\lambda, \mu)_\pi = (\lambda, \mu)_\tau^a.$$

Беря за λ любое простое число, а за μ — примарное $E(\alpha)$, получим, что

для любого α из поля инерции

$$E(a\alpha) \approx E(\alpha),$$

откуда следует, что $a \equiv 1 \ (p^n)$, т. е. инвариантность доказана.

Пусть доказана инвариантность символа (λ, μ). Для случая, когда μ есть простое число, норменное свойство доказано в работе (3) на стр. 127. Если μ — не простое число, то пусть сначала $w(\mu) \not\equiv o(p)$. Тогда μ можно возвести в такую степень a, что μ^a будет p^n-й степенью отличаться от простого числа. Так как

$$\text{из } (\lambda, \mu) = 1 \quad \text{следует } (\lambda, \mu^k) = 1$$

$$\text{и из } \lambda = N_{\mu}^{(n)} \Lambda \quad \text{следует } \lambda = N_{\mu^a}^{(n)} \Lambda,$$

то и в этом случае норменное свойство доказано.

Пусть, наконец,

$$w(\mu) \equiv o(p).$$

Подберем, согласно лемме 1, такое простое число τ, чтобы имело место равенство:

$$(\lambda, \tau) = 1, \quad \text{т. е. } \lambda = N_{\tau}^{(n)} \Lambda.$$

Тогда из $(\lambda, \mu) = 1$ следует $(\lambda, \tau\mu) = 1$ и наоборот, а из существования такого Λ_1, для которого $\lambda = N_{\tau\mu}^{(n)} \Lambda_1$, следует существование (согласно лемме Шеваллей) такого Λ_2, для которого $\lambda = N_{\mu}^{(n)} \Lambda_2$, и наоборот. Ввиду того что $w(\tau\mu) \not\equiv o(p)$ для $\tau\mu$, эквивалентность обоих условий установлена, а ввиду сказанного, она установлена и для μ. Теорема доказана.

Заметим, что доказательство теоремы сохраняет свою силу, если рассматривать не все числа λ, а только некоторую подгруппу их.

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем пользоваться индукцией по n и поэтому предполагать все доказываемые свойства верными для меньших значений n.

Все символы: $\delta_\pi \mathfrak{s}$, (λ, μ) и т. д., вычисленные для заданного n, мы будем обозначать через $\delta_\pi^{(n)} \mathfrak{s}$, $(\lambda, \mu)^{(n)}$ и т. д.

2. Частный случай формулы сдвига.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\mu \in k$, *а* $\pi_1 = \sqrt[p]{\pi}$, *то*

$$\delta_\pi^{(n)} \mu = \delta_{\pi_1}^{(n)} \mu,$$

причем второй символ берется в поле $k(\sqrt[p]{\pi})$.

Предварительно докажем следующую лемму:

ЛЕММА 4. *Если* $(i, p) = 1$ *и* $i > p^k e$, *то*

$$\delta_\pi^{(n)} (E(\alpha, \pi^i)^{p^{-k}}) \approx 1,$$

причем p^{-k}*-я степень подразумевается в смысле того из ее значений, которое* $\equiv 1 \ (\pi^{e+1})$.

Доказательство. Если $k \geqslant n$, то

$$E(\alpha, \pi^i) \equiv 1 \ (\pi^{p^k e+1}), \quad E(\alpha, \pi^i)^{p^{-k}} \equiv 1 \ (\pi^{(p^k - k)\overline{e+1}}).$$

Ввиду того что $p \neq 2$, имеем:

$$p^k > 2k + 1,$$

т. е.

$$E\left(\alpha, \pi^{i}\right)^{p-k} \equiv \left(\pi^{ne+e_1+1}\right)$$

и, следовательно, является p^n-й степенью.

Пусть $k < n$. Ввиду леммы на стр. 127 работы (3), нам достаточно доказать, что $E(\alpha, \pi^i)^{p-k}$ есть норма некоторого числа из поля $k\left(\sqrt[p^n]{\pi}\right)$. Очевидно, что

$$E(\alpha, \pi^i) = N_{\pi}^{(n)} E\left(\alpha^{P^{-n}}, \pi_n^i\right).$$

Докажем, что существуют такие числа A и $\mathscr{E}$ и примарное число ω, что

$$E\left(\alpha^{P-n}, \pi_n^i\right) = A^{1-\sigma}\mathscr{E}^{p^k}\omega, \tag{1}$$

причем

$$N_{\pi}^{(n)} A = \beta^{p^k}, \quad N_{\pi}^{(n)}\mathscr{E} \equiv 1\left(\pi^{e+1}\right).$$

Для этого, применяя те же рассуждения, что и в доказательстве цитированной леммы работы (3), покажем, что

$$E\left(\alpha^{P^{-n}}, \pi_n^i\right) = A_1^{1-\sigma}\mathscr{E}_1^p\omega_1,$$

причем

$$A_1 = \prod_{(s,\,p)=1} (1-\lambda_s\pi^s), \quad s > p^k e - pe_1 \geqslant ke + e_1 \text{ и } \mathscr{E}_1 \equiv 1\left(\pi_n^x\right),$$

где $x > i - p^n e$, если $i > p^{n+1}e_1$ и $x > \frac{i}{p}$ — в противном случае. В обоих случаях:

$$\mathscr{E}_1 \equiv 1\left(\pi_n^{i_1}\right),$$

где

$$i_1 > p^{k-1}e$$

и

$$N_{\pi}^{(n)} A_1 \equiv 1\left(\pi^{ke+e_1+1}\right),$$

т. е.

$$N_{\pi}^{(n)} A_1 = \beta_1^{p^k}.$$

Применяя эти же рассуждения к $\mathscr{E}_1$ и повторяя это k раз, получим формулу (1), причем $\mathscr{E} \equiv 1\left(\pi_n^{e+1}\right)$.

Докажем, что

$$N_{\pi}^{(n)}\mathscr{E} \equiv 1\left(\pi^{e+1}\right).$$

Пусть

$$\mathscr{E} = \prod_t \left(1-\lambda_t\pi_n^t\right),$$

где $t > e$. Если $(t, p) = 1$, то

$$N_{\pi}^{(n)}\left(1-\lambda_t\pi_n^t\right) = 1-\lambda_t^{P^n}\pi^t \equiv 1\left(\pi^{e+1}\right).$$

Если же $t = p^r s$, то

$$N_{\pi}^{(n)}\left(1-\lambda_t\,\pi_n^t\right) = N_{\pi}^{(n-r)}\left(1-\lambda\pi_{n-r}^s\right)^{p^r}.$$

Применяя формулы (12_1), (12_2) и (12_3) работы ([3]), получим, что и в этом случае

$$N_{\pi}^{(n)}\left(1-\lambda_t\pi^t\right)\equiv 1\left(\pi^{e+1}\right).$$

Докажем, что в формуле (1) $\omega=\omega_0^{p^k}$. Для этого достаточно показать, что $\delta_{\pi_n}^{(k)}\omega\approx 1$. Очевидно, что

$$\delta_{\pi_n}^{(k)}\omega=\delta_{\pi_n}^{(k)}A^{\sigma-1}=\left(\pi_n,\ A^{\sigma-1}\right)_{\pi_n}^{(k)},$$

ввиду того что

$$\delta_{\pi_n}^{(n)}E\left(\alpha^{P^n},\ \pi_n^i\right)\approx 1.$$

Так как $k<n$, то мы можем предполагать верной формулу сдвига (см. теорему 4) и инвариантность. Ввиду этого имеем:

$$\left(\pi_n,\ A^{\sigma-1}\right)^{(k)}=\left(\pi_n^{1-\sigma},\ A\right)^{(k)}=(\zeta,\ A)^{(k)}=\left(\zeta,\ N_{\pi}^{(n)}A\right)^{(k)}\approx 1,$$

так как

$$N_{\pi}^{(n)}A=\beta^{p^k}.$$

Возьмем норму от обеих частей формулы (1):

$$E\left(\alpha,\ \pi^i\right)=(N\mathscr{E})^{p^k}\omega_0^{p^{n+k}},$$

т. е.

$$E\left(\alpha,\ \pi^i\right)^{p-k}=\zeta^a N_{\pi}^{(n)}\left(\mathscr{E}\omega_0\right). \tag{2}$$

Остается доказать, что $\zeta^a=1$. Заметим для этого, что левая часть равенства (2) и коэффициент при ζ^a справа $\equiv 1\left(\pi^{e+1}\right)$, т. е.

$$\zeta^a\equiv 1\left(\pi^{e+1}\right),$$

что возможно только при $\zeta^a=1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Будем считать, что $\mu\equiv 1\,(\pi^i)$ и для $\mu\equiv 1\,(\pi^{i+1})$ теорема доказана. Разлагая μ в каноническое произведение, мы видим, что достаточно доказать, что

$$\delta_{\pi_1}^{(n)}E\left(\alpha,\pi^i\right)\approx 1,$$

$$E\left(\alpha,\pi^i\right)=E\left(\alpha,\pi_1^{pi}\right)=E\left(p\alpha^{P^{-1}},\pi_1^i\right)\exp\left(-p\alpha^{P^{-1}}\pi_1^i\right).$$

Если

$$-p\alpha^{P^{-1}}\pi_1^i=\sum\lambda_k\pi^k,$$

то

$$-p\alpha^{P^{-1}}\pi_1^i=\sum\lambda_k\pi_1^{pk+i}=\sum\sigma_t\pi_1^t,$$

причем

$$(t,p)=1,\quad t>pe.$$

Докажем, что при этих условиях

$$\delta_{\pi_1}^{(n)}\exp\left(\sigma_t\pi_1^t\right)\approx 1.$$

Действительно,

$$\exp(\sigma_t\pi_1^t) = E(\sigma_t, \pi_1^t)\exp\Big(-\sum_{r=1}^{\infty} p^{-r}\sigma_t^{P^r}\pi_1^{p^r t}\Big) = E(\sigma_t, \pi_1^t)\, E(-\sigma_t^P, \pi^t)^{p^{-1}},$$

причем

$$E(-\sigma_t^P, \pi^t)^{\frac{1}{p}} \equiv 1\ (\pi^{(p-1)e+i});$$

так как $(p-1)e+i > i$, то мы можем применить формулу сдвига. Мы получим, на основании леммы 4,

$$\delta_{\pi_1}^{(n)}\exp(\sigma_t\pi_1^t) \approx \delta_{\pi_1}^{(n)} E(-\sigma_t^P, \pi^t)^{\frac{1}{p}} \approx \delta_{\pi}^{(n)} E(-\delta_t^P, \pi^t)^{\frac{1}{p}} \approx 1.$$

Теорема доказана.

Следствие. Имеет место формула

$$\delta_\pi^{(n)}\mu = \delta_{\pi_m}^{(n)}\mu,$$

если $m \leqslant n$, $\pi_m = \sqrt[p^m]{\pi}$ и правая часть берется в поле $k(\sqrt[p^m]{\pi})$.

Заметим еще, что нами заодно доказана формула:

$$\delta_{\pi_m}^{(n)}\exp\alpha\pi_m^i \approx 1, \quad (i, p) = 1, \quad i > p^m e.$$

3. Символ (λ, μ) для $\mu \equiv 1\ (\pi^{e+1})$.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $\mu \equiv 1\ (\pi^{e+1})$ *и* $\mu = \exp x$, *а* $\lambda = \pi^a E(\alpha_0)\Pi E(\alpha_i, \pi^i)$, *то*

$$(\lambda, \mu)_\pi^{(n)} \approx \delta_\pi^{(n)}\exp\Big(ax + x\sum_{m=0}^{\infty} i\alpha_i^{P^m}\pi^{p^m i}\Big). \quad (3)$$

Обе части формулы (3) зависят мультипликативным образом от λ. Так как для $\lambda = \pi$ и для $\lambda = E(\alpha_0)$ эта формула очевидна, то нам достаточно доказать ее для

$$\lambda = E(\alpha, \pi^i), \quad (i, p) = 1, \quad 0 < i < pe_1.$$

Для этого мы рассмотрим два случая:

A. $\mu = E(p^k\beta, \pi^j), \quad 0 < j < pe_1$

и

B. $\mu = E(\gamma)$.

Случай A. Здесь $x = p^k L(\beta, \pi^j)$. Нам надо доказать формулу:

$$\big(E(\alpha, \pi^i), E(p^k\beta, \pi^j)\big)_\pi^{(n)} = \delta_\pi^{(n)}\exp\Big(p^k L(\beta, \pi^j)\sum_{m=0}^{\infty} i\alpha^{P^m}\pi^{p^m i}\Big),$$

причем

$$E(p^k\beta_j, \pi^i) \equiv 1\ (\pi^{e+1}),$$

так как $j > \frac{e}{p^k}$.

Легко проверить равенство:

$$p^k L(\beta, \pi^j)\sum_{m=0}^{\infty} i\alpha^{P^m}\pi^{p^m i} = p^k\sum_{m=0}^{\infty} L(i\alpha^{P^m}\beta, \pi^{p^m i+j}) + p^k\sum_{r=1}^{\infty} p^{-r} L(i\alpha\beta^{P^r}, \pi^{i+p^r j}).$$

При $m=0$

$$\delta_\pi^{(n)} \exp p^k L(i\alpha\beta, \pi^{i+j}) = \delta_\pi^{(n)} E(ip^k\alpha\beta, \pi^{i+j}) = \left(E(\alpha, \pi^i), E(p^k\beta, \pi^j)\right)_\pi^{(n)}.$$

При $m>0$

$$\delta_\pi^{(n)} \exp p^k L(i\alpha^{p^m}\beta, \pi^{p^m i+j}) = \delta_\pi^{(n)} E(ip^k\alpha^{p^m}\beta, \pi^{p^m i+j}) \approx 1,$$

на основании леммы на стр. 127 работы ([3]) и ввиду того что

$$(i, p) = (p^m i + j, p) = 1,$$

откуда следует:

$$E(ip^k\alpha^{p^m}\beta, \pi^{p^m i+j}) = N_\pi^{(n)} E(ip^k\alpha^{p^{m-n}}\beta^{p^{-n}}, \pi_n^{p^m i+j}).$$

Точно так же при $1 \leqslant r \leqslant k$

$$\delta_\pi^{(n)} \exp L(ip^{k-r}\alpha\beta^{p^r}, \pi^{i+p^r j}) = \delta_\pi^{(n)} E(ip^{k-r}\alpha\beta^{p^r}, \pi^{i+p^r j}) \approx 1.$$

Наконец, при $r>k$

$$\delta_\pi^{(n)} \exp p^{k-r} L(i\alpha\beta^{p^r}, \pi^{i+p^r j}) = \delta_\pi^{(n)} \left(E(i\alpha\beta^{p^r}, \pi^{i+p^r j})^{p^{-(r-k)}}\right) \approx 1,$$

ввиду леммы 4, так как

$$i + p^r j > p^{r-k} pj \geqslant p^{r-k} e.$$

Случай B. Нам надо доказать, что если $\omega = E(\gamma)$, то

$$\delta_\pi^{(n)} \exp \log E(\gamma) \sum_{m=0}^{\infty} i\alpha^{p^m} \pi^{p^m i} \approx 1. \tag{4}$$

Для доказательства заметим, что

$$E(\gamma) = E(p^n\Gamma, \xi),$$

где

$$E(1, \xi) = \zeta, \quad \text{т. е.} \quad L(1, \xi) = 0$$

и

$$\Gamma^p = \Gamma + \gamma.$$

Отсюда следует, что

$$\log E(\gamma) = p^n L(\Gamma, \xi) = p^n \sum_{r=0}^{\infty} p^{-r} \Gamma^{p^r} \xi^{p^r} = p^n \sum_{r=0}^{\infty} p^{-r} \left(\Gamma + \sum_{s=0}^{r-1} \gamma^{p^s}\right) \xi^{p^r} =$$

$$= p^n \sum_{r=1}^{\infty} p^{-r} \sum_{s=0}^{r-1} \gamma^{p^s} \xi^{p^r} = p^n \sum_{s=0}^{\infty} \gamma^{p^s} \sum_{r=s+1}^{\infty} p^{-r} \xi^{p^r}.$$

Далее, легко проверить, что

$$(\log E(\gamma))\, i \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{p^m} \pi^{p^m i} = p^n \left(\sum_{s=0}^{\infty} \gamma^{p^s} \sum_{r=s+1}^{\infty} p^{-r} \xi^{p^r}\right) \sum_{m=0}^{\infty} i\alpha^{p^m} \pi^{p^m i} =$$

$$= p^n \sum_{m=0}^{\infty} x_m (i\alpha^{p^m}\gamma) + \sum_{s=0}^{\infty} p^{n-s} L(i\alpha\gamma^{p^s}, \xi^{p^s}\pi^i),$$

где

$$x_m(\sigma) = \sum_{u=0}^{\infty} \sigma^{P^u} \pi^{p^{m+u_i}} \sum_{v=u+1}^{\infty} p^{-v} \xi^{p^v}.$$

Нам надо доказать, что

$$1) \qquad \delta_\pi^{(n)} \exp p^n x_m(\sigma) \approx 1$$

и

$$2) \quad \exp p^{n-s} L(\sigma, \xi^{p^s} \pi^i) \approx 1.$$

Для доказательства 1) покажем, что

$$x_m(\sigma) = x_{m+1}(\sigma^P) - L(\sigma, \xi \pi^{p^{n_i}}). \tag{5}$$

В самом деле,

$$\sum_{r=v}^{\infty} p^{-r} \xi^{p^r} = - \sum_{r=0}^{v-1} p^{-r} \xi^{p^r},$$

так что

$$x_m(\sigma) = - \sum_{u=0}^{\infty} \sigma^{p^u} \pi^{p^{m+u_i}} \sum_{v=0}^{u} p^{-v} \xi^{p^v} = - \sum_{u=1}^{\infty} \sigma^{p^u} \pi^{p^{m+u_i}} \sum_{v=0}^{u-1} p^{-v} \xi^{p^v} - L(\sigma, \xi \pi^{p^{m_i}}) =$$
$$= x_{m+1}(\sigma^P) - L(\sigma, \xi \pi^{p^{m_i}}).$$

Ввиду тождества (5) имеем:

$$\delta_\pi^{(n)} \exp p^n x_m(\sigma) \approx \delta_\pi^{(n)} \exp p^n x_{m+1}(\sigma^P), \tag{6}$$

так как

$$\exp p^n L(\sigma, \xi \pi^{p^{m_i}}) = E(\sigma, \xi \pi^{p^{m_i}})^{p^n}.$$

Но $x_{m+1}(\sigma^P)$ делится на бо́льшую степень π, чем $x_m(\sigma)$, так что, интегрируя равенство (6), мы придем к столь большим m, для которых

$$\delta_\pi^{(n)} \exp p^n x_m(\sigma) \approx 1.$$

Докажем теперь 2). Если $s \leqslant n$, то

$$\delta_\pi^{(n)} E(p^{n-s}\sigma, \xi^{p^s}, \pi^i) = \delta_\pi^{(s)} E(\sigma, \xi^{p^s} \pi^i) = \delta_\pi^{(s)} N_\pi^{(s)} E(\sigma^{P^{-s}}, \xi \pi_s^i) \approx 1. \tag{7}$$

Если же $s > n$, то

$$\delta_\pi^{(n)} (E(\sigma, \xi^{p^s} \pi^{ip}))^{-(s-n)} \approx 1.$$

Для доказательства этого надо дословно повторить доказательство леммы 4. Единственное отличие заключается в том, что теперь не очевидно, что

$$\delta_{\pi_1}^{(s-n)} E(\sigma^{P^{-n}}, \xi^{p^{s-n}} \pi_1^i) \approx 1,$$

но как раз это и доказывается формулой (7). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\delta_\pi^{(1)} \lambda \approx 1$. *Тогда в поле* $k(\sqrt[p]{\pi})$ *существует такое* Λ, *что*

$$\lambda = N_\pi^{(1)} \Lambda \quad \text{и} \quad (\lambda, \mu)_\pi^{(n)} = (\Lambda, \mu)_{\pi_1}^{(n)}$$

для любого $\mu \in k$.

Доказательство. Мы можем предполагать, что

$$\lambda = \pi^a E(p\alpha_0) \Pi(\alpha_i, \pi^i)$$

$$\Lambda = - \pi_1^a E(\alpha_0) \Pi E(\alpha_i^{P^{-1}}, \pi_1^i).$$

Очевидно, можно ограничиться рассмотрением случаев, когда λ и μ равны отдельным каноническим множителям. Все возможные случаи, после отбрасывания тривиальных, сводятся к двум:

$$\lambda = \pi, \quad \mu = E(\beta, \pi^j)$$

и

$$\lambda = E(\alpha, \pi^i), \quad \mu = E(\beta, \pi^j).$$

Первый случай разобран в теореме 2. Разберем второй случай. Так как

$$\lambda = E(\alpha, \pi^i), \quad \mu = E(\beta, \pi^j),$$

то

$$(\lambda, \mu)_\pi^{(n)} = \delta_\pi^{(n)} E(i\alpha\beta, \pi^{i+j}).$$

Вычислим $(\Lambda, \mu)_{\pi_1}^{(n)}$ и докажем, что оно равно правой части предыдущего равенства. Для этого воспользуемся формулой

$$\mu = E(\beta, \pi^j) = E(\beta, \pi_1^{pj}) = E(p\beta^{P^{-1}}, \pi_1^j) \exp(-p\beta^{P^{-1}}\pi_1^j),$$

в силу которой имеем:

$$(\Lambda, \mu)_{\pi_1}^{(n)} = \left(E(\alpha^{P^{-1}}, \pi_1^i), E(p\beta^{P^{-1}}, \pi_1^j)\right)_{\pi_1}^{(n)} (E(\alpha^{P^{-1}}, \pi_1^i), \exp(-p\beta^{P^{-1}}\pi_1^j)).$$

Первый множитель содержит два канонических множителя, а ко второму мы можем применить теорему 3. Это даст:

$$(\Lambda, \mu) = \delta_{\pi_1}^{(n)} E(pi\alpha^{P^{-1}}\beta^{P^{-1}}, \pi_1^{i+j})\, \delta_{\pi_1}^{(n)} \exp\left(-p\beta^{-1}\pi_1^j i \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{p^m-1}\pi_1^{p^m i}\right).$$

На основании замечания к теореме 2, мы можем в сумме под exp отбросить все слагаемые с $m > 0$, так как p есть сумма некоторых степеней π, т. е. некоторых степеней π_1 с показателями, кратными p, а $j \not\equiv o\,(p)$. После этого от второго множителя остается:

$$\delta_{\pi_1}^{(n)} \exp(-ip\alpha^{P^{-1}}\beta^{P^{-1}}\pi_1^{i+j}),$$

так что

$$\Lambda, \mu)_{\pi_1}^{(n)} = \delta_{\pi_1}^{(n)} E(ip\alpha^{P^{-1}}\beta^{P^{-1}}, \pi_1^{i+j})\, \delta_{\pi_1}^{(n)} \exp(-ip\alpha^{P^{-1}}\beta^{P^{-1}}\pi_1^{i+j}) = \delta_{\pi_1}^{(n)} E(i\alpha\beta, \pi_1^{p(i+j)}).$$

Применяя теорему 2, получим:

$$(\Lambda, \mu)_{\pi_1}^{(n)} = \delta_\pi^{(n)} E(i\alpha\beta, \pi^{i+j}).$$

Теорема доказана.

Следствие. Аналогичная формула имеет место при замене поля $k\left(\sqrt[p]{\pi}\right)$ на $k\left(\sqrt[p^m]{\pi}\right)$ и π_1 на π_m при любом $m \leqslant n$.

Доказательство получается m-кратным применением теоремы 4.

4. Инвариантность символа $(\pi, \varepsilon)^{(n)}$ при примарной замене.

ЛЕММА 5. *Если $\tau = \pi\omega$, где ω — p^n-примарное число, то*

$$(\pi, \varepsilon)_\pi^{(n)} = (\pi, \varepsilon)_\tau^{(n)}.$$

Доказательство. Ввиду того что при ε p^n-примарном теорема очевидна, достаточно доказать ее при $\varepsilon = E(\alpha, \pi^i)$.

Так как

$$\left(\pi,\ E(\alpha,\ \pi^j)\right)_\pi^{(n)} \approx 1,$$

то надо доказать, что

$$\left(\tau\omega^{-1},\ E(\alpha,\ \pi^i)\right)_\tau^{(n)} \approx \left(\tau,\ E(\alpha,\ \pi^i)\right)_\tau^{(n)} \approx 1.$$

Для этого достаточно доказать, что $E(\alpha,\ \pi^i)$ является нормой некоторого числа поля $k\left(\sqrt[p^n]{\tau}\right)$. Но $E(\alpha,\ \pi^i)$ является нормой числа $E(\alpha^{p^{-n}},\ \pi_n^i)$ поля $k\left(\sqrt[p^n]{\pi}\right)$ и, как всякая единица,— нормой некоторого числа из неразветвленного поля $k\left(\sqrt[p^n]{\omega}\right)$. Из этого по лемме Шеваллей следует, что $E(\alpha,\ \pi^i)$ есть норма некоторого числа поля

$$k\left(\sqrt[p^n]{\pi\omega}\right) = k\left(\sqrt[p^n]{\tau}\right).$$

Лемма доказана.

5. Инвариантность символа $(\lambda,\ \mu)$ при $\mu \equiv 1\ (\pi^{e+1})$.

ТЕОРЕМА 5. *Символ $(\lambda,\ \mu)_\pi^{(n)}$ для любых чисел λ и для $\mu \equiv 1\ (\pi^{e+1})$ не зависит от выбора простого числа π.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых простых чисел π, τ и $\mu \equiv 1\ (\pi^{e+1})$

$$(\pi,\ \mu)_\pi^{(n)} = (\pi,\ \mu)_\tau^{(n)}. \tag{8}$$

Действительно, если равенство (8) доказано, то остается доказать, что для любой единицы ε

$$(\varepsilon,\ \mu)_\pi^{(n)} = (\varepsilon,\ \mu)_\tau^{(n)}.$$

Для этого положим $\pi\varepsilon = \pi_1$ и заметим, что

$$(\varepsilon,\ \mu)_\pi^{(n)} = (\pi_1,\ \mu)_\pi^{(n)}\left((\pi,\ \mu)_\pi^{(n)}\right)^{-1},$$

$$(\varepsilon,\ \mu)_\tau^{(n)} = (\pi_1,\ \mu)_\tau^{(n)}\left((\pi,\ \mu)_\tau^{(n)}\right)^{-1}.$$

Так как из равенства (8) следует совпадение правых частей, то и левые части совпадают.

Прежде чем приступить к доказательству (8), отметим еще одну редукцию. Пусть $\pi = \tau\eta$, где η — единица:

$$\eta = \omega\Pi E(\alpha_i,\ \pi^i).$$

Обозначим $\pi\omega^{-1}$ через π_1. Ввиду леммы 5,

$$(\pi,\ \mu)_\pi^{(n)} = (\pi,\ \mu)_{\pi_1}^{(n)} = (\pi_1\omega,\ \mu)_{\pi_1}^{(n)} = (\pi_1,\ \mu)_{\pi_1}^{(n)}.$$

Таким образом, для доказательства (8) достаточно показать, что

$$(\pi_1,\ \mu)_{\pi_1}^{(n)} = (\pi_1,\ \mu)_\tau^{(n)}.$$

Мы будем в дальнейшем π_1 снова обозначать через π, но в соответствии с вышесказанным полагать, что

$$\pi = \tau\Pi E(\alpha_i,\ \pi^i). \tag{9}$$

В формуле (8) обе части мультипликативны по отношению к μ и поэтому достаточно рассмотреть три случая: $\mu = \omega$ — примарное число, $\mu = \mu_1^p$ и $\mu = E(\beta,\ \pi^j)$ $(j,\ p) = 1$. В первом случае равенство очевидно.

Во втором случае

$$(\pi,\ \mu)_\pi^{(n)} = (\pi,\ \mu_1)_\pi^{(n-1)}, \quad (\pi,\ \mu)_\tau^{(n)} = (\pi,\ \mu)_\tau^{(n-1)}$$

и (8) следует из инвариантности символа $(\lambda,\ \mu)_\pi^{(n-1)}$, которую мы предполагаем доказанной. Мы можем, таким образом, ограничиться рассмотрением третьего случая. В этом случае равенство (8) сводится к равенству

$$\left(\pi,\ E(\beta,\ \pi^j)\right)_\tau^{(n)} \approx 1. \tag{10}$$

Приступим к доказательству (10) в предположении (9). Обозначая $\Pi E(\alpha_i,\ \pi^i)$ через ε, получим:

$$\left(\pi,\ E(\beta,\ \pi^j)\right)_\tau^{(n)} = \left(\tau\varepsilon,\ E(\beta,\ (\tau\varepsilon)^j)\right)_\tau^{(n)}.$$

Применяя к правой части теорему 3, найдем, что

$$\left(\pi,\ E(\beta,\ \pi^j)\right)_\tau^{(n)} = \delta_\tau^{(n)} \exp L\left(\beta,\ (\tau\varepsilon)^j\right)\left(1 + \sum_{i,\ m} i\alpha_i^{p^m} \tau^{p^m i}\right).$$

Преобразуем теперь выражение, стоящее под exp, и заметим, что эти преобразования будут иметь силу не только в поле k, но и в поле степенных рядов от неизвестного t с коэффициентами из поля инерции k. Введем для любого такого степенного ряда $f(t)$ выражение

$$M(f) = f + p^{-1} f^P + p^{-2} f^{P^2} + \ldots,$$

где f^P определено на стр. 135 работы ([3]). $M(f)$ есть линейный оператор. На стр. 136 работы ([3]) выведено, что

$$L(\beta,\ f) = M\left(\beta f + \sum_{r=1}^{\infty} \beta^{P^r} \Lambda_r f\right).$$

Применим эту формулу к функции

$$f = \left(t \Pi E(\alpha_i,\ t^i)\right)^j.$$

Имеем:

$$L\left(\beta,\ (t\Pi E(\alpha_i,\ \pi^i))^j\right)\left(1 + \sum i\alpha^{P^m} t^{p^m i}\right) =$$

$$= M\left(\beta f + \sum \beta^{P^r} \Lambda_r f\right)\left(1 + \sum i\alpha^{P^m} t^{p^m i}\right).$$

Заметим, что для любого степенного ряда g имеет место формула:

$$M(\varphi)\left(1 + \sum i\alpha_i^{P^m} t^{p^m i}\right) = M\left(\varphi\left(1 + \sum i\alpha_i^{P^m} t^{p^m i}\right)\right) + \sum_i \sum_{r=1}^{\infty} p^{-r} M(\varphi^{P^r} \alpha t^i).$$

Применим ее к случаю

$$\varphi = \beta f + \sum \beta^{P^r} \Lambda_r f.$$

Воспользовавшись тем, что

$$1 + \sum_i \sum_{m=0}^{\infty} i\alpha_i^{P^m} t^{p^m i} = \frac{1}{j} f^{-1} df$$

и

$$1+\sum_j \sum_{m=1}^{\infty} i\alpha_i^{p^m} t^{p^m i} = \frac{1}{j}(f^{-1}df)^P,$$

будем иметь на основании формулы (56) работы ([3]):

$$\frac{1}{j}\Lambda_r f\cdot f^{-1}df=\frac{1}{j}p^{-r}f^{p^r}\cdot f^{-1}df-\frac{1}{j}p^{-r}f^{p^{r-1}P}(f^{-1}df)^P-\frac{1}{j}p^{-r}f^{p^{r-1}P}\sum_i i\alpha_i t^i=$$

$$=\frac{1}{j}dp^{-r}\Lambda_r f-\frac{1}{j}p^{-r}f^{p^{r-1}P}\sum i\alpha_i t^i. \qquad (11)$$

Воспользуемся тем, что

$$\Lambda_r f = p^{-r}t^{p^r j}(\Pi E(jp^r\alpha_i, t^i)-\Pi E(jp^{r-1}\alpha_i^P, t^{pi})=$$

$$=\Pi E(jp^{r-1}\alpha_i^P, t^{pi})t^{p^r j}p^{-r}(\Pi E(jp^r\alpha_i, t^i)E(-jp^{r-1}\alpha_i^P, t^{pi})-1)=$$

$$=t^{p^r j}\Pi E(jp^{r-1}\alpha_i^P, t^{pi})\,p^{-r}(\exp\sum p^r\alpha_i t^i-1)=$$

$$=t^{p^r j}\Pi E(jp^{r-1}\alpha_i^P, t^{pi})\sum\alpha_i t^i+p^r\Phi,$$

где Φ есть целочисленный степенной ряд. Находим:

$$dp^{-r}\Lambda_r f=dp^{-r}t^{p^r j}\Pi E(jp^{r-1}\alpha_i^P, t^{pi})+d\Phi. \qquad (12)$$

Но

$$dp^{-r}t^{p^r j}\Pi E(jp^{r-1}\alpha_i^P, t^{pi})=p^{-r}t^{p^r j}\Pi E(jp^{r-1}\alpha_i^P, t^{pi})\sum i\alpha_i t^i+\sum\alpha_i t^i(\psi)^P, \qquad (13)$$

где ψ — некоторый целочисленный степенной ряд, ввиду второй из формул (56) работы ([3]). Подстановка (12) и (13) в (11) дает:

$$\frac{1}{j}\Lambda_r f\cdot f^{-1}df=d\Phi+(\psi)^P\sum\alpha_i t^i.$$

Перейдем от кольца степенных рядов к полю k, подставив во всех полученных тождествах τ вместо t и применяя оператор $\mathscr{E}_\tau$ [см. стр. 136 работы ([3])]. В результате получим:

$$(\pi, \mu)_\tau^{(n)}=\delta_\tau^{(n)}\mathscr{E}_\tau(d\Phi)\,\mathscr{E}_\tau(\psi^P\sum\alpha_i t^i)\approx 1,$$

так как $(i, p)=1$. Теорема 5 доказана.

Следствие. Ввиду замечания, сделанного в конце п. 1, получаем, что при $\mu\equiv 1\ (\pi^{e+1})$ символ $(\lambda, \mu)^{(n)}$ обладает норменным свойством.

ЛЕММА 6. *Для каждого числа $\mu\in k$ существует такое число $M\in k\left(\sqrt[p^n]{\pi}\right)$, что $\mu\approx M$ в $k\left(\sqrt[p^n]{\pi}\right)$ и $M\equiv 1\ (\pi_n^{e_n+1})$, где e_n — показатель ветвления поля $k\left(\sqrt[p^n]{\pi}\right)$.*

Доказательство. Пусть μ имеет следующее каноническое разложение:

$$\mu\approx\pi^a E(\alpha)\,\Pi E(\alpha_i, \pi^i).$$

В $k\left(\sqrt[p^n]{\pi}\right)$ имеем:

$$\mu\approx E(\alpha)\,\Pi E(\alpha_i, p_n^{p^n i}).$$

$$E(\alpha_i, \pi_n^{p^n i}) = \exp(-p^n \alpha_i^{P^{-n}} \pi_n^i - p^{n-1} \alpha_i^{P^{-n+1}} \pi_n^{pi} - \dots$$
$$\dots - p\alpha_i^{P^{-1}} \pi_n^{p^{n-1} i})\, E(p^n \alpha_i^{P^{-n}}, \pi_n^i).$$

Искомым числом M является тогда число

$$E(\alpha)\, \Pi \exp(-p^n \alpha_i^{P^{-n}} \pi_n^i - p^{n-1} \alpha_i^{P^{-n+1}} \pi_n^{pi} - \dots - p\alpha_i^{P^{-1}} \pi_n^{p^{n-1} i}).$$

Как следствие теоремы 5 получаем следующее усиление теоремы 4, существенное для всего дальнейшего:

ТЕОРЕМА 4 . *Каково бы ни было* $\Lambda \in k(\sqrt[p^n]{\pi})$ *такое, что* $N_\pi^{(n)} \Lambda = \lambda$, *имеет место:*

$$(\lambda, \mu)_\pi^{(n)} = (\Lambda, \mu)_{\pi_n}^{(n)}.$$

Ввиду теоремы 4, достаточно доказать, что

$$(\Lambda^{1-\sigma}, \mu)_{\pi_n}^{(n)} \approx 1,$$

если σ — образующий автоморфизм $k(\sqrt[p^n]{\pi}) / k$. Если M — число, существование которого установлено в лемме 6, то

$$M \approx \mu, \quad M^\sigma \approx \mu, \quad M^{1-\sigma} \approx 1.$$

По определению символа (λ, μ), имеем:

$$(A^{1-\sigma}, \mu)_{\pi_n}^{(n)} = (A, \mu)_{\pi_n}^{(n)} \left((A^\sigma, \mu)_{\pi_n}^{(n)}\right)^{-1},$$
$$(A^\sigma, \mu)_{\pi_n}^{(n)} = (A^\sigma, M)_{\pi_n}^{(n)} = (A, M^{\sigma^{-1}})_{\pi_n^{\sigma^{-1}}}^{(n)}.$$

Ввиду того что $M \equiv (\pi_n^{e_n+1})$ и на основании теоремы 5, символ $(A, M^{\sigma^{-1}})^{(n)}$ инвариантен, а так как $M^{\sigma^{-1}} \approx M$, то

$$(A^\sigma, \mu)_{\pi_n}^{(n)} \approx (A, \mu)_{\pi n}^{(n)}.$$

что и доказывает теорему.

6. Формула сдвига для неразветвленного расширения.

ТЕОРЕМА 6. *Если* ω — p^n-*примарное число и* $\lambda = N_\omega^{(n)} \Lambda$, *то*

$$(\lambda, \mu)_\pi^{(n)} = N_\omega^{(n)} (\Lambda, \mu)_\pi^{(n)}.$$

Это равенство надо понимать в том смысле, что значение символа $(\Lambda, \mu)_\pi^{(n)}$ в поле $k_\omega = k(\sqrt[p^n]{\omega})$ есть p^n-примарное число, норма которого по отношению к полю k есть p^n-примарное число, равное значению символа $(\lambda, \mu)_\pi^{(n)}$.

Доказательство. Пусть Λ и μ имеют следующие канонические разложения:

$$\Lambda = \pi^a E(\overline{\alpha})\, \Pi(\overline{\alpha}_i, \pi^i), \quad \mu = \pi^b E(\beta)\, \Pi(\beta_j, \pi^j).$$

Тогда

$$(\lambda, \mu)_\pi^{(n)} = E(a\beta - b\overline{\alpha} + \overline{\gamma}), \tag{14}$$

где

$$\Pi E(i\overline{\alpha}_i \beta_j) \approx E(\overline{\gamma})\, \Pi E(\overline{\gamma}_h, \pi^h). \tag{15}$$

Беря $N_\omega^{(n)}$ от обеих частей равенств (14) и (15), получим:

$$N_\omega^{(n)}(\Lambda,\ \mu)_\pi^{(n)} \approx E(-b\alpha+\gamma), \tag{16}$$

$$\Pi E(i\alpha_i\beta_j) \approx E(\gamma)\,\Pi E(\gamma_h,\ \pi^h), \tag{17}$$

где

$$S_{p\omega}\bar{\alpha}_i = \alpha_i, \quad S_{p\omega}\bar{\gamma}_i = \gamma_i, \quad S_{p\omega}\bar{\alpha} = \alpha, \quad S_{p\omega}\bar{\gamma} = \gamma.$$

Так как

$$N_\omega^{(n)}\Lambda \approx E(\alpha)\,\Pi E(\alpha_i,\ \pi^i),$$

то равенства (14), (15), (16) и (17) и доказывают теорему. Для случая конечного поля классов вычета, который мы имеем в виду, теорема дает:

$$(\lambda,\ \mu)_\pi^{(n)} = (\Lambda,\ \mu)_\pi^{(n)}. \tag{18}$$

7. Инвариантность символа $(\lambda,\ \mu)_\pi^{(n)}$ при примарной замене.

ТЕОРЕМА 7. *Если ω — p^n-примарное число и $\tau = \pi\omega$, то*

$$(\lambda,\ \mu)_\pi^{(n)} = (\lambda,\ \mu)_\tau^{(n)}.$$

Доказательство. Наша теорема доказана уже для случая $\lambda = \pi$ в лемме 5. Нам остается доказать ее еще для случая, когда λ есть главная единица ε. Пусть $\varepsilon = N_\omega^{(n)}\bar{\varepsilon}$. Тогда, по формуле (18),

$$(\varepsilon,\ \mu)_\pi^{(n)} = (\bar{\varepsilon},\ \mu)_\pi^{(n)} = (\bar{\mathscr{E}},\ \mu)_{\pi_n}^{(n)} = (\bar{\mathscr{E}},\ M)_{\pi_n}^{(n)}, \tag{19}$$

где $N_\pi^{(n)}\bar{\mathscr{E}} = \bar{\varepsilon}$, а M есть число, существование которого установлено в лемме. Ввиду того что $M \equiv 1\,(\pi_n^{e_n+1})$, символ $(\bar{\mathscr{E}},\ M)_{\pi_n}^{(n)}$ инвариантен на основании теоремы 6, и мы можем написать:

$$(\bar{\mathscr{E}},\ M)_{\pi_n}^{(n)} = (\bar{\mathscr{E}},\ M)_{\pi_n\sqrt[p^n]{\omega}}^{(n)} = (\bar{\varepsilon},\ \mu)_{\pi_n\sqrt[p^n]{\omega}}^{(n)}. \tag{20}$$

Оба символа в равенстве (19) рассматриваются в поле $k\left(\sqrt[p^n]{\pi},\ \sqrt[p^n]{\omega}\right)$. Так как

$$k\left(\sqrt[p^n]{\pi},\ \sqrt[p^n]{\omega}\right) = k\left(\sqrt[p^n]{\pi\omega},\ \sqrt[p^n]{\omega}\right)$$

и

$$\sqrt[p^n]{\pi\omega} = \pi_n\sqrt[p^n]{\omega},$$

то по теореме 4 имеем:

$$(\bar{\mathscr{E}},\ \mu)_{\pi_n\sqrt[p^n]{\omega}}^{(n)} = (\bar{\varepsilon},\ \mu)_{\pi_n\omega}^{(n)}. \tag{21}$$

Применяя еще раз теорему 6, получим:

$$(\bar{\varepsilon},\ \mu)_{\pi_n\omega}^{(n)} = (\varepsilon,\ \mu)_{\pi\omega}^{(n)} = (\varepsilon,\ \mu)_\tau^{(n)}. \tag{22}$$

Сравнение формул (19), (20), (21) и (22) дает

$$(\varepsilon,\ \mu)_\pi^{(n)} = (\varepsilon,\ \mu)_\tau^{(n)},$$

то и доказывает теорему.

8. Норменное свойство.

ТЕОРЕМА 8. *Символ* $(\lambda, \mu)_\pi^{(n)}$ *обладает норменным свойством.*

Доказательство.

А. Пусть $(\lambda, \mu)_\pi^{(n)} = 1$. Докажем, что $\lambda = N_\mu^{(n)} \Lambda$. Рассмотрим три случая: $w(\lambda) = 1$, $w(\lambda) \not\equiv o(p)$ и $w(\lambda) \equiv o(p)$.

1. $w(\lambda) = 1$. Пусть

$$(\pi, \lambda)_\pi^{(n)} = \delta_\pi^{(n)} \lambda = E(\gamma). \tag{23}$$

Выберем в k новое простое число $\tau = \pi E(\gamma)$. По теореме 7,

$$(\lambda, \mu)_\tau^{(n)} \approx (\lambda, \mu)_\pi^{(n)} \approx 1,$$
$$(\tau, \lambda)_\tau^{(n)} = (\tau, \lambda)_\pi^{(n)} = (\pi E(\gamma), \lambda)_\pi^{(n)} = (\pi, \lambda)_\pi^{(n)} (E(\gamma), \lambda)_\pi^{(n)} \approx 1,$$

ввиду (23) и того, что $w(\lambda) = 1$. Из этих равенств, по определению $(\tau, \lambda)_\tau^{(n)}$, следует, что

$$\lambda = \tilde{N}_\tau^{(n)} \Lambda_1, \tag{24}$$

а по теореме 4 получаем:

$$(\lambda, \mu)_\tau^{(n)} \approx (\Lambda_1, \mu)_{\tau_n}^{(n)} \approx (\Lambda_1, M)_{\tau_n}^{(n)},$$

где M есть число, существование которого установлено в лемме 6.

Так как

$$(\lambda, \mu)_\tau^{(n)} \approx 1,$$

то и

$$(\Lambda_1, M)_{\tau_n}^{(n)} \approx 1,$$

а так как

$$M \equiv 1 \, (\tau_n^{e_n+1}),$$

то мы можем на основании следствия из теоремы 5 считать, что символ $(\Lambda_1, M)_{\tau_n}^{(n)}$ обладает норменным свойством, т. е.

$$\Lambda_1 = N_M^{(n)} \overline{\Lambda}_1 = N_\mu^{(n)} \overline{\Lambda}_1. \tag{25}$$

Равенства (24) и (25) означают, что λ есть норма числа $\overline{\Lambda}_1$ из поля $K = k(\sqrt[p^n]{\tau}, \sqrt[p^n]{\mu})$, а следовательно, нормой числа $\Lambda = N_{k/k_\mu} \overline{\Lambda}_1$ из поля k_μ, что и требовалось доказать.

2. $w(\lambda) \not\equiv o(p)$. Определим x из сравнения

$$w(\lambda)\, x \equiv 1 \, (p^n)$$

и рассмотрим $\lambda_1 = \lambda^x$. Имеем: $\lambda_1 \approx \lambda_2$, где $w(\lambda_2) = 1$, и для него утверждение теоремы доказано, а следовательно, это верно и для λ.

3. $w(\lambda) \equiv o(p)$. Подберем опять такое простое число $\tau = \pi\omega$, для которого $(\mu, \tau)_\tau$ было бы единицей. Тогда из теоремы 2 будет следовать, что

$$\mu = N_\tau^{(n)} M_1. \tag{26}$$

Так как по условию $(\lambda, \mu) = 1$, то и $(\lambda\tau, \mu)_\tau = 1$, а так как $w(\lambda\tau) \not\equiv o(p)$, то для $\lambda\tau$ теорема доказана и

$$\mu = N_{\lambda\tau}^{(n)} M_2. \tag{27}$$

Из (26) и (27) по лемме Шевалле́й следует, что при некотором M

$$\mu = N_{\lambda}^{(n)} M,$$

а по лемме 2 отсюда следует, что

$$\lambda = N_{\mu}^{(n)} \Lambda.$$

B. Пусть дано, что $\lambda = N_{\mu}^{(n)} \Lambda$. Докажем, что $(\lambda, \mu)_{\tau}^{(n)} \approx 1$. Рассмотрим отдельно три случая:

1°. $w(\lambda) = 1$. Пусть

$$(\lambda, \mu)_{\mu}^{(n)} = E(\gamma), \quad (\lambda, \pi)_{\pi}^{(n)} = E(\gamma_1), \quad \tau = \pi E(-\gamma - \gamma_1).$$

Как и выше, получим, что

$$(\lambda, \tau)_{\pi}^{(n)} = (\lambda, \tau)_{\pi}^{(n)} = (\lambda, \pi)_{\pi}^{(n)} (\lambda, E(-\gamma - \gamma_1) = E(\gamma_1) E(\gamma - \gamma_1) = E(-\gamma),$$

$$(\lambda, \mu)_{\tau}^{(n)} = (\lambda, \mu)_{\pi}^{(n)} = E(\gamma),$$

а следовательно,

$$(\lambda, \tau\mu)_{\tau}^{(n)} \approx 1. \tag{28}$$

По доказанному, из этого следует, что λ есть норма числа из поля $k(\sqrt[p^n]{\tau\mu})$, а следовательно, по лемме Шевалле́й, имеем:

$$\lambda = N_{\tau}^{(n)} \Lambda.$$

Отсюда вытекает, что

$$(\lambda, \tau)_{\tau}^{(n)} \approx 1,$$

а ввиду (28) получаем

$$(\lambda, \mu)_{\pi}^{(n)} \approx (\lambda, \mu)_{\tau}^{(n)} \approx 1.$$

2°. $w(\lambda) \not\equiv o(p)$. Этот случай сводится к ранее рассмотренному точно так же, как и в случае A.

3° $w(\lambda) \equiv o(p)$. Выбираем опять $\tau = \pi\omega$ так, чтобы получить

$$(\mu, \tau)_{\tau}^{(n)} \approx 1. \tag{29}$$

Тогда μ будет нормой числа из поля $k(\sqrt[p^n]{\tau})$, а по лемме 2 и τ будет нормой числа T из поля $k(\sqrt[p^n]{\mu})$. Следовательно,

$$\tau\lambda = N_{\mu}^{(n)} (T\Lambda).$$

Так как $w(\tau\lambda) \not\equiv o(p)$, то отсюда следует, что

$$(\tau\lambda, \mu)_{\tau}^{(n)} \approx 1,$$

а ввиду (29), получаем, что

$$(\lambda, \mu)_{\pi}^{(n)} = (\lambda, \mu)_{\tau}^{(n)} \approx 1.$$

Теорема доказана.

Соединяя доказанную теорему с теоремой 2, получим основной результат этого параграфа:

символ $(\lambda, \mu)_{\pi}^{n}$ *не зависит от выбора простого числа* π.

§ 2. Локальная теория полей классов

Пусть k — локальное поле с полем классов вычетов характеристики p. Исследование абелевых расширений k сводится к двум случаям: к исследованию расширений, степень которых взаимно проста с p, и к исследованию расширений, степень которых есть степень p. Как известно, первый случай исследуется совершенно элементарно и поэтому мы будем рассматривать только второй случай.

Мы будем рассматривать такие расширения k, группы Галуа которых абелевы и имеют показатель p^n, и в связи с этим предполагать, что k содержит корень степени p^n из единицы. В этих предположениях любое такое расширение K поля k однозначно определяется группой тех чисел k, которые становятся в K p^n-ми степенями. Наоборот, любой группе чисел поля k, содержащей группу p^n-х степеней $k^{\times p^n}$, соответствует расширение K [см. ([4]), стр. 45].

Группу чисел k, описанным образом соответствующую K, будем обозначать через $R(K)$, а группу чисел k, являющихся нормами чисел K, — через $N(K)$. Теория полей классов и является собственно описанием связи между двумя этими группами. Связь же эта устанавливается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 9. $\lambda \in N(K)$ *тогда и только тогда, когда* $(\lambda, \mu)^{(n)} \approx 1$ *для любого* $\mu \in R(K)$.

ЛЕММА 7. *Если* K/k *есть расширение* k, σ — *его автоморфизм*, $\lambda \in k$ *и* $M \in K$, *то*

$$(\lambda, M^{1-\sigma})^{(n)} \approx 1.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$(\lambda, M)^{(n)} = (\lambda, M^{\sigma})^{(n)}.$$

Это, в свою очередь, будет доказано, если доказать, что при любых Λ и M из K

$$(\Lambda, M)^{(n)} = (\Lambda^{\sigma}, M^{\sigma})^{(n)}, \tag{30}$$

так как в нашем случае $\lambda^{\sigma} = \lambda$. Непосредственно из определения символа (λ, μ) следует, что если Π — простое число из K, то

$$(\Lambda, M)^{(n)}_{\Pi} = (\Lambda^{\sigma}, M^{\sigma})^{(n)}_{\pi^{\sigma}},$$

а ввиду инвариантности символа (λ, μ), из этого следует равенство (30).

Доказательство теоремы 9. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_d$ есть базис группы $R(K)/k^{\times p^n}$, т. е. всякое число из $R(K)$ представляется в виде

$$\mu = \mu_1^{x_1} \cdots \mu_d^{x_d} \mu_0^{p^n}, \quad x_i \pmod{p^n}.$$

Нам достаточно доказать, что $\lambda \in N(K)$ тогда и только тогда, когда

$$(\lambda, \mu_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, d). \tag{31}$$

Это свойство будем доказывать индукцией по d. При $d = 1$ доказываемое утверждение есть не что иное, как норменное свойство символа (λ, μ), доказанное в § 1.

Пусть теорема доказана для меньших значений d. Имеем:

$$K = k(\sqrt[p^n]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[p^n]{\mu_d}).$$

Обозначим через K_1 поле $k(\sqrt[p^n]{\mu_1})$. Тогда

$$K = K_1(\sqrt[p^n]{\mu_2}, \ldots, \sqrt[p^n]{\mu_d}).$$

Обозначим через $\overline{N}(K)$ группу всех λ, удовлетворяющих всем условиям (31). Нам надо доказать, что

$$\overline{N}(K) = N(K).$$

Ясно, что $N(K) \subseteq \overline{N}(K)$, так как если λ является нормой числа из K, то оно является нормой и числа из $k(\sqrt[p^n]{\mu_i})$, а следовательно, удовлетворяет всем соотношениям (31).

Для того чтобы доказать совпадение $N(K)$ и $\overline{N}(K)$, нам достаточно доказать совпадение их индексов в группе $k^{\times p^n}$. Для этого заметим, что

$$(k^\times : N(K)) = (k^\times : N(K_1))(N(K_1) : N(K)),$$

$$(k^\times : \overline{N}(K)) = (k^\times : \overline{N}(K_1))(\overline{N}(K_1) : \overline{N}(K)).$$

По индуктивному предположению,

$$(k^\times : N(K_1)) = (k^\times : \overline{N}(K_1))$$

и поэтому нам достаточно установить совпадение вторых множителей.

Выражение

$$(\overline{N}(K_1) : \overline{N}(K))$$

легко определить из элементарных соображений теории характеров. А именно, если в $k^\times / R(K)\,\mu_i$ имеет порядок p^{r_i}, то

$$(\overline{N}(K_1) : \overline{N}(K)) = p^{r_2 + \cdots + r_d}.$$

С другой стороны,

$$(N(K_1) : N(K)) = (K_1^\times : \mathfrak{N}),$$

где $\mathfrak{N}$ есть группа тех чисел K_1, нормы которых по отношению к k лежат в $N(K)$. Докажем, что $\mathfrak{N} = N_1(K)$, т. е. $\mathfrak{N}$ есть группа $N(K)$, соответствующая полю K в поле K_1. Ясно, что $\mathfrak{N} \supseteq N_1(K)$. Если $A \in \mathfrak{N}$, то

$$N_{K_1/k} A = N_{K/k} B = N_{K_1/k}(N_{K/K_1} B).$$

Так как поле K_1 циклическое, то отсюда следует, что

$$A = (N_{K/K_1} B) \cdot C^{1-\sigma},$$

где σ — автоморфизм K_1 / k. Нам остается доказать, что $C^{1-\sigma} \in N_1(K)$, но это следует, по индуктивному предположению, из норменного свойства, так как

$$K = K_1(\sqrt[p^n]{\mu_2}, \ldots, \sqrt[p^n]{\mu_d}) \text{ и } \mu_i^\sigma = \mu_i.$$

Теперь мы можем найти $(K_1^\times : \mathfrak{N})$:

$$(K_1^\times : \mathfrak{N}) = (K_1 : N_1(K)) = (K_1 : N_1(K)) = p^{r_2 + \cdots + r_d}.$$

Тем самым теорема доказана.

Все основные теоремы локальной теории полей классов являются непосредственными следствиями теоремы 9 и теории характеров конечных абелевых групп.

Действительно, если мы определим на группе $k^\times / k^{\times p^n}$ билинейную невырожденную функцию $(\lambda, \mu)^{(n)}$, то каждой подгруппе H будет соответствовать ее ортогональное дополнение, т. е. совокупность всех μ, для которых

$$(\lambda, \mu)^{(n)} = 1$$

для всех $\lambda \in H$. Как известно, соответствие между подгруппой H и ее ортогональным дополнением H^* взаимно однозначно, причем $(H^*)^* = H$, из $H_1 \subset H_2$ следует $H_1^* \supset H_2^*$ и

$$k^\times / H \cong x(H^* / k^{\times p^n}),$$

где $x(G)$ означает группу характеров группы G.

Теорема 9 утверждает, что ортогональным дополнением группы $N(K)$ будет группа $R(K)$. Применяя к очевидным свойствам групп $R(K)$ сформулированные свойства ортогональных дополнений, мы и получаем все основные теоремы локальной теории полей классов.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность И. Р. Шафаревичу, которому я обязан многими ценными советами и указаниями при написании этой работы.

Поступило
2. VII. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hasse H., Zur Arbeit von I. R. Šafarevič über das allgemeine Reziprozitätsgesetz Math. Nachr., Bd. 5. Nr. 3—5 (1951), 301—327.

[2] Kneser M., Zum expliziten Reziprozitätsgesetz von Šafarevič, Math. Nachr., Bd. 6, Nr. 2 (1951), 89—96.

[3] Шафаревич И. Р., Общий закон взаимности, Матем. сб., 26 (68):1 (1950), 113—146.

[4] Witt E., Der Existenzsatz für Abelsche Funktionenkörper, Journ. für die reine und angew. Math., Bd. 173, Nr. 1 (1935), 43—51.

[5] Chevalley C., Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, Journ. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, 9 (1933), 365—476.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 51–62

А. Д. ТАЙМАНОВ

О КРАТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

Теоремы кратной отделимости, введенные П. С. Новиковым в дескриптивную теорию множеств, доказываются в работе для несчетной системы замкнутых множеств совершенно нормального пространства.

Понятие кратной отделимости было введено в дескриптивную теорию множеств П. С. Новиковым, который доказал, что конечные и счетные системы A-множеств кратно отделимы посредством B-множеств.

Мы рассмотрим некоторые аналогичные предложения для случая несчетных систем замкнутых множеств. Большинство теорем отделимости было установлено для множеств, лежащих в бэровском пространстве. Это ограничение не лежит в существе дела и мы будем рассматривать замкнутые множества совершенно нормального пространства.

Пространство называется *нормальным*, если любые два замкнутых множества без общих точек отделимы открытыми множествами.

Пространство называется *вполне нормальным*, если всякое его подмножество является в то же время нормальным пространством.

Пространство называется *совершенно нормальным*, если каждое замкнутое множество является G_δ.

Пользуясь понятием кратной отделимости, можно дать необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство было нормальным, вполне нормальным и совершенно нормальным.

ЛЕММА 1. *В нормальном пространстве для любой конечной системы замкнутых множеств* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *без общих точек существуют открытые множества* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *такие, что*

$$H_i \supset F_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1} \bar{H}_i = 0.$$

Доказательство. Для $n = 2$ лемма верна в силу определения нормального пространства. Допустим, что лемма верна для числа n. Пусть данные замкнутые множества $F_1, F_2, \ldots, F_n, F_{n+1}$ таковы, что

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i = 0.$$

Согласно допущению, лемма верна для n замкнутых множеств $F_1 \cdot F_2, F_3, \ldots, F_n, F_{n+1}$.

Обозначим через $H_1, H_2, \ldots, H_n$ содержащие их открытые множества такие, что

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_i = 0.$$

Два замкнутых множества $F_1 - H_1$, $F_2 - H_2$ не могут иметь общей точки. Поэтому можно найти два открытых множества L_1, L_2, не имеющих общей точки и соответственно покрывающих $F_1 - H_1$, $F_2 - H_2$. Полагая

$$H_1' = L_1 + H_1, \quad H_2' = L_2 + H_1, \quad H_3' = H_2, \ \ldots, \quad H_{n+1}' = H_n,$$

мы видим, что

$$H_i' \supset F_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{n} H_i' = 0;$$

этим лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы пространство было нормальным, необходимо и достаточно выполнение первой теоремы о кратной отделимости для любой конечной системы замкнутых множеств, другими словами: для любой конечной системы замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots, F_n$ таких, что $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = 0$, существует система открытых множеств $H_1, H_2, \ldots, H_n$ таких, что*

$$H_i \supset F_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{n} H_i = 0.$$

Необходимость следует из леммы 1. Достаточность очевидна.

ЛЕММА 2. *Для того чтобы пространство R было вполне нормальным, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух замкнутых множеств $F_1, F_2, F_1 \cdot F_2 = F$, существовали открытые множества H_1, H_2 такие, что*

$$H_1 \supset F_1 / F, \quad H_2 \supset F_2 - F, \quad H_1 \cdot H_2 = 0.$$

Достаточность. Пусть R' — подпространство пространства R, F_1' и F_2' — замкнутые в R' множества и $F_1' \cdot F_2' = 0$. Пусть F_1 и F_2 — замыкания множеств F_1' и F_2' в R и $F = F_1 \cdot F_2$. Тогда

$$F_1' = R' \cdot F_1, \quad F_2' - R' \cdot F_2, \quad F \cdot R' = 0.$$

Для множеств F_1, F_2 найдутся открытые множества H_1 и H_2 такие, что

$$H_1 \supset F_1 - F, \quad H_2 \supset F_2 - F, \quad H_1 \cdot H_2 = 0.$$

Тогда множества $H_1' = R' \cdot H_1$, $H_2' = R' \cdot H_2$ — открытые в R' и

$$H_1' \supset F_1', \quad H_2' \supset F_2' \ \text{и} \ H_1' \cdot H_2' = 0.$$

Необходимость. Пусть даны замкнутые множества F_1, F_2, $F = F_1 \cdot F_2$, и пусть в R каждое подпространство нормально. Рассмотрим подпространство $M = R - F$. Множества

$$R_1 = F_1 - F = M \cdot F_1, \quad R_2 = F_2 - F = M \cdot F_2$$

— замкнутые в M множества без общих точек. В силу нормальности про-

странства M всегда найдутся открытые в M множества H_1, H_2 такие, что

$$H_1 \supset R_1, \quad H_2 \supset R_2 \text{ и } H_1 \cdot H_2 = 0.$$

Но M есть область в R и H_1, H_2 — открытые множества в M, следовательно, H_1, H_2 являются открытыми множествами в R.

ЛЕММА 3. *Во вполне нормальном пространстве для любой конечной системы замкнутых множеств* $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$, $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = F$, *найдутся открытые множества* $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ *такие, что*

$$H_i \supset F_i - F \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{n} H_i = 0.$$

Доказательство. Для $n = 2$ это следует из леммы 2. Допустим, что лемма доказана для $n - 1$ множеств. Пусть дана система замкнутых множеств

$$F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{n-1}, F_n, \quad \bigcap_{i=1}^{n} F_i = F.$$

Возьмем множества $E = \bigcap_{i=1}^{n-1} F_i$ и F_n. Для E и F_n найдутся открытые множества U и H_n такие, что

$$U \supset E - F, \quad H_n \supset F_n - F \text{ и } H_n \cdot U = 0.$$

Для множеств $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{n-1}$ и $E = \bigcap_{i=1}^{n-1} F_i$, по допущению, существуют открытые множества $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{n-1}$ такие, что

$$H_i \supset F_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1) \text{ и } \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i = 0.$$

Рассмотрим множества

$$H_1 + U, \quad H_2 + U, \ldots, H_{n-1} + U, \; H_n.$$

Они удовлетворяют условиям:

$$H_1 + U \supset (F_1 - E) + (E - F) = F_1 - F,$$

$$H_2 + U \supset (F_2 - E) + (E - F) = F_2 - F,$$

. . . .

$$H_{n-1} + U \supset (F_{n-1} - E) + (E - F) = F_{n-1} - F,$$

$$H_n \supset F_n - F.$$

Так как $\bigcap_{i=1}^{n-1} H_i = 0$, то имеем:

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} (H_i + U) = U \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{n-1} (H_i + U) \cdot H_n = U \cdot H_n = 0.$$

Лемма 3 доказана.

Примечание. Аналогичными рассуждениями можно доказать теорему Рузевича [см. ([3])]:

Пусть A и B — классы множеств, инвариантные относительно конечной суммы и пересечения. Пусть для любых двух множеств $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ из A и $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1\cdot\mathscr{E}_2$ существуют множества E_1, E_2 из B такие, что

$$E_1 \supset \mathscr{E}_1-\mathscr{E}, \quad E_2 \supset \mathscr{E}_2-\mathscr{E} \text{ и } E_1\cdot E_2=0.$$

Тогда для любой конечной системы множеств $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \mathscr{E}_3, \ldots, \mathscr{E}_n$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathscr{E}_i=\mathscr{E}$, из A существуют множества $E_1, E_2, \ldots, E_n$ из B такие, что

$$E_i \supset \mathscr{E}_i-\mathscr{E} \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n) \text{ и } \bigcap_{i=1}^{n} E_i=0.$$

Из лемм 2 и 3 следует

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы пространство было вполне нормальным, необходимо и достаточно выполнение второй теоремы о кратной отделимости для любой конечной системы замкнутых множеств, другими словами: для любой конечной системы замкнутых множеств*

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ \ldots,\ F_n, \quad \bigcap_{i=1}^{n} F_i=F,$$

найдутся открытые множества H_1, H_2, ..., H_n такие, что

$$H_i \supset F_i-F \text{ и } \bigcap_{i=1}^{n} H_i=0.$$

Необходимость следует из леммы 3, достаточность — из леммы 2.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы пространство было совершенно нормальным, необходимо и достаточно, чтобы для любой счетной убывающей системы замкнутых множеств*

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n=F,$$

существовала система открытых множеств H_1 $H_2, \ldots, H_n, \ldots$ таких, что

$$H_n \supset F_n \quad (n=1,2,3,\ldots) \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n=F.$$

Необходимость. Пусть дана последовательность замкнутых множеств

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots.$$

Так как каждое замкнутое множество есть G_δ, то для каждого F_n существует последовательность открытых множеств

$$G_1^n \supset G_2^n \supset G_3^n \supset \ldots \supset G_i^n \supset \ldots \text{ и } \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i^n=F_n.$$

Имеем таблицу:

$$G_1^1 \supset G_2^1 \supset \ldots \supset G_i^1 \supset \ldots \text{ и } \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i^1=F_1,$$

$$G_1^2 \supset G_2^2 \supset \ldots \supset G_i^2 \supset \ldots \text{ и } \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i^2=F_2,$$

. . . .

$$G_1^n \supset G_2^n \supset \ldots \supset G_i^n \supset \ldots \text{ и } \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i^n=F_n.$$

. . . .

Можно предположить, что

$$G_i^n \supset G_i^{n+1} \quad (i, \ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

т. е. каждый столбец есть последовательность вложенных множеств. Тогда диагональная последовательность

$$G_1^1 \supset G_2^2 \supset \ldots \supset G_n^n \supset \ldots$$

дает:

$$G_n^n \supset F_n \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = F.$$

Докажем последнее равенство. Если

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

то

$$x \in F_n \subset G_n^n$$

и, следовательно,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^n.$$

Если

$$x \,\overline{\in}\, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

то найдется F_k такое, что $x \,\overline{\in}\, F_k$, а тогда найдется $l > k$ такое, что $G_k^l \,\overline{\ni}\, x$.

Множество $G_l^l \subset G_l^k$ не содержит точки x и, следовательно,

$$x \,\overline{\in}\, \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^n.$$

Таким образом,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^n.$$

Достаточность. Применяя теорему для последовательности $F, F, F, \ldots, F, \ldots$, убеждаемся в том, что замкнутое множество есть G_δ.

ЛЕММА 4. *Пусть для любой вложенной системы замкнутых множеств нормального пространства*

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E,$$

существуют открытые множества

$$h_1 \supset h_2 \supset \ldots \supset h_i \supset \ldots$$

такие, что

$$h_i \supset E_i - E \text{ и } \bigcap_{i=1}^{\infty} h_i = 0.$$

Тогда для произвольной системы замкнутых множеств

$$F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = F,$$

существуют открытые множества $H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots$ *такие, что*

$$H_i \supset F_i - F \quad (i = 1, 2, 3, \ldots) \text{ и } \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i = 0.$$

Доказательство. Дана последовательность замкнутых множеств

$$F_1, F_2, F_3, \ldots, F_i, \ldots, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = F.$$

Образуем вспомогательную последовательность замкнутых множеств

$$E_1 = E_2 = F_1, \quad E_3 = F_1 \cdot F_2, \ldots, \quad E_{i+1} = F_1 \cdot F_2 \ldots F_i, \ldots .$$

Очевидно,

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_i \supset \ldots \text{ и } \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = F.$$

По условию леммы, существуют открытые множества $h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots$ такие, что

$$h_i \supset E_i - F \text{ и } \bigcap_{i=1}^{\infty} h_i = 0.$$

В силу нормальности пространства существуют открытые множества H_1' и H_2' такие, что

$$H_1' \supset F_1 - E_3, \quad H_2' \supset F_2 - E_3 \text{ и } H_1' \cdot H_2' = 0.$$

Далее, существуют открытые множества U_3 и H_3' такие, что

$$U_3 \supset E_3 - E_4, \quad H_3' \supset F_3 - E_4 \text{ и } U_3 \cdot H_3' = 0.$$

Но тогда открытые множества

$$H_1' + U_2 + U_3, \quad H_2' + U_3, \quad H_3'$$

(для симметрии записи мы ввели пустое множество U_2) не имеют общих точек, потому что из $H_1' \cdot H_2' = 0$ следует:

$$(H_1' + U_2 + U_3) \cdot (H_2' + U_3) \cdot H_3' = U_3 \cdot H_3' = 0.$$

Очевидно, что

$$H_1' + U_2 + U_3 \supset F_1 - F_4, \quad H_2' + U_3 \supset F_2 - E_4, \quad H_3' \supset F_3 - E_4.$$

Допустим, что построены открытые множества:

$$U_2, U_3, \ldots, U_i, \quad H_1', H_2', \ldots, H_i'.$$

Введем обозначения:

$$U_2 + U_3 + \cdots + U_i = S_2^{i+1},$$

$$U_j + U_{j+1} + \cdots + U_i = S_j^{i+1}, \quad \sum_{i=j}^{\infty} U_i = S_j^{\omega}.$$

Допустим, что

$$\begin{aligned} &H_1' + U_2 + U_3 + \cdots + U_i = H_1' + S_2^{i+1} \supset F_1 - E_{i+1}, \\ &H_2' + U_3 + \cdots + U_i = H_2' + S_3^{i+1} \supset F_2 - E_{i+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &H_{i-1}' + \cdots\cdots + U_i = H_{i-1}' + S_i^{i+1} \supset F_{i-1} - E_{i+1}, \\ &H_i' \supset F_i - E_{i+1} \end{aligned}$$

и

$$\bigcap_{j=1}^{i-1} (H_j' + S_{j+1}^{i+1}) \cdot H_i' = 0. \tag{a}$$

Построим открытые множества U_{i+1}, H_{i+1}'. В силу нормальности пространства, существуют открытые множества U_{i+1}, H_{i+1}' такие, что

$$U_{i+1} \supset E_{i+1} - E_{i+2}, \quad H_{i+1}' \supset E - E_{i+2} \text{ и } U_{i+1} \cdot H_{i+1}' = 0.$$

Но тогда открытые множества

$$\begin{aligned} &H_1' + U_2 + U_3 + \cdots + U_i + U_{i+1} = H_1' + S_2^{i+2} \supset F_1 - E_{i+2}, \\ &H_2' + U_3 + \cdots + U_i + U_{i+1} = H_2' + S_3^{i+2} \supset F_2 - E_{i+2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &H_{i-1}' + \cdots\cdots + U_i + U_{i+1} = H_{i-1}' + S_i^{i+2} \supset F_{i-1} - E_{i+2}, \\ &H_i' + \cdots\cdots + U_{i+1} = H_i' + S_{i+1}^{i+2} \supset F_i - E_{i+2} \end{aligned}$$

и

$$H_{i+1}' \supset F_{i+1} - E_{i+2}$$

не имеют общих точек. В самом деле,

$$\bigcap_{j=1}^{i} (H_j' + S_{j+1}^{i+2}) \cdot H_{i+1}' = \bigcap_{j=1}^{i-1} (H_j' + S_{j+1}^{i+1} + U_{i+1}) \cdot (H_i' + U_{i+1}) \cdot H_{i+1}' =$$

$$= \left[\bigcap_{j=1}^{i-1} (H_j' + S_{j+1}^{i+1}) + U_{i+1}\right] (H_i' + U_{i+1}) \cdot H_{i+1}' = \bigcap_{j=1}^{i-1} (H_j' + S_{j+1}^{i+1}) \cdot H_i' \cdot H_{i+1}' +$$

$$+ \bigcap_{j=1}^{i-1} (H_j' + S_{j+1}^{i+1}) \cdot U_{i+1} \cdot H_{i+1}' + U_{i+1} \cdot H_i' \cdot H_{i+1}' + U_{i+1} \cdot H_{i+1}'.$$

Из

$$\bigcap_{j=1}^{i-1} (H_j' + S_{j+1}^{i+1}) \cdot H_i' = 0 \text{ и } U_{i+1} \cdot H_{i+1}' = 0$$

следует:

$$\bigcap_{j=1}^{i} (H_j' + S_{j+1}^{i+2}) \cdot H_{i+1}' = 0.$$

Продолжая этот процесс по индукции, получаем открытые множества:

$$\begin{aligned} &\widetilde{H}_1 = H_1' + U_2 + U_3 + \cdots + U_i + \cdots = H_1' + S_2^{\omega} \supset F_1 - F, \\ &\widetilde{H}_2 = H_2' + U_3 + \cdots + U_i + \cdots = H_2' + S_3^{\omega} \supset F_2 - F, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\widetilde{H}_{i-1} = H_{i-1}' + \cdots + U_i + \cdots = H_{i-1}' + S_i^{\omega} \supset F_{i-1} - F. \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

При этом мы предполагаем, что

$$S_i^{\omega} \subset h_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Очевидно, что

$$S_2^{\omega} \supset S_3^{\omega} \supset \ldots \supset S_i^{\omega} \supset \ldots \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=2}^{\infty} S_i^{\omega} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} h_i = F.$$

Теперь докажем включение

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \tilde{H}_i \subseteq \bigcap_{i=2}^{\infty} S_i^{\omega}.$$

Если

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \tilde{H}_i \quad \text{и} \quad x \overline{\in} \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i^{\omega},$$

то найдется такое число q, что

$$x \overline{\in} S_q^{\omega} \text{ и } x \overline{\in} S_i^{\omega} \text{ при } i > q.$$

Кроме того,

$$x \in \bigcap_{i \geqslant q-1} H_i' \quad \text{и} \quad x \in \bigcap_{i=1}^{q-2} (H_i' + S_{i+1}^{\omega} - S_{i+1}^{q}) = \bigcap_{i=1}^{q-2} (H_i' + S_{i+1}^{q}).$$

Отсюда следует, что

$$x \in \bigcap_{i \geqslant q-1} H_i' \bigcap_{i=1}^{q-2} (H_i' + S_{i+1}^{q}) \subset H_{q-1}' \bigcap_{i=1}^{q-2} (H_i' + S_{i+1}^{q}) = 0$$

(равенство (a)).

Следовательно,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \tilde{H}_i \subset \bigcap_{i=2}^{\infty} S_i^{\omega} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} h_i = F.$$

Полагая $H_n = \tilde{H}_n - F$, получаем требуемое утверждение.

Из леммы 4 и теоремы 3 следует

ТЕОРЕМА 4. *В совершенно нормальном пространстве имеет место теорема кратной отделимости для счетной системы замкнутых множеств, т. е. для произвольной счетной системы замкнутых множеств* $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n, \ldots, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = F$, *существуют открытые множества* $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ *такие, что*

$$H_n \supset F_n - F \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

ЛЕММА 5. *Пусть в совершенно нормальном пространстве* R *дана несчетная последовательность замкнутых множеств*

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots \supset F_{\omega} \supset \ldots \supset F_{\alpha} \supset \ldots \tag{1}$$

таких, что для каждого числа второго рода β *имеем:*

$$\bigcap_{\alpha < \beta} F_{\alpha} = F_{\beta}.$$

Тогда существуют открытые множества $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, \ldots, H_{\alpha}, \ldots$

такие, что $H_\alpha \supset F_\alpha$, *и для любого числа второго рода* β *имеем:*

$$\bigcap_{\alpha<\beta} H_\alpha = F_\beta.$$

Доказательство. Существование открытых множеств

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots, \quad H_n \supset F_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = F_\omega$$

следует из теоремы 3. Допустим, что существуют открытые множества

$$H_1,\ H_2,\ H_3,\ \ldots, H_n, \ldots, H_\alpha, \ldots, \quad \alpha<\beta,$$

где β — число второго рода, удовлетворяющие условиям леммы. Возьмем следующее за β число второго рода β'. Тогда имеем:

$$F_\beta,\ F_{\beta+1}, \ldots, F_{\beta+n}, \ldots \text{ и } \bigcap_{n=0}^{\infty} F_{\beta+n} = F_{\beta'}.$$

По теореме 3, существуют открытые множества $H_\beta, H_{\beta+1}, \ldots, H_{\beta+n}, \ldots$ такие, что

$$H_{\beta+n} \supset F_{\beta+n} \text{ и } \bigcap_{n=0}^{\infty} H_{\beta+n} = F_{\beta'}.$$

Продолжая этот процесс по трансфинитной индукции по числам второго рода, получаем открытые множества

$$H_1, H_3, H_3, \ldots, H_\omega, \ldots, H_\alpha, \ldots$$

такие, что $H_\alpha \supset F_\alpha$, и для любого числа второго рода β имеем:

$$\bigcap_{\alpha<\beta} H_\alpha = F_\beta.$$

Если в (1) имеется последнее множество, индекс которого есть число первого рода $\alpha+n$, то в качестве $H_{\alpha+n}$ берем все пространство R.

ЛЕММА 6. *Пусть в совершенно нормальном пространстве дана последовательность замкнутых множеств*

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n,\ \ldots,\ F_\omega,\ \ldots,\ F_\alpha,\ \ldots, \quad \bigcap_{\alpha} F_\alpha = F. \tag{2}$$

Тогда существуют открытые множества H_1, H_2, H_3, $\ldots$, H_n, $\ldots$ $\ldots$, H_ω, $\ldots$, H_α, $\ldots$ *такие, что*

$$H_\alpha \supset F_\alpha - F, \quad \bigcap_{\alpha} H_\alpha = 0.$$

Доказательство. Лемма доказывается так же, как и лемма 4, но индукция проводится по трансфинитным числам. Возьмем вспомогательную последовательность замкнутых множеств

$$E_1 = E_2 = F_1,\ E_3 = F_1 \cdot F_2,\ \ldots,\ E_i = F_1 \cdot F_2 \ldots F_{i-1},\ \ldots, E_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} F_\alpha,\ \ldots.$$

Очевидно, последовательность

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots E_i \supset \ldots \supset E_\alpha \supset \ldots$$

удовлетворяет условиям леммы 5. Следовательно, существуют открытые множества $h_1, h_2, \ldots, h_\omega, \ldots, h_\alpha, \ldots$ такие, что $h_\alpha \supset E_\alpha$ и для любого

числа второго рода β

$$\bigcap_{\alpha<\beta} h_\alpha = E_\beta.$$

Мы имеем:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = F_\omega.$$

Повторяя рассуждения доказательства леммы 4, получаем открытые множества:

$$\begin{array}{l}
H_1' + U_2 + U_3 + \cdots + U_i + U_{i+1} + \cdots = H_1' + S_2^\omega \supset F_1 - E_\omega, \\
H_2' + U_3 + \cdots + U_i + U_{i+1} + \cdots = H_2' + S_3^\omega \supset F_2 - E_\omega, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
H_{i-1}' + \cdots\cdots + U_i + U_{i+1} + \cdots = H_{i+1}' + S_i^\omega \supset F_{i-1} - E_\omega \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

такие, что

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (H_i' + S_{i+1}^\omega) = 0.$$

Допустим, что построены открытые множества

$$U_1, U_2, \ldots, U_i, \ldots, U_\alpha, \ldots, \quad \alpha < \beta,$$

$$H_1', H_2', \ldots, H_i', \ldots, H_\alpha', \ldots, \quad \alpha < \beta,$$

такие, что

$$U_\alpha \subset h_\alpha,$$

и

$$\begin{array}{l}
H_1' + U_2 + \cdots\cdots + U_\alpha + \cdots = H_1' + S_2^\beta \supset F_1 - E_\beta, \\
H_2' + U_3 + \cdots + U_\alpha + \cdots = H_2' + S_3^\beta \supset F_2 - E_\beta, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
H_\alpha' + \cdots\cdots + U_{\alpha+1} + \cdots = H_\alpha' + S_{\alpha+1}^\beta \supset F_\alpha - E_\beta \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

такие, что

$$\bigcap_{\alpha<\beta} (H_\alpha' + S_{\alpha+1}^\beta) = 0. \qquad \text{(b)}$$

Построим множества U_β, H_β'. При этом возможны два случая:

Случай I. β — число второго рода. Для множеств E_β, F_β существуют открытые множества U_β, H_β' такие, что

$$U_\beta \supset E_\beta - E_{\beta+1}, \quad H_\beta' \supset F_\beta - E_{\beta+1}, \quad H_\beta' \cdot U_\beta = 0.$$

Тогда

$$\begin{array}{l}
H_1' + S_2^\beta + U_\beta = H_1' + S_2^{\beta+1} \supset (F_1 - E_\beta) + (E_\beta - E_{\beta+1}) \supset F_1 - E_{\beta+1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
H_\alpha' + S_{\alpha+1}^\beta + U_\beta = H_\alpha' + S_{\alpha+1}^{\beta+1} \supset (F_\alpha - E_\beta) + (E_\beta - E_{\beta+1}) \supset F_\alpha - E_{\beta+1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
H_\beta' \supset F_\beta - E_{\beta+1}
\end{array}$$

и

$$\bigcap_{\alpha<\beta}(H'_\alpha + S^{\beta+1}_{\alpha+1})\cdot H'_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta}(H'_\alpha + S^\beta_{\alpha+1} + U_\beta)\cdot H'_\beta = U_\beta \cdot H'_\beta = 0.$$

Случай II. β — число первого рода. Для множеств E_β, F_β существуют открытые множества U_β, H_β такие, что

$$U_\beta \supset E_\beta - E_{\beta+1}, \quad H_\beta \supset F_\beta - E_{\beta+1}, \quad U_\beta \cdot H_\beta = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &H'_1 + S^\beta_2 + U_\beta \supset F_1 - E_{\beta+1},\\ &H'_2 + S^\beta_3 + U_\beta \supset F_2 - E_{\beta+1},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &H'_{\beta-1} + U_\beta \qquad \supset F_{\beta-1} - E_{\beta+1},\\ &H'_\beta \supset F_\beta - E_{\beta+1} \end{aligned}$$

и

$$\bigcap_{\alpha\leqslant\beta-1}(H'_\alpha + S^\beta_{\alpha+1} + U_\beta)\cdot H'_\beta = U_\beta\cdot H'_\beta = 0.$$

Продолжая этот процесс, получаем открытые множества

$$\begin{aligned} &H_1 = H'_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_\alpha + \dots = H'_1 + S_2 \supset F_1 - F,\\ &H_2 = H'_2 + \qquad U_3 + \dots + U_\alpha + \dots = H'_2 + S_3 \supset F_2 - F,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &H_\alpha = H'_\alpha + \dots\dots\dots + U_{\alpha+1} + \dots = H'_\alpha + S_{\alpha+1} \supset F_\alpha - F,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

При этом мы предполагаем, что

$$S_\alpha = U_\alpha + U_{\alpha+1} + \dots \quad \text{и} \quad S_\alpha \subset h_\alpha$$

при всех α. Очевидно, $S_2 \supset S_3 \supset \dots \supset S_\alpha \supset \dots$ и так как $S_\alpha \subset h_\alpha$, то имеем:

$$\bigcap_\alpha S_\alpha \subset \bigcap_\alpha h_\alpha.$$

Теперь докажем включение

$$\bigcap_\alpha H_\alpha \subset \bigcap_\alpha S_\alpha.$$

Если

$$x \in \bigcap_\alpha H_\alpha \quad \text{и} \quad x \,\bar{\in}\, \bigcap_\alpha S_\alpha,$$

то найдется такое $\beta+1$, что

$$x \,\bar{\in} \bigcap_{\alpha\geqslant\beta+1} S_\alpha.$$

Но тогда

$$x \in \bigcap_{\alpha\geqslant\beta} H'_\alpha \quad \text{и} \quad x \in \bigcap_{\alpha<\beta}(H'_\alpha + S^\beta_{\alpha+1}),$$

т. е.

$$x \in \bigcap_{\alpha\geqslant\beta} H'_\alpha \cdot \bigcap_{\alpha<\beta}(H'_\alpha + S^\beta_{\alpha+1}) \subset H'_\beta \bigcap_{\alpha<\beta}(H'_\alpha + S^\beta_{\alpha+1}) = 0$$

(в силу равенства (b)). Следовательно,

$$\bigcap_\alpha H_\alpha \subset \bigcap_\alpha S_\alpha \subset \bigcap_\alpha h_\alpha.$$

Предположим, что все $H_\alpha \cdot F = 0$ и в последовательности (2) нет последнего множества. Тогда

$$\bigcap_\alpha h_\alpha = F \quad \text{и} \quad \bigcap_\alpha H_\alpha \subset \bigcap_\alpha h_\alpha = F;$$

но $H_\alpha \cdot F = 0$, следовательно,

$$\bigcap_\alpha H_\alpha = 0 \quad \text{и} \quad H_\alpha \supset F_\alpha - F$$

для всех α, что доказывает лемму.

Из леммы 6 следует вторая теорема о кратной отделимости:

Какова бы ни была система замкнутых множеств совершенно нормального пространства

$$F_1, F_2, \ldots, F_\alpha, \ldots, \quad \bigcap_\alpha F_\alpha = F,$$

существуют открытые множества $H_1, H_2, \ldots, H_\alpha, \ldots$ *такие, что*

$$H_\alpha \supset F_\alpha - F, \quad \bigcap_\alpha H_\alpha = 0.$$

Из второй теоремы следует первая теорема о кратной отделимости:

Какова бы ни была система замкнутых множеств

$$F_1, F_2, \ldots, F_\alpha, \ldots, \quad \bigcap_\alpha H_\alpha = 0,$$

существуют открытые множества $H_1, H_2, \ldots, H_\alpha, \ldots$ *такие, что*

$$H_\alpha \supset F_\alpha, \quad \bigcap_\alpha H_\alpha' = 0.$$

Поступило
18.IX.1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Новиков П. С., О счетно-кратной отделимости B-аналитических множеств, Доклады Ак. Наук СССР, т. III, № 3 (1934), 145—148.

[2] Новиков П. С., Обобщение второго принципа отделимости, Доклады Ак. Наук СССР, т. IV, № 1—2 (1934), 8—11.

[3] Ruziewicz S., Sur la séparabilité multiple des ensembles. Fund. Math., 24 (1935), 199—205.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 63—76

А. А. ЗЫКОВ

ПРОБЛЕМА СПЕКТРА В РАСШИРЕННОМ ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе ставится вопрос о выработке понятия спектра, полностью характеризующего содержательный смысл формулы расширенного исчисления предикатов, не содержащей свободных переменных, и показывается, что этот вопрос достаточно решить для формул весьма частного вида.

Введение

Мы будем здесь под расширенным исчислением предикатов понимать исчисление, названное Гильбертом и Аккерманом исчислением предикатов второй ступени *. Будем рассматривать формулы вида

$$\langle\{P\}, \{x\}\rangle \mathfrak{A}(\{P\}, \{Q\}; \{x\}, \{y\}), \qquad (1)$$

где $\{P\}$ означает совокупность связанных переменных предикатов, $\{Q\}$ — совокупность свободных предикатов, $\{x\}$ — совокупность связанных предметных переменных и $\{y\}$ — совокупность свободных предметных переменных, а $\langle\{P\}, \{x\}\rangle$ означает приставку, в которой кванторы обоих типов и связывающие оба вида переменных расположены в произвольном порядке **.

Формулы вида (1), не содержащие свободных переменных (как предметных, так и предикатных), будем называть *количественными*, при наличии же свободных переменных будем говорить *о качественных* формулах. При задании конкретной предметной области количественная формула превращается в высказывание, истинность или ложность которого зависит исключительно от мощности области; при тех же условиях истинность качественной формулы зависит, кроме мощности, еще от выбора индивидуальных предметов и предикатов вместо свободных переменных; иначе говоря, истинность качественной формулы зависит не только от количественной характеристики области, но и от тех качественных различий между ее предметами, которые выражаются в выборе некоторых «привилегированных» элементов вместо свободных предметных

* См. (¹), гл. IV, § 1.

** О возможности приведения формул расширенного исчисления (1) к предваренной нормальной форме говорится там же [см. (¹), гл. IV, § 1].

переменных и в различном отношении элементов друг к другу, выражающемся в конкретном задании индивидуальных предикатов, подставляемых на место свободных переменных. Это обстоятельство оправдывает нашу терминологию. Притом количественные формулы оказываются частным случаем качественных *.

Пусть A и B — две качественные формулы, Π — совокупность всех их свободных переменных. Будем говорить, что A и B *равнозначны*, если они обладают следующим свойством: какую бы мы ни задали предметную сбласть и как бы ни выбрали на ней индивидуальные предметы и предикаты вместо Π, обе формулы превращаются либо одновременно в истинные, либо одновременно в ложные высказывания. В частности, равнозначность двух количественных формул означает, что какое бы конкретное кардинальное число τ ни было задано, обе формулы одновременно либо истинны, либо ложны на области мощности τ.

Возникает вопрос об определении для заданной количественной формулы A всех тех кардинальных чисел τ, для которых формула A истинна на областях мощности τ. Для формул узкого исчисления предикатов с тождеством (которые можно рассматривать как видоизмененный частный случай формул расширенного исчисления) указанный вопрос может быть точно сформулирован в виде так называемой *проблемы спектра*. Именно, назовем *спектром* такой формулы совокупность T кардинальных чисел τ, не превосходящих $\aleph_0$, обладающую свойством: формула истинна на области M тогда и только тогда, когда мощность M входит в T. Проблема будет состоять в отыскании способов определения по данной формуле ее спектра. Для каждой отдельно взятой формулы принципиально существует свой способ нахождения ее спектра, но в то же время невозможен общий алгоритм (в современном математическом определении этого термина), позволяющий вычислять спектр любой формулы; последнее следует из невозможности алгоритма для проблемы разрешимости [см. ([1]), гл. III, § 12] или для проблемы разрешимости на конечных классах [см. ([3])]. В свете этого представляют интерес вопросы о сведéнии проблемы спектра к другим алгоритмически неразрешимым проблемам, о причинах неразрешимости, о возможности или невозможности расширения современного понятия алгоритма.

Проблема спектра в общем случае расширенного исчисления значительно сложнее; более того, пока ее не удалось даже точно поставить в таком же общем виде, как для случая исчисления предикатов с тождеством: дело в том, что в последнем случае справедлива теорема Лёвенгейма, согласно которой формула, выполнимая в некоторой бесконечной области предметов, выполнима уже в счетной области, и благодаря этой теореме понятие спектра формулы и проблема его нахождения полностью охватывают вопрос об определении областей выполнимости формул. Никакого аналога теоремы Лёвенгейма в общем случае не най-

---

* В этом последнем утверждении нет ничего странного, ибо количество предметов области является отражением некоторого их качества, именно того, которое заставило поместить каждый из предметов в область, содержащую определенное количество ему подобных.

дено, да и вряд ли это вообще возможно (можно, например, построить формулы, истинные только на областях, мощности которых являются предельными числами, соответственно регулярными или недостижимыми, и т. д.). Рассуждать строго о множестве всех кардинальных чисел некоторого вида, не ограничивая его сверху, нельзя, ввиду появления при этом теоретико-множественных антиномий. Искусственное же ограничение сверху (назвать *τ-спектром* формулы A совокупность всех таких кардинальных чисел, не превышающих τ, что A истинна на областях с этими мощностями) сужает рассматриваемый вопрос, который представляет большой интерес именно во всей своей полноте, в связи с трудностями теории множеств.

Выработке общего понятия спектра и общей постановки проблемы спектра должно предшествовать установление ряда частных результатов. Некоторые из этих результатов изложены в настоящей работе. Например, теорема III (§ 3) показывает, что при поисках разумного определения спектра количественных формул расширенного исчисления предикатов достаточно рассматривать лишь формулы вида:

$$E\Psi(Q)\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}(\Psi, Q; \{x\}),$$

где Ψ — двуместный, а Q — одноместный предикаты.

§ 2 (о проблеме исключения) носит чисто обзорный характер и включен в работу лишь для полноты картины.

§ 1. Некоторые приведения формул в смысле равнозначности

Как известно, для расширенного исчисления предикатов не существует конечной системы аксиом и правил вывода, при помощи которых доказывались бы все формулы исчисления, всегда истинные на любой области [см. ([5])]. Для того или иного круга математических рассуждений приходится выбирать те или иные формулы, содержательная истинность которых очевидна, за аксиомы. В дальнейшем при доказательстве теорем мы будем пользоваться такого рода аксиомами, не стремясь свести их число к минимуму; полный обзор всех употребляемых аксиом и правил не входит в нашу задачу, но они примерно отвечают системе, описанной у Гильберта и Аккермана [см. ([1]), гл. IV, § 1].

ТЕОРЕМА I. *Для любой качественной формулы*(1) *можно построить равнозначную ей, но имеющую специальный вид: в приставке каждый квантор по предикату предшествует всем кванторам по предметам.*

Доказательство. Тот очевидный факт, что при замене частей приставки, имеющих вид $(x)(P)$, на $(P)(x)$ (и обратно) и при аналогичных перестановках кванторов существования по предмету и по предикату вся формула переходит в равнозначную, следует принять за аксиому. Далее, если в приставке имеется часть $(x)EP$, т. е. формула имеет вид:

$$\langle\alpha\rangle(x)EP\langle\beta\rangle\mathfrak{A}(P, \ldots; x, \ldots),$$

где $\langle\alpha\rangle$ и $\langle\beta\rangle$ означают части приставки, имеющие произвольное строение, а $P(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ есть p-местный предикат $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, то, вводя вместо P новый, $(p+1)$-местный предикат $P_1(t_1, t_2, \ldots, t_p, x)$, мы можем

составить формулу

$$\langle\alpha\rangle EP_1(x)\langle\beta\rangle\mathfrak{A}(P_1, \ldots;\ x, \ldots),$$

в подкванторной части которой предикат $P(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ заменен везде предикатом $P_1(t_1, t_2, \ldots, t_p, x)$ с соответствующими первыми p аргументами и с одним и тем же последним аргументом x. Полученная формула равнозначна исходной; этот очевидный факт тоже следует считать аксиомой [см. ([1]), гл. IV, § 1]. Наконец, если в приставке имеется часть $Ex(P)$, т. е. формула имеет вид

$$\langle\alpha\rangle Ex(P)\langle\beta\rangle\mathfrak{A}(P, \ldots;\ x, \ldots), \tag{2}$$

то составим новую формулу:

$$\langle\alpha\rangle ES(P)\,Ex\langle\beta\rangle\{\mathfrak{A}(P, \ldots;\ x, \ldots)\ \&\ S(x)\ \&$$
$$\&\ (z)(t)\{S(z)\ \&\ S(t)\to(A)[A(z)\to A(t)]\}\}, \tag{3}$$

обладающую в предваренной нормальной форме приставкой

$$\langle\alpha\rangle ES(P)(A)\,Ex\langle\beta\rangle(z)(t);$$

в этой приставке число кванторов общности по предикатам, стоящих после кванторов существования по предметам, наверное меньше, чем в исходной. В то же время обе формулы равнозначны. В самом деле, из истинности исходной формулы (2) на некоторой непустой области M вытекает истинность формулы (3) на той же области, в силу того, что формула

$$\langle\alpha\rangle Ex(P)\langle\beta\rangle\mathfrak{A}\to\langle\alpha\rangle(P)\,Ex\langle\beta\rangle\mathfrak{A}$$

всегда истинна, а формула

$$ES\,Ex\{S(x)\ \&\ (z)(t)\{S(z)\ \&\ S(t)\to(A)[A(z)\to A(t)]\}\}$$

истинна на любой непустой области, так как достаточно выбрать из области произвольный предмет a и за $S(y)$ взять предикат $y=a$. Обратно, пусть формула (3) истинна на некоторой области M. Пусть все переменные предметы и предикаты, связываемые частью $\langle\alpha\rangle$, зафиксированы (отметим это тем, что вместо $\mathfrak{A}$ будем писать $\mathfrak{A}_0$) и притом так, чтобы высказывание

$$ES(P)\,Ex\langle\beta\rangle\{\mathfrak{A}_0(P, \ldots;\ x, \ldots)\ \&\ S(x)\ \&$$
$$\&\ (z)(t)\{S(z)\ \&\ S(t)\to(A)[A(z)\to A(t)]\}\} \tag{4}$$

было истинным на M. Истинность (4) означает существование такого S_0, что для любого P_0 найдется x_0, при котором истинно высказывание

$$\langle\beta\rangle\{\mathfrak{A}_0(P_0, \ldots;\ x_0, \ldots)\ \&\ S_0(x_0)\ \&$$
$$\&\ (z)(t)\{S_0(z)\ \&\ S_0(t)\to(A)[A(z)\to A(t)]\}\}. \tag{5}$$

Покажем, что при тех же S_0 и x_0 истинно также высказывание:

$$\langle\beta\rangle\mathfrak{A}_0(P, \ldots;\ x_0, \ldots)$$

при любом P.

Действительно, пусть x — один из предметов, отвечающих предикату P, т. е. такой, для которого истинно (на M) высказывание

$$\langle\beta\rangle \{\mathfrak{A}_0(P, \ldots;\ x, \ldots) \,\&\, S_0(x) \,\&$$
$$\& (z)(t)\{S_0(z) \,\&\, S_0(t) \to (A)[A(z) \to A(t)]\}\}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что на M истинны высказывания

$$S_0(x_0),\ S_0(x),\ \langle\beta\rangle \mathfrak{A}_0(P, \ldots;\ x, \ldots)$$

и

$$(z)(t)\{S_0(z) \,\&\, S_0(t) \to (A)[A(z) \to A(t)]\},$$

откуда путем подстановки получаем:

$$(A)[A(x) \to A(x_0)].$$

Опуская квантор общности и беря за A формулу

$$\langle\beta\rangle \mathfrak{A}_0(P, \ldots;\ x, \ldots),$$

получаем, что на M истинна

$$\langle\beta\rangle \mathfrak{A}_0(P, \ldots;\ x_0, \ldots),$$

что и требовалось.

В итоге оказывается, что если в приставке исходной формулы (1) хотя бы один квантор по предикату стоит после некоторого квантора по предмету, то можно так преобразовать формулу (1) в равнозначную ей, что число предикатных кванторов, стоящих после предметных, уменьшится на единицу. После применения указанных процессов нужное число раз приставка формулы примет желаемый вид. Теорема доказана.

Итак, мы можем рассматривать лишь формулы вида

$$\langle\{P\}\rangle\langle\{x\}\rangle \mathfrak{A}(\{P\}, \{Q\}; \{x\}, \{y\}). \qquad (7)$$

Предикатная часть $\langle\{P\}\rangle$ приставки в общем случае состоит из чередующихся последовательностей кванторов одинакового типа. Каждую такую последовательность мы назовем *ступенью* приставки, число кванторов ступени назовем ее *длиной*. Если часть $\langle\{P\}\rangle$ имеет l ступеней и i-я ступень имеет длину $k_i\ (i = 1, 2, \ldots, l)$, то $\langle\{P\}\rangle$ может иметь один из двух видов (в зависимости от того, квантором какого типа она начинается): *

а) $EP_{11}EP_{12}\ldots EP_{1k_1}(P_{21})(P_{22})\ldots(P_{2k_2})EP_{31}EP_{32}\ldots EP_{3k_3}(P_{41})\ldots$

б) $(P_{11})(P_{12})\ldots(P_{1k_1})EP_{21}EP_{22}\ldots EP_{2k_2}(P_{31})(P_{32})\ldots(P_{3k_3})EP_{41}\ldots$

Мы покажем, что формулу (7) можно перевести в равнозначную ей с тем же числом ступеней l у части $\langle\{P\}\rangle$, но такую, что каждая ступень будет иметь длину 1. Польза такого преобразования именно в том, что число l не возрастает, а в то же время каждая ступень сжимается до минимума. Если же не стремиться сохранить прежнюю величину l, то это преобразование окажется тривиальным и бесполезным: достаточно

* В случае четного l последняя ступень состоит из кванторов противоположного типа по отношению к первой ступени; при l нечетном типы кванторов первой и последней ступеней совпадают.

между соседними кванторами одного типа везде вставить «холостые» кванторы другого типа.* Нам понадобится следующая

ЛЕММА. *Пусть на некоторой предметной области M заданы два индивидуальных предиката* $P^*(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ *и* $Q^*(v_1, v_2, \ldots, v_q)$, *удовлетворяющих условию:*

$$Eu_1Eu_2\ldots Eu_pP^*(u_1, u_2, \ldots, u_p) \sim Ev_1Ev_2\ldots Ev_qQ^*(v_1, v_2, \ldots, v_q). \quad (8)$$

Тогда на M существует такой $(p+q)$-местный индивидуальный предикат

$$S^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q),$$

что при любых $u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q \in M$ *справедливы утверждения:*

$$\left.\begin{aligned} P^*(u_1, u_2, \ldots, u_p) &\sim Ev_1Ev_2\ldots Ev_qS^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q), \\ Q^*(v_1, v_2, \ldots, v_q) &\sim Eu_1Eu_2\ldots Eu_pS^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Аналогично, если P^* и Q^* вместо (8) *подчинены условию*

$$(u_1)(u_2)\ldots(u_p)P^*(u_1, u_2, \ldots, u_p) \sim (v_1)(v_2)\ldots(v_q)Q^*(v_1, v_2, \ldots, v_q), \quad (8')$$

то на M существует такой предикат

$$S^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q),$$

что

$$\left.\begin{aligned} P^*(u_1, u_2, \ldots, u_p) &\sim (v_1)(v_2)\ldots(v_q)S^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots v_q), \\ Q^*(v_1, v_2, \ldots, v_q) &\sim (u_1)(u_2)\ldots(u_p)S^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q). \end{aligned}\right\} \quad (9')$$

Доказательство. Докажем сначала первую часть. Пусть условие (8) выполнено. Может случиться, что предикаты P^* и Q^* всегда ложны на M; в этом случае искомым будет всегда ложный предикат S^*. Если P^* и Q^* не всегда ложны, то пусть $\{u_1^0, u_2^0, \ldots, u_p^0\}$ и $\{v_1^0, v_2^0, \ldots, v_q^0\}$ будут такие комплексы элементов из M, что высказывания $P^*(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_p^0)$ и $Q^*(v_1^0, v_2^0, \ldots, v_q^0)$ истинны. Определим $S^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q)$ на M следующим образом: положим

$$S^*(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_p^0, v_1, v_2, \ldots, v_q) \sim Q^*(v_1, v_2, \ldots, v_q)$$

при всех $v_1, v_2, \ldots, v_q \in M$, а также

$$S^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1^0, v_2^0, \ldots, v_q^0) \sim P^*(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

при всех $u_1, u_2, \ldots, u_p \in M$. Эти определения не противоречат друг другу, так как $P^*(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_p^0)$ и $Q^*(v_1^0, v_2^0, \ldots, v_q^0)$, оба эквивалентные порознь $S^*(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_p^0, v_1^0, v_2^0, \ldots, v_q^0)$, эквивалентны также и между собой в силу выбора комплексов $\{u_1^0, u_2^0, \ldots, u_p^0\}$ и $\{v_1^0, v_2^0, \ldots, v_q^0\}$, возможного ввиду (8). Для всех остальных комбинаций значений аргументов положим S^* ложным. Легко видеть, что так определенный предикат S^* будет искомым. Вторая часть леммы доказывается двойственным рас-

* Заставив эти кванторы связывать, например, новые нульместные предикатные переменные (A), добавляемые к подкванторной части $\mathfrak{A}$ следующим образом: $\mathfrak{A} \,\&\, A \vee \overline{A}$.

суждением (или легко сводится к первой отрицанием обеих частей эквивалентностей (8) и (9)). Лемма доказана.

Заметим, что утверждение, обратное лемме, тривиально: именно, если $S^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q)$ есть $(p+q)$-местный предикат на M и если положить

$$P^*(u_1, u_2, \ldots, u_p) \sim Ev_1Ev_2 \ldots Ev_qS^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q),$$

$$Q^*(v_1, v_2, \ldots, v_q) \sim Eu_1Eu_2 \ldots Eu_pS^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q),$$

то P^* и Q^* будут обладать свойством:

$$Eu_1Eu_2 \ldots Eu_pP^*(u_1, u_2, \ldots, u_p) \sim Ev_1, Ev_2 \ldots Ev_qQ^*(v_1, v_2, \ldots, v_q);$$

а если, по определению, положить

$$P^*(u_1, u_2, \ldots, u_p) \sim (v_1)(v_2) \ldots (v_q)\, S^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q),$$

$$Q_1^*(v_1, v_2, \ldots, v_q) \sim (u_1)(u_2) \ldots (u_p)\, S^*(u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q),$$

то будет:

$$(u_1)\,u_2) \ldots (u_p)\, P_1^*(u_1, u_2, \ldots, u_p) \sim (v_1)(v_2) \ldots (v_q)\, Q_1^*(v_1, v_2, \ldots, v_q).$$

ТЕОРЕМА II. *Для формулы* (7), *предикатная часть приставки которой имеет l ступеней, можно построить равнозначную ей формулу того же вида, предикатная часть приставки которой попрежнему будет иметь l ступеней, но длина каждой ступени будет равна единице.*

Доказательство. Допустим, что в приставке формулы (7) уже имеем $k_1 = k_2 = \ldots = k_i = 1$, но $k_{i+1} > 1$, где $0 \leqslant i < l$. Рассмотрим качественную формулу Ф, получаемую из (7) отбрасыванием первых i предикатных кванторов (т. е. «освобождением» соответствующих переменных предикатов). Возможны два случая:

1) приставка Ф начинается квантором существования, т. е. Ф имеет вид

$$EP_{i+1,1}EP_{i+1,2} \ldots EP_{i+1,k_{i+1}} \langle\{P_{i+2,1}, \ldots\}\rangle \langle\{x\}\rangle \mathfrak{A}(\{P\}; \{x\}, \ldots), \quad (10_1)$$

где часть $\langle\{P_{i+2,1}, \ldots\}\rangle$ предикатной приставки начинается с квантора общности $(P_{i+2,1})$ и имеет $l-i-1$ ступеней;

2) приставка Ф начинается квантором общности, т. е. Ф имеет вид:

$$(P_{i+1,1})(P_{i+1,2}) \ldots (P_{i+1,k_{i+1}}) \langle\{P_{i+2,1}, \ldots\}\rangle \langle\{x\}\rangle \mathfrak{A}(\{P\}; \{x\}, \ldots), \quad (10_2)$$

где $\langle\{P_{i+2,1}, \ldots\}\rangle$ начинается с $EP_{i+2,1}$ и имеет $l-i-1$ ступеней.

Рассмотрим первый случай. Для удобства изменим обозначения и запишем (10_1) в виде:

$$E\{P\}\, EQER \langle\{P', \ldots\}\rangle \langle\{x\}\rangle \mathfrak{A}(\{P\}, Q, R, P', \ldots; \{x\}, \ldots), \quad (11)$$

где комплекс $\{P\}$ содержит $k_{i+1}-2$ предиката, а $E\{P\}$ означает то же, что в (10_1) означало $EP_{i+1,1}EP_{i+1,2} \ldots EP_{i+1,k_{i+1}-2}$; последние два предиката в $(i+1)$-й ступени мы обозначили через Q и R. Пусть Q имеет q мест, а R имеет r мест. Допустим, что при некоторых значениях свободных переменных на некоторой области M формула (7) истинна. Выберем

такие $\{P_0\}$, чтобы была истинна следующая формула:

$$EQER\langle\{P', \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P_0\}), Q, R, P', \ldots; \{x\}, \ldots). * \qquad (12)$$

Предикаты Q^* и R^*, делающие формулу

$$\langle\{P', \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P_0\}, Q^*, R^*, P', \ldots; \{x\}, \ldots)$$

истинной, могут удовлетворять условию (8) леммы. Тогда, на основании леммы, вместе с (12) истинно также

$$ES\langle\{P', \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P_0\},$$

$$Ev_1\ldots Ev_r S(u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r),$$

$$Eu_1\ldots Eu_q S(u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r), P', \ldots; \{x\}, \ldots),$$

где $S(u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r)$ — новый, $(q+r)$-местный предикат, а в подкванторной части $\mathfrak{A}_0$ формулы (12) везде $Q(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ заменен соответственно на

$$Ev_1Ev_2\ldots Ev_r S(u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r),$$

а $R(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ — на

$$Eu_1Eu_2\ldots Eu_q S(u_1, \ldots, u\ , v_1, \ldots, v_r).$$

Если же Q^* и R^* не удовлетворяют условию (8), то это значит, что один и только один из них является всегда ложным предикатом на M. В этом случае истинно одно из двух высказываний:

$$ER\langle\{P', \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P_0\}, \text{Л}, R, P', \ldots; \{x\}, \ldots) **$$

или

$$EQ\langle\{P', \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P_0\}, Q, \text{Л}, P', \ldots; \{x\}, \ldots).$$

Таким образом, из истинности (12) следует истинность формулы

$$ES\langle\{P', \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P_0\}, Ev_1\ldots Ev_rS,$$

$$Eu_1\ldots Eu_qS, P', \ldots; \{x\}, \ldots) \vee ER\langle\{P', \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P_0\}, \text{Л}, R,$$

$$P', \ldots; \{x\}, \ldots) \vee EQ\langle\{P', \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P_0\}, Q, \text{Л}, P' \ldots; \{x\}, \ldots). \qquad (13)$$

Формулу (13) можно преобразовать следующим образом. Сделаем предикаты P и R $(q+r)$-местными (за счет, например, повторений последнего аргумента), сменим обозначения переменных предикатов Q и R на S и поставим квантор ES впереди всей дизъюнкции; мы получим:

$$ES\{\langle\{P', \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P_0\}, Ev_1\ldots Ev_rS, Eu_1\ldots Eu_qS,$$

$$P', \ldots; \{x\}, \ldots) \vee \langle\{P' \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P_0\}, \text{Л}, S, P', \ldots; \{x\}, \ldots) \vee$$

$$\vee\langle\{P', \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P_0\}, S, \text{Л}, P', \ldots; \{x\}, \ldots)\}. \qquad (14)$$

---

* Нолик при $\mathfrak{A}$ означает, как и выше (см. теорему I), фиксацию всех свободных переменных на M.

** Под Л и И понимаются соответственно всегда ложный и всегда истинный предикаты, выраженные при помощи материала, имеющегося в формуле. Например, в данном случае можно в качестве Л использовать $R\,\&\,\overline{R}$, поставив на места аргументов у R любое переменное из $\{x\}$.

Часть последней формулы, стоящую под квантором ES, приводим к предваренной нормальной форме следующим образом. Сначала выносим все кванторы общности из самых левых ступеней частей вида $\langle\{P', \ldots\}\rangle$, переименовывая их в разные в соответствии с тем, в какой дизъюнктивный член они входят, затем выносим (уже без переименования) кванторы существования из следующих ступеней приставок $\langle\{P', \ldots\}\rangle$, потом выносим кванторы общности (опять с переименованием) и т. д. То же самое проделываем затем с предметными кванторами. В итоге формула (14) примет вид:

$$ES\langle\{P', P'', P''', \ldots\}\rangle\langle\{x'\}\rangle$$
$$\{\mathfrak{A}_0(\{P_0\}, Ev_1 \ldots Ev_rS, Eu_1 \ldots Eu_qS, P', \ldots; \{x\}, \ldots) \vee$$
$$\vee\, \mathfrak{A}_0(\{P_0\}, \text{Л}, S, P'', \ldots; \{x'\}, \ldots) \vee \mathfrak{A}_0(\{P_0\}, S, \text{Л}, P''', \ldots; \{x'\}, \ldots)\},$$

причем часть приставки $\langle\{P', P'', P''', \ldots\}\rangle$ будет попрежнему иметь $l - i - 1$ ступеней*.

Итак, мы построили, исходя из формулы (11), формулу вида

$$E\{P\}\,ES\langle\{P', \ldots\}\rangle\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}_0(\{P\}, SP', \ldots, \{x\}, \ldots),$$

предикатная часть приставки которой имеет попрежнему $l - i - 1$ ступеней, но первая ступень (для формулы (7) это k_{i+1}-я ступень) содержит на один квантор меньше. Продолжая этот процесс, мы добьемся в конце концов того, что указанная ступень будет состоять только из одного квантора, что и требовалось. Истинность полученной формулы на M (при заданной фиксации свободных переменных) следует из истинности формулы (7). Обратное следование очевидно в силу замечания к лемме.

Второй случай, когда Φ имеет вид (10_2), двойственен первому. Надо лишь везде вместо

$$Eu_1 \ldots Eu_q S, \quad Ev_1 \ldots Ev_r S$$

рассматривать соответственно

$$(u_1) \ldots (u_q) S, \quad (v_1) \ldots (v_r) S,$$

вместо Л в формулах, отвечающих (13) и (14), подставлять И и при приведении к предваренной форме действовать по способу, двойственному уже рассмотренному.

Таким образом, в обоих случаях мы преобразуем формулу (7) в равнозначную ей с приставкой, имеющей попрежнему l ступеней, но такой, что теперь уже

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_i = k_{i+1} = 1.$$

Повторив всю эту операцию $l - i$ раз, мы получим формулу требуемого вида $(k_1 = k_2 = \ldots = k_l = 1)$. Теорема доказана.

§ 2. О проблеме исключения

Одним из обобщений проблемы разрешимости на случай расширенного исчисления предикатов, не требующим предварительно общего определе-

---

* При этом длина каждой ступени, состоящей из кванторов общности, утроится, длины же ступеней из кванторов существования останутся прежними.

ния понятия спектра, является так называемая *проблема исключения*, которая состоит в следующем. Пусть дана качественная формула с одним связанным предикатом, т. е. формула вида

$$(P)\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}(P, Q, \ldots; \{x\}, \{y\})$$

или

$$EP\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}(P, Q, \ldots; \{x\}, \{y\});$$

требуется построить равнозначную ей формулу (называемую *результантом*), не содержащую связанного предиката P и содержащую те же самые свободные предикаты и предметы, что и исходная.*

Как известно, для формул, содержащих только одноместные предикаты, способ решения проблемы исключения существует [см., например, (²)]. В случае же, когда формула имеет не только одноместные предикаты, результант может не существовать, даже если предикат, подлежащий исключению, сам является одноместным. Так, Аккерман показал [см. (⁶)], что формула

$$(P)\{P(x) \mathbin{\&} (u)(v)[P(u) \mathbin{\&} Q(u, v) \to P(v)] \to P(y)\} \quad **$$

не имеет результанта.

Проблема исключения представляет интерес не только для самой математической логики. Известно, например, что в теории эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными при решении задачи Дирихле по методу Перрона [см., например, (⁴)] существенную роль играет свойство регулярности граничных точек области, которое не удалось пока охарактеризовать иначе, как с помощью существования некоторой функции («барьера»). Так как функция может быть задана посредством предиката, то ясно, что попытка дать некоторую характеристику свойства регулярности точек без помощи «барьера» или других понятий, эквивалентных функции, равносильна попытке исключить некоторый предикат, связанный квантором существования, из формулы, которая записывает свойство регулярности точки в символах расширенного исчисления. В свете вышесказанного ясно, что такое исключение не обязательно возможно. Вопрос о том, для каких формул существует результант и для каких не существует, весьма интересен и важен.

§ 3. Другие виды приведения

Возможности приведения количественных формул очень расширятся, если, наряду с преобразованиями в смысле равнозначности, т. е. не меняющими мощностей тех областей, на которых выполняется формула, допустить еще и такие преобразования, которые хотя и меняют эти мощности, но меняют их обозримым образом, так что если известны мощности областей, выполняющих преобразованную формулу, то можно считать известными также мощности областей, выполняющих исходную, и обратно.

---

* Разумеется, об исключении предикта P имеет смысл говорить лишь в том случае, когда формула содержит, кроме P, еще и другие предикаты.

** Эта формула обращается в аксиому индукции, если интерпретировать ее на натуральном ряде, положив $x = 0$ и взяв за $Q(u, v)$ предикат $v = u + 1$.

Одно из таких преобразований мы сейчас рассмотрим. Предварительно условимся в следующей сокращенной записи. Пусть $\mathfrak{P}(t)$ — произвольная формула, не содержащая, кроме t, других свободных предметных переменных. Обозначим через $M_{\mathfrak{P}}$ множество всех таких предметных t из предметной области M, для которых $\mathfrak{P}(t)$ истинно (если $\mathfrak{P}(t)$ содержит свободные переменные предикаты, то множество $M_{\mathfrak{P}} \subseteq M$, вообще говоря, является переменным, зависящим от этих предикатов). Пусть, далее, $\mathfrak{A}$ — любая формула, которая, в частности, может содержать t в качестве свободного переменного. Тогда условимся сокращенно писать формулу

$$Et\,[\mathfrak{P}(t) \,\&\, \mathfrak{A}]$$

в виде

$$(Et \in M_{\mathfrak{P}})\,\mathfrak{A},$$

а формулу

$$(t)\,[\mathfrak{P}(t) \to \mathfrak{A}]$$

в виде

$$(t \in M_{\mathfrak{P}})\,\mathfrak{A}.$$

Если все кванторы в приставке $\langle\{x\}\rangle$ формулы $\langle\{x\}\rangle\mathfrak{A}(\{x\})$ отнесены указанным образом к одному и тому же множеству $M_{\mathfrak{P}}$, то будем писать полученную формулу в виде:

$$\langle\{x \in M_{\mathfrak{P}}\}\rangle\,\mathfrak{A}(\{x\}).$$

ТЕОРЕМА III. *Для всякой количественной формулы A вида*

$$\langle\{S\}\rangle\langle\{x\}\rangle\,\mathfrak{A}(\{S\};\ \{x\})$$

можно построить количественную формулу B вида

$$E\Psi(Q)\langle\{y\}\rangle\,\mathfrak{B}(\Psi, Q;\ \{y\}),$$

где Ψ — двуместный, Q — одноместный предикаты, такую, что если A истинна на некоторой области мощности τ, то B истинна на некоторой другой области мощности

$$\mu = \tau + \tau^l + 2^{\tau^l},$$

(l — число мест самого многоместного предиката из A), и обратно, если B истинна на некоторой области мощности μ, то число μ имеет вид

$$\tau + \tau^l + 2^{\tau^l},$$

где τ — другое кардинальное число, меньшее μ, и A истинна в области мощности τ *.

Доказательство. Пусть формула A выполняется в некоторой непустой области $\sum$. Все предикаты, входящие в A, можно считать l-местными, где $l > 2$, ибо в противном случае у предиката с меньшим числом мест можно повторить нужное число раз последний аргумент **. Обозна-

---

* В частности, когда τ и μ бесконечны, равенство $\mu = \tau + \tau^l + 2^{\tau^l}$ обращается в $\mu = 2^{\tau}$.

** Например, если $l = 3$ то $S(x, y)$ заменяем на $S(x, y, y)$ и т. п.

чим через $\sum^l$ множество всех упорядоченных комплексов из l элементов области $\sum$, а через 2^{Σ^l} — множество всех l-местных предикатов, которые можно образовать на $\sum$, или, что то же самое, множество всех одноместных предикатов на $\sum^l$. Построим область

$$\sum\nolimits_1 = \sum + \sum\nolimits^l + 2^{\Sigma^l}$$

и определим на ней двуместный индивидуальный предикат $\Psi^*(\alpha, \beta)$ следующим образом:

$\Psi^*(\alpha, \beta)$	$\beta \in \sum$	$\beta = \{b_1, b_2, \ldots, b_l\} \in \sum^l$	$\beta \in 2^{\Sigma^l}$
$\alpha \in \sum$	Л	Л	Л
$\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\} \in \sum^l$	$a_1 = b$	$b_1 = a_2 \& b_2 = a_3 \& \ldots \& b_{l-1} = a_l \& b_l = a_1$	Л
$\alpha = S^* \in 2^{\Sigma^l}$	Л	$S^*(b_1 b_2, \ldots, b_l)$	Л

Из этой таблицы следует, что если обозначить

$$L_i^*(\alpha, x) = E\alpha_1 E\alpha_2 \ldots E\alpha_{i-1} [\Psi^*(\alpha, \alpha_1) \& \Psi^*(\alpha_1, \alpha_2) \& \ldots$$
$$\ldots \& \Psi^*(\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}) \& \Psi^*(\alpha_{i-1}, x)], \quad i = 1, 2, \ldots l, \tag{15}$$

$$\Pi^*(x) = (\alpha) \overline{\Psi}(\alpha, x), \tag{16}$$

$$O^*(x) = \overline{L_l^*(x, x)} \& \overline{\Pi^*(x)}\ , \ * \tag{17}$$

то будут истинны следующие высказывания:

$$\left.\begin{aligned} O^*(x) &\sim x \in \sum, \\ L_l^*(x, x) &\sim x \in \sum\nolimits^l, \\ \Pi^*(x) &\sim x \in 2^{\Sigma^l}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

и, если $\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\} \in \sum^l$, $x \in \sum$, то также

$$L_i^*(\alpha, x) \sim a_i = x, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{18'}$$

Из всего этого вытекает истинность следующих высказываний:

$$Ex \in \sum \ (\text{т. е. } ExO^*(x)), \tag{19}$$

$$(Q)\ (Er \in 2^{\Sigma^l})\ (\varkappa \in \sum\nolimits^l)\ [Q(\varkappa) \sim \Psi^*(r, \varkappa)], \tag{20}$$

$$(r \in 2^{\Sigma^l})(r' \in 2^{\Sigma^l})\ \{(\varkappa)\ [\Psi^*(r, \varkappa) \sim \Psi^*(r', \varkappa)] \rightarrow (Q)\ [Q(r) \sim Q(r')]\}, \tag{21}$$

$$(\varkappa \in \sum\nolimits^l)(E\alpha_1 \in \sum)(E\alpha_2 \in \sum) \ldots (E\alpha_l \in \sum)\ [L_1^*(\varkappa, \alpha_1) \& L_2^*(\varkappa, \alpha_2) \& \ldots \& L_l^*(\varkappa, \alpha_l)], \tag{22}$$

---

* Аналогичные выражения, но с Ψ вместо Ψ^*, будем обозначать соответственно через $L_i(\alpha, x)$, $\Pi(x)$ и $O(x)$.

$$(\alpha_1 \in \sum)(\alpha_2 \in \sum)\ldots(\alpha_l \in \sum)(E\varkappa \in \sum^l)[L_1^*(\varkappa, \alpha_1) \& L_2^*(\varkappa, \alpha_2) \& \ldots \& L_l^*(\varkappa, \alpha_l)], \qquad (23)$$

$$(\alpha_1 \in \sum)(\alpha_2 \in \sum)\ldots(\alpha_l \in \sum)(\varkappa \in \sum^l)(\varkappa' \in \sum^l)\{L_1^*(\varkappa, \alpha_1) \& L_2^*(\varkappa, \alpha_2) \& \ldots \&$$
$$\& L_l^*(\varkappa, \alpha_l) \& L_1^*(\varkappa', \alpha_1) \& L_2^*(\varkappa', \alpha_2) \& \ldots \& L_l^*(\varkappa', \alpha_l) \to (Q)[Q(\varkappa) \sim Q(\varkappa')]\}, \qquad (24)$$

$$(\alpha_1 \in \sum)(\alpha_2 \in \sum)\ldots(\alpha_l \in \sum)(\beta_1 \in \sum)(\beta_2 \in \sum)\ldots(\beta_l \in \sum)(\varkappa \in \sum^l)(\varkappa' \in \sum^l)\{(x \in 2^{\Sigma})$$
$$[\Psi^*(x, \varkappa) \sim \Psi^*(x, \varkappa')] \& L_1^*(\varkappa, \alpha_1) \& L_2^*(\varkappa, \alpha_2) \& \ldots \& L_l^*(\varkappa, \alpha_l) \&$$
$$\& L_1^*(\varkappa', \beta_1) \& L_2^*(\varkappa', \beta_2(\& \ldots \& L_l^*(\varkappa', \beta_l) \to (Q)\{[Q(\alpha_1) \sim Q(\beta_1)] \&$$
$$\& [Q(\alpha_2) \sim Q(\beta_2)] \& \ldots \& Q[(\alpha_l) \sim Q(\beta_l)]\}\}. \qquad (25)$$

Заменим в формуле A каждый предикат $S(t_1, t_2, \ldots, t_l)$ соответственно формулой

$$(E\varkappa \in \sum^l)[\Psi(s, \varkappa) \& L_1(\varkappa, t_1) \& L_2(\varkappa, t_2) \& \ldots \& L_l(\varkappa, t_l)],$$

предикатную часть $\langle\{S\}\rangle$ приставки заменим аналогичной по строению предметной частью $\langle\{s\}\rangle$, а затем отнесем часть $\langle\{s\}\rangle$ к множеству 2^{Σ^l}, а часть $\langle\{x\}\rangle$ — к множеству $\sum$. В результате получим качественную формулу:

$$\langle\{s \in 2^{\Sigma^l}\}\rangle \langle\{x \in \sum\}\rangle \mathfrak{A}_1(\Psi; \{s\}, \{x\}), \qquad (26)$$

подкванторная часть которой содержит, кроме записанных, еще связанные предметные переменные (отнесенные к множеству $\sum^l$).

Теперь образуем конъюнкцию из формулы (26) и формул, получаемых из (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25) заменой символа Ψ^* переменным предикатом Ψ, и поставим впереди всей формулы квантор $E\Psi$. После приведения к предваренной нормальной форме получим формулу B требуемого вида. Из процесса построения B следует, что если A истинна на $\sum$, то B истинна на $\sum_1$.

Пусть теперь B выполняется на некоторой непустой области $\sum_1$, т. е. на $\sum_1$ существует такой предикат Ψ^*, что

$$(Q)\langle\{y\}\rangle \mathfrak{B}(\Psi^*, Q; \{y\})$$

истинно. Обозначим через $\sum$ множество тех $x \in \sum_1$, для которых $O^*(x)$ истинно: оно непусто в силу (19). Непустыми будут также множество $\sum^l$ всех тех $\varkappa \in \sum_1$, для которых истинно $L_l^*(\varkappa, \varkappa)$, и множество 2^{Σ^l} всех тех $\alpha \in \sum_1$, для которых истинно $\Pi^*(\alpha)$ (первое — в силу (23), второе — в силу (20)). Из определения выражений $O(x)$, $L_l(\alpha, x)$ и $\Pi(x)$ сразу следует, что множества $\sum$, $\sum^l$ и 2^{Σ^l} попарно не пересекаются. Далее, из (22), (23), (24), (25) следует, что для любого комплекса $\{a_1, a_2, \ldots a_l\}$ элементов из $\sum$ однозначно определен такой элемент $\varkappa \in \sum^l$, что истинно высказывание

$$L_1^*(\varkappa, a_1) \& L_2^*(\varkappa, a_2) \& \ldots \& L_l^*(\varkappa, a_l), \qquad (27)$$

и обратно, для любого $\varkappa \in \sum^l$ однозначно определяются такие $a_1, a_2, \ldots, a_l \in \sum$, что (27) истинно. Наконец, из (20) и (21) следует, что любому одноместному предикату на $\sum^l$, или, что то же, l-местному предикату S^* на $\sum$, взаимно однозначно соответствует некоторый элемент s из 2^{Σ^l} такой, что на $\sum S^*(t_1, t_2, \ldots, t_l)$ равнозначно $\Psi^*(s, \varkappa)$, где $\varkappa$ — элемент из $\sum^l$, отвечающий комплексу $\{t_1, t_2, \ldots, t_l\}$; то, что часть множества 2^{Σ^l}, на которую отображается множество всех l-местных предикатов на $\sum$, совпадает со всем 2^{Σ^l}, следует из того, что любому $r \in 2^{\Sigma^l}$ отвечает одноместный предикат на $\sum^l$, именно $\Psi^*(r, \varkappa)$. Следовательно, из истинности (26) вытекает истинность A на $\sum$. Последнее можно пояснить более подробно таким образом: пусть, например, A имеет вид:

$$(S_1)\, ES_2 \langle\{x\}\rangle \mathfrak{A}(S_1, S_2;\ \{x\});$$

тогда формула (26), по предположению истинная, имеет вид

$$(s_1 \in 2^{\Sigma^l})(Es_2 \in 2^{\Sigma^l}) \langle\{y \in \textstyle\sum\}\rangle \mathfrak{B}^*(\Psi^*; s_1, s_2, \{y\});$$

чтобы доказать истинность A на $\sum$, берем любой предикат S_1^*, находим для него соответствующий $s_1 \in 2^{\Sigma^l}$, далее ищем такой $s_2 \in 2^{\Sigma^l}$, существование которого следует из (26), и, наконец, по s_2 находим S_2^*, беря сначала одноместный предикат $\Psi^*(s_2, \varkappa)$ на $\sum_l$ и переходя затем от $\varkappa$ к соответствующему комплексу предметов из $\sum$. Такие же рассуждения можно провести при любой другой приставке $\langle\{S\}\rangle$.

Итак, из истинности B на $\sum_1$ следует истинность A на некоторой $\sum \subset \sum_1$, причем сама $\sum_1$ имеет вид

$$\textstyle\sum + \sum^l + 2^{\Sigma^l},$$

где слагаемые попарно не пересекаются. Если мощность $\sum$ есть τ, то $\sum_1$ имеет мощность

$$\mu = \tau + \tau^l + 2^{\tau^l}.$$

Теорема доказана.

Поступило
7.III.1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гильберт Д. и Аккерман В., Основы теоретической логики, И. Л., 1947.
[2] Жегалкин И. И., Арифметизация символической логики. II, Матем. сб., 36 (1929), 205—332.
[3] Трахтенброт Б. А., Невозможность алгоритма для проблемы разрешимости на конечных классах, Доклады Ак. Наук СССР, XX (1950), 569—572.
[4] Петровский И. Г., Метод Перрона решения задачи Дирихле, Успехи матем. наук, вып. VIII (1941), 107—114.
[5] Gödel K., Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, Monatsh. für Math. und Phys., 38 (1931), 173—198.
Ackermann W., Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik, Math. Ann., 110 (1934), 390—413.

ОТ ЦЕНТРАЛЬНОГО КОМИТЕТА КОММУНИСТИЧЕСКОЙ ПАРТИИ СОВЕТСКОГО СОЮЗА, СОВЕТА МИНИСТРОВ СОЮЗА ССР И ПРЕЗИДИУМА ВЕРХОВНОГО СОВЕТА СССР

*Ко всем членам партии,
ко всем трудящимся Советского Союза.*

Дорогие товарищи и друзья!

Центральный Комитет Коммунистической партии Советского Союза, Совет Министров СССР и Президиум Верховного Совета СССР с чувством великой скорби извещают партию и всех трудящихся Советского Союза, что 5 марта в 9 час. 50 минут вечера после тяжелой болезни скончался Председатель Совета Министров Союза ССР и Секретарь Центрального Комитета Коммунистической партии Советского Союза Иосиф Виссарионович СТАЛИН.

Перестало биться сердце соратника и гениального продолжателя дела Ленина, мудрого вождя и учителя Коммунистической партии и советского народа — Иосифа Виссарионовича СТАЛИНА.

Имя СТАЛИНА — бесконечно дорого для нашей партии, для советского народа, для трудящихся всего мира. Вместе с Лениным товарищ СТАЛИН создал могучую партию коммунистов, воспитал и закалил ее; вместе с Лениным товарищ СТАЛИН был вдохновителем и вождем Великой Октябрьской социалистической революции, основателем первого в мире социалистического государства. Продолжая бессмертное дело Ленина, товарищ СТАЛИН привел советский народ к всемирно-исторической победе социализма в нашей стране. Товарищ СТАЛИН привел нашу страну к победе над фашизмом

во второй мировой войне, что коренным образом изменило всю международную обстановку. Товарищ СТАЛИН вооружил партию и весь народ великой и ясной программой строительства коммунизма в СССР.

Смерть товарища СТАЛИНА, отдавшего всю свою жизнь беззаветному служению великому делу коммунизма, является тягчайшей утратой для партии, трудящихся Советской страны и всего мира.

Весть о кончине товарища СТАЛИНА глубокой болью отзовется в сердцах рабочих, колхозников, интеллигентов и всех трудящихся нашей Родины, в сердцах воинов нашей доблестной Армии и Военно-Морского Флота, в сердцах миллионов трудящихся во всех странах мира.

В эти скорбные дни все народы нашей страны еще теснее сплачиваются в великой братской семье под испытанным руководством Коммунистической партии, созданной и воспитанной Лениным и Сталиным.

Советский народ питает безраздельное доверие и проникнут горячей любовью к своей родной Коммунистической партии, так как он знает, что высшим законом всей деятельности партии является служение интересам народа.

Рабочие, колхозники, советские интеллигенты, все трудящиеся нашей страны неуклонно следуют политике, выработанной нашей партией, отвечающей жизненным интересам трудящихся, направленной на дальнейшее усиление могущества нашей социалистической Родины. Правильность этой политики Коммунистической партии проверена десятилетиями борьбы, она привела трудящихся Советской страны к историческим победам социализма. Вдохновляемые этой политикой народы Советского Союза под руководством партии уверенно идут вперед к новым успехам коммунистического строительства в нашей стране.

Трудящиеся нашей страны знают, что дальнейшее улучшение материального благосостояния всех слоев населения — рабочих, колхозников, интеллигентов, максимальное удовлетворение постоянно растущих материальных и культурных потребностей всего общества всегда являлось и является предметом особой заботы Коммунистической партии и Советского Правительства.

Советский народ знает, что обороноспособность и могущество Советского государства растут и крепнут, что партия всемерно укрепляет Советскую Армию, Военно-Морской Флот и органы разведки с тем, чтобы постоянно повышать нашу готовность к сокрушительному отпору любому агрессору.

Внешней политикой Коммунистической партии и Правительства Советского Союза являлась и является незыблемая политика сохранения и упрочения мира, борьбы против подготовки и развязывания новой войны, политика международного сотрудничества и развития деловых связей со всеми странами.

Народы Советского Союза, верные знамени пролетарского интернационализма, укрепляют и развивают братскую дружбу с великим китайским народом, с трудящимися всех стран народной демократии, дружественные связи с трудящимися капиталистических и колониальных стран, борющимися за дело мира, демократии и социализма.

Дорогие товарищи и друзья!

Великой направляющей, руководящей силой советского народа в борьбе за построение коммунизма является наша Коммунистическая партия. Стальное единство и монолитная сплоченность рядов партии — главное условие ее силы и могущества. Наша задача — как зеницу ока хранить единство партии, воспитывать коммунистов как активных политических бойцов за проведение в жизнь политики и решений партии, еще более укреплять связи партии со всеми трудящимися, с рабочими, колхозниками, интеллигенцией, ибо в этой неразрывной связи с народом — сила и непобедимость нашей партии.

Партия видит одну из своих важнейших задач в том, чтобы воспитывать коммунистов и всех трудящихся в духе высокой политической бдительности, в духе непримиримости и твердости в борьбе с внутренними и внешними врагами.

Центральный Комитет Коммунистической партии Советского Союза, Совет Министров Союза ССР и Президиум Верховного Совета СССР, обращаясь в эти скорбные дни к партии и народу, выражают твердую уверенность в том, что партия и все трудящиеся нашей Родины еще теснее сплотятся вокруг Центрального Комитета и Советского Правительства, мобилизуют все свои силы и творче-

скую энергию на великое дело построения коммунизма в нашей стране.

Бессмертное имя СТАЛИНА всегда будет жить в сердцах советского народа и всего прогрессивного человечества.

Да здравствует великое, всепобеждающее учение Маркса — Энгельса — Ленина — Сталина!

Да здравствует наша могучая социалистическая Родина!

Да здравствует наш героический советский народ!

Да здравствует великая Коммунистическая партия Советского Союза!

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ КОМИТЕТ
КОММУНИСТИЧЕСКОЙ ПАРТИИ
СОВЕТСКОГО СОЮЗА

СОВЕТ
МИНИСТРОВ
СОЮЗА ССР

ПРЕЗИДИУМ
ВЕРХОВНОГО СОВЕТА
СОЮЗА ССР

5 марта 1953 года





ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 77 – 82

М. А. ЕВГРАФОВ

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПЕРРОНА

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

В работе дается новое, весьма простое доказательство теоремы Перрона относительно линейных разностных уравнений с предельно постоянными коэффициентами.

Целью этой работы является получение довольно простого доказательства теоремы Перрона, уточняющей теорему Пуанкаре — одну из самых тонких теорем теории линейных разностных уравнений. Приведем обе эти теоремы.

ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ. *Пусть коэффициенты разностного уравнения*

$$f(x+k)+a_1(x)f(x+k-1)+\cdots+a_k(x)f(x)=0,\quad x=0,1,2,\ldots,\qquad (1)$$

удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \lim\limits_{x\to\infty} a_m(x)=a_m,\quad a_k\neq 0;\\ 2)\ a_k(x)\neq 0 \text{ ни при каком } x;\\ 3)\ \lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\cdots+a_k=(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_k),\quad |\lambda_i|\neq|\lambda_j|,\quad i\neq j. \end{array}\right\}\ (A)$$

Тогда для любого нетривиального решения уравнения (1)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lambda_i.$$

ТЕОРЕМА ПЕРРОНА. *При выполнении тех же условий* (A) *существует k решений уравнения* (1) $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x+1)}{f_m(x)}=\lambda_m,\quad m=1,2,\ldots,k.$$

Для доказательства теоремы Перрона нам понадобятся четыре небольшие леммы. В дальнейшем, для краткости, мы будем говорить, что коэффициенты разностного уравнения удовлетворяют условиям (A) даже в том случае, если наши обозначения не будут совпадать с обозначениями теоремы Пуанкаре. Уравнение $\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\cdots+a_k=0$ мы будем называть характеристическим уравнением уравнения (1).

ЛЕММА 1. *Если $\gamma(x)\neq 0$ при $x=0,1,2,\ldots$ и $f(x)$ — решение уравнения*

$$f(x+k)+a_1(x)f(x+k-1)+\cdots+a_k(x)f(x)=0,\qquad (1)$$

то $F(x)=\frac{f(x)}{\gamma(x)}$ — *решение уравнения*

$$F(x+k)+a_1'(x)F(x+k-1)+\cdots+a_k'(x)F(x)=0,\qquad\qquad (1')$$
$$a_m'(x)=a_m(x)\frac{\gamma(x+k-m)}{\gamma(x+k)}.$$

Если, кроме того, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\gamma(x+1)}{\gamma(x)}=1$ *и* $a_m(x)$ *удовлетворяют условиям* (A), *то* $a_m'(x)$ *тоже удовлетворяют условиям* (A), *и* (1) *и* (1′) *имеют одно и то же характеристическое уравнение.*

Доказательство. Действительно, подставив $F(x)=\frac{f(x)}{\gamma(x)}$ в (1), получим:

$$\frac{f(x+k)}{\gamma(x+k)}+a_1'(x)\frac{f(x+k-1)}{\gamma(x+k-1)}+\cdots+a_k'(x)\frac{f(x)}{\gamma(x)}=$$
$$=\frac{f(x+k)}{\gamma(x+k)}+a_1(x)\frac{\gamma(x+k-1)}{\gamma(x+k)}\cdot\frac{f(x+k-1)}{\gamma(x+k-1)}+\cdots+a_k(x)\frac{\gamma(x)}{\gamma(x+k)}\cdot\frac{f(x)}{\gamma(x)}=$$
$$=\frac{1}{\gamma(x+k)}[f(x+k)+a_1(x)f(x+k-1)+\cdots+a_k(x)f(x)]=0,$$

так как $f(x)$ — решение уравнения (1).

Вторая часть леммы доказывается столь же просто. В самом деле,

$$a_k'(x)=a_k(x)\frac{\gamma(x)}{\gamma(x+k)}\neq 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}a_m'(x)=\lim_{x\to\infty}a_m(x)\lim_{x\to\infty}\frac{\gamma(x+k-m)}{\gamma(x+k-m+1)}\cdots\frac{\gamma(x+k-1)}{\gamma(x+k)}=a_m,$$

т. е. условия (A) выполнены и коэффициенты характеристического уравнения те же.

ЛЕММА 2. *Если уравнение* (1) *имеет решение* $f_1(x)=\lambda_1^x$, *то его левую часть можно представить в виде:*

$$F(x+k-1)+b_1(x)F(x+k-2)+\cdots+b_{k-1}(x)F(x),\qquad (2)$$

где

$$F(x)=f(x+1)-\lambda_1 f(x).$$

Если, кроме того, $a_m(x)$ *удовлетворяют условиям* (A), *то и* $b_m(x)$ *удовлетворяют условиям* (A), *причем характеристические уравнения уравнений* (1) *и* (2) *связаны соотношением:*

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda^{k-1}+b_1\lambda^{k-2}+\cdots+b_{k-1})=\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\cdots+a_k.\qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$\varphi(x,z)=z^k+a_1(x)z^{k-1}+\cdots+a_k(x).$$

Из того, что $f_1(x)=\lambda_1^x$ является решением уравнения (1), следует

$$\lambda_1^{x+k}+a_1(x)\lambda_1^{x+k-1}+\cdots+a_k(x)\lambda_1^x=0$$

или, после сокращения на λ_1^x,

$$\varphi(x,\lambda_1)=0.$$

Это значит, что $\varphi(x, z)$ делится на $z - \lambda_1$. Положим

$$\varphi_1(x, z) = \frac{\varphi(x, z)}{z - \lambda_1} = z^{k-1} + b_1(x) z^{k-2} + \dots + b_{k-1}(x)$$

или

$$(z - \lambda_1)(z^{k-1} + b_1(x) z^{k-2} + \dots + b_{k-1}(x)) = z^k + a_1(x) z^{k-1} + \dots + a_k(x). \quad (4)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем систему уравнений для определения $b_m(x)$:

$$b_m(x) - \lambda_1 b_{m-1}(x) = a_m(x), \quad b_0(x) = 1, \quad b_k(x) = 0. \quad (5)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$b_{k-1}(x) = -\frac{1}{\lambda_1} a_k(x). \quad (6)$$

Заметим, что если $a_m(x)$ удовлетворяют условиям (A), то им удовлетворяют и $b_m(x)$. Действительно, из $a_k(x) \neq 0$ следует $b_{k-1}(x) \neq 0$. В силу (5), из существования $\lim\limits_{x\to\infty} a_m(x)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} b_{m-1}(x)$ следует существование $\lim\limits_{x\to\infty} b_m(x)$, но так как $b_0(x) = 1$, это значит, что из существования

$$\lim_{x\to\infty} a_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, k,$$

следует существование

$$\lim_{x\to\infty} b_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, k-1.$$

Наконец, соотношение (3) получается предельным переходом из (4). Итак, остается доказать лишь первую часть леммы.

Подставим $F(x) = f(x+1) - \lambda_1 f(x)$ в выражение (2). Получим:

$$\begin{aligned} F(x+k-1) + b_1(x)F(x+k-2) + \dots + b_{k-1}(x)F(x) = \\ = f(x+k) - \lambda_1 f(x+k-1) + b_1(x) f(x+k-1) - \\ - \lambda_1 b_1(x) f(x+k-2) + \dots + b_{k-1}(x) f(x+1) - \lambda_1 b_{k-1}(x) f(x) = \\ = f(x+k) + [b_1(x) - \lambda_1 b_0(x)] f(x+k-1) + \dots + [b_k(x) - \lambda_1 b_{k-1}(x)] f(x) = \\ = f(x+k) + a_1(x) f(x+k-1) + \dots + a_k(x) f(x), \end{aligned}$$

в силу (5). Тем самым лемма 2 полностью доказана.

ЛЕММА 3. *Если* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)} = \mu$, $|\mu| \neq |\lambda|$, *то существует решение уравнения* $f(x+1) - \lambda f(x) = F(x)$, *также удовлетворяющее условию* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \mu$.

Доказательство. Представим искомое решение уравнения $f(x+1) - \lambda f(x) = F(x)$ в различных видах для $|\mu| < |\lambda|$ и $|\mu| > |\lambda|$. А именно, если $|\mu| < |\lambda|$, то положим

$$f(x) = -\frac{F(x)}{\lambda} - \frac{F(x+1)}{\lambda^2} - \frac{F(x+2)}{\lambda^3} - \dots; \quad (7)$$

если же $|\mu| > |\lambda|$, то положим

$$f(x) = F(x-1) + \lambda F(x-2) + \dots + \lambda^{x-1} F(0). \quad (8)$$

Поскольку дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны, мы ограничимся рассмотрением лишь первого случая.

Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x+1)}{F(x)}=\mu$, $|\mu|<|\lambda|$. Прежде всего, ряд (7) сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{F(x+n)\,\lambda^{-n-1}}{F(x+n+1)\,\lambda^{-n}}\right|=\frac{|\mu|}{|\lambda|}<1.$$

Далее, положим $u(x)=\dfrac{F(x)}{\mu^{x}}$. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{u(x+1)}{u(x)}=\frac{1}{\mu}\lim_{x\to\infty}\frac{F(x+1)}{F(x)}=1.$$

Выберем x_0 и n_0 так, чтобы при $x>x_0$

$$\left|\frac{u(x+1)}{u(x)}\right|<1+\varepsilon_1,\qquad\left|\frac{u(x+n)}{u(x)}-1\right|<\varepsilon_2 \text{ при } x>x_0,\, n<n_0,$$

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{|\mu|^{n}(1+\varepsilon_1)^{n}}{|\lambda|^{n+1}}<\varepsilon_3.$$

Тогда

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\mu\,\frac{u(x+1)}{u(x)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\mu^{n}}{\lambda^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{n_0}\dfrac{\mu^{n}}{\lambda^{n+1}}\left[\dfrac{u(x+n+1)}{u(x+1)}-1\right]+\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}\dfrac{\mu^{n}}{\lambda^{n+1}}\left[\dfrac{u(x+n+1)}{u(x+1)}-1\right]}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\mu^{n}}{\lambda^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{n_0}\dfrac{\mu^{n}}{\lambda^{n+1}}\left[\dfrac{u(x+n)}{u(x)}-1\right]+\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}\dfrac{\mu^{n}}{\lambda^{n+1}}\left[\dfrac{u(x+n)}{u(x)}-1\right]}.$$

Но

$$\left|\sum_{n=0}^{n_0}\frac{\mu^{n}}{\lambda^{n+1}}\left[\frac{u(x+n)}{u(x)}-1\right]\right|<\varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\mu|^{n}}{|\lambda|^{n+1}}=\frac{\varepsilon_2}{|\lambda|-|\mu|},$$

$$\left|\sum_{n=0}^{n_0}\frac{\mu^{n}}{\lambda^{n+1}}\left[\frac{u(x+n+1)}{u(x+1)}-1\right]\right|<\varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\mu|^{n}}{|\lambda|^{n+1}}=\frac{\varepsilon_2}{|\lambda|-|\mu|},$$

а

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{\mu^{n}}{\lambda^{n+1}}\left[\frac{u(x+n)}{u(x)}-1\right]\right|<2\varepsilon_3,\qquad\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{\mu^{n}}{\lambda^{n+1}}\left[\frac{u(x+n+1)}{u(x+1)}-1\right]\right|<2\varepsilon_3,$$

поэтому

$$\left|\frac{f(x+1)}{f(x)}-\mu\frac{u(x+1)}{u(x)}\right|<\left[\frac{1+\dfrac{\varepsilon_2|\lambda-\mu|}{|\lambda|-|\mu|}+2\varepsilon_3|\lambda-\mu|}{1-\dfrac{\varepsilon_2|\lambda-\mu|}{|\lambda|-|\mu|}-2\varepsilon_3|\lambda-\mu|}-1\right]\left|\frac{u(x+1)}{u(x)}\right||\mu|,$$

следовательно, так как ε_2 и ε_3 произвольно малы,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\mu\lim_{x\to\infty}\frac{u(x+1)}{u(x)}=\mu, \tag{9}$$

что и доказывает лемму.

ЛЕММА 4. *Если* $a_m(x)$ *удовлетворяют условиям* (A), *то среди решений уравнения* (1) *найдется* $f_0(x)$ *такое, что* $f_0(x) \neq 0$, $x = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ — фундаментальная система решений уравнения (1). Выберем C_1 не равным ни одному из чисел $-\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$. Тогда функция

$$f_1^{(1)}(x) = f_1(x) + C_1 f_2(x)$$

будет отлична от нуля всюду, кроме точек, в которых $f_1(x) = f_2(x) = 0$. Выбирая C_2 не равным ни одному из чисел $-\frac{f_1^{(1)}(x)}{f_3(x)}$, получим функцию

$$f_1^2(x) = f_1(x) + C_1 f_2(x) + C_2 f_3(x),$$

отличную от нуля всюду, кроме точек, в которых $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0$. Продолжая этот процесс, придем к функции

$$f_1^{(k-1)}(x) = f_1(x) + C_1 f_2(x) + \cdots + C_{k-1} f_k(x).$$

Эта функция не равна нулю ни в одной точке, так как равенство $f_1^{(k-1)}(x_1) = 0$ повлекло бы за собой $f_1(x_1) = f_2(x_1) = \ldots = f_k(x_1) = 0$, что невозможно ($f_1(x), \ldots, f_k(x)$ — фундаментальная система и из нее линейной комбинацией можно получить решение, принимающее в точках $x_1, x_1 + 1, \ldots, x_1 + k - 1$ любые, наперед заданные значения). Положив $f_0(x) = f_1^{(k-1)}(x)$, мы удовлетворим требованиям леммы.

Доказательство теоремы Перрона. Проведем индукцию по k. Для $k = 1$ теорема очевидна. Пусть $f_0(x)$ — решение уравнения (1), не равное нулю ни при каком x. (Оно существует по лемме 4.)

По теореме Пуанкаре, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f_0(x+1)}{f_0(x)}$ существует и равен одному из корней характеристического уравнения уравнения (1). Без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f_0(x+1)}{f_0(x)} = \lambda_1.$$

Положим

$$\gamma(x) = \frac{f_0(x)}{\lambda_1^x}.$$

$\gamma(x)$, определенная таким образом, удовлетворяет условиям леммы 1. Отсюда следует, что уравнение

$$\Phi(x + k) + a_1'(x)\Phi(x + k - 1) + \cdots + a_k'(x)\Phi(x) = 0, \qquad (10)$$

где

$$a_m'(x) = a_m(x)\frac{\gamma(x + k - m)}{\gamma(x + k)} = a_m(x)\frac{f_0(x + k - m) - \lambda_1^m}{f_0(x + k)},$$

имеет решение

$$\Phi_1(x) = \frac{f_0(x)}{f_0(x)\lambda_1^{-x}} = \lambda_1^x$$

и, следовательно, по лемме 2, может быть представлено в виде

$$F(x + k - 1) + b_1(x)F(x + k - 2) + \cdots + b_{k-1}(x)F(x) = 0, \qquad (11)$$

где $F(x) = \Phi(x+1) - \lambda_1 \Phi(x)$. По лемме 2, $b_m(x)$ удовлетворяют условиям (А) и характеристическое уравнение уравнения (11) имеет корни $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$. Значит, по индуктивному предположению, уравнение (11) имеет $k-1$ решений $F_2(x), F_3(x), \ldots, F_k(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F_m(x+1)}{F_m(x)} = \lambda_m, \quad m = 2, 3, \ldots, k.$$

Но, в силу леммы 3, для $m = 2, 3, \ldots, k$ существует $\Phi_m(k)$ — решение уравнения $\Phi(x+1) - \lambda_1 \Phi(x) = F_m(x)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Phi_m(x+1)}{\Phi_m(x)} = \lambda_m.$$

По лемме 2, $\Phi_m(x)$ будут решениями уравнения (10). К ним можно присоединить $\Phi_1(x) = \lambda_1^x$. Если мы положим $\gamma_1(x) = \frac{\lambda_1^x}{f_0(x)}$, то уравнение с коэффициентами

$$a_m'(x) \frac{\gamma_1(x+k-m)}{\gamma_1(x+k)} = a_m(x) \frac{f_0(x+k-m)\lambda_1^m}{f_0(x+k)} \cdot \frac{f_0(x+k)}{f_0(x+k-m)\lambda_1^m} = a_m(x),$$

т. е. уравнение (1), имеет решения

$$f_m(x) = \frac{\Phi_m(x)}{\gamma_1(x)} = \frac{\Phi_m(x) f_0(x)}{\lambda_1^x}, \quad m = 1, 2, \ldots, k,$$

причем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_m(x+1)}{f_m(x)} = \frac{1}{\lambda_1} \lim_{x\to\infty} \frac{f_0(x+1)}{f_0(x)} \lim_{x\to\infty} \frac{\Phi_m(x+1)}{\Phi_m(x)} = \lambda_m.$$

Тем самым теорема Перрона доказана полностью.

Поступило
13. XI. 1952

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 83–86

А. О. ГЕЛЬФОНД и И. М. КУБЕНСКАЯ

О ТЕОРЕМЕ ПЕРРОНА В ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе получены оценочные результаты, дополняющие теорему Перрона о поведении решений линейных разностных уравнений с предельно-постоянными коэффициентами.

Если коэффициенты линейного разностного уравнения

$$f(x+n)+a_1(x)f(x+n-1)+\cdots+a_n(x)f(x)=0 \tag{1}$$

удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} a_m(x)=a_m, \quad 1\leqslant m\leqslant n, \quad a_n\neq 0, \quad a_n(x)\neq 0, \quad x=0,1,2,\ldots, \\ &\theta(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_n), \\ &|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_n|, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

то по теореме Перрона ([1]) существует фундаментальная система решений уравнения (1) $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, причем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_k(x+1)}{f_k(x)}=\lambda_k, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Новое и весьма интересное доказательство этой теоремы, принадлежащее М. А. Евграфову ([2]), несравненно более простое, чем доказательство Перрона, дало указания на возможность оценки порядка приближения $\frac{f_k(x+1)}{f_k(x)}$ к своим пределам, если известны порядки убывания разностей $|a_k(x)-a_k|$. Этому вопросу и посвящена наша статья.

ТЕОРЕМА. *Если коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (2) *и, кроме того,*

$$\left.\begin{aligned} &a_m(x)=a_m+\varepsilon_m(x), \quad |\varepsilon_m(x)|\leqslant\varphi(x), \quad m=1,2,\ldots,n, \\ &\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0, \quad 0<\varphi(x+1)\leqslant\varphi(x), \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}=1, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

то существует фундаментальная система решений уравнения (1) $f_1(x),\ldots,f_n(x)$, *причем*

$$\frac{f_k(x+1)}{f_k(x)}=\lambda_k+O[\varphi(x)], \quad k=1,\ldots,n. \tag{4}$$

Доказательство. По теореме Перрона уравнение (1) имеет решение $f(x)$, для которого

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lambda_\nu.$$

Положим

$$f(x+1)=[\lambda_\nu+\gamma(x+1)]f(x), \quad |\gamma(x)|\leqslant\delta(x)\leqslant\delta(x-1), \quad \lim_{x\to\infty}\delta(x)=0.$$

Отсюда следует, что

$$f(x) = C\prod_{x_0}^{x}[\lambda_\nu + \gamma(x)] = \lambda_\nu^{(x)} e^{o(x)}. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение систему функций $u_1(x), \ldots, u_n(x)$, положив

$$\begin{aligned} f(x) &= u_1(x) + \cdots + u_n(x), \\ f(x+1) &= \lambda_1 u_1(x) + \cdots + \lambda_n u_n(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x+n-1) &= \lambda_1^{n-1} u_1(x) + \cdots + \lambda_n^{n-1} u_n(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Для распределения функций $u_s(x)$ положим

$$\theta_s(\lambda) = \frac{\theta(\lambda)}{\lambda - \lambda_s} = \lambda^{n-1} + C_{1,s}\lambda^{n-2} + \cdots + C_{n-1,s}.$$

Умножая первое равенство системы (6) на $C_{n-1,s}$, второе — на $C_{n-2,s}$ и, наконец, последнее — на 1, мы получаем, что

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \theta_s(\lambda_k) u_k(x) = \theta'(\lambda_s) u_s(x) = \\ &= f(x+n-1) + C_{1,s} f(x+n-2) + \cdots + C_{n-1,s} f(x) = \\ &= f(x)\left[\prod_{x+1}^{x+n-1}[\lambda_\nu + \gamma(k)] + C_{1,s}\prod_{x+1}^{x+n-1}[\lambda_\nu + \gamma(k)] + \cdots + C_{n-1,s}\right] = \\ &= f(x)\left\{\theta_s(\lambda_\nu) + \sum_{q=0}^{n-1} C_{q,s}\left[\prod_{x+q+1}^{x+n-1}[\lambda_\nu + \gamma(k)] + \lambda_\nu^{n-q-1}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Из этого соотношения непосредственно следует, что при $s = \nu$

$$u_\nu(x) = f(x)\,[1 + O(\delta(x))] \tag{8}$$

и при $s \neq \nu$

$$u_s(x) = f(x)\, O(\delta(x)). \tag{9}$$

Но тогда при $s \neq \nu$ $\lim \frac{u_s(x)}{u_\nu(x)} = \lim \frac{O(\delta(x))}{1 + O(\delta(x))} = 0$, другими словами, при $x > x_0$

$$|u_\nu(x)| > |u_s(x)|, \quad \nu \neq s. \tag{10}$$

Из соотношений (7) следует также непосредственно, что

$$\begin{aligned} -\lambda_s\theta'(\lambda_s) u_s(x) &= -\lambda_s f(x+n-1) - \lambda_s C_{1,s} f(x+n-2) - \cdots - \lambda_s C_{n-1,s} f(x), \\ \theta'(\lambda_s) u_s(x+1) &= f(x+n) + C_{1,n} f(x+n-1) + \cdots + C_{n-1,s} f(x+1), \end{aligned}$$

откуда, складывая почленно и деля равенства на $\theta'(\lambda_s)$, получаем, что

$$u_s(x+1) - \lambda_s u_s(x) = \frac{1}{\theta'(\lambda_s)}[f(x+n) + a_1 f(x+n-1) + \cdots + a_n f(x)],$$

в силу определения чисел $C_{k,s}$.

Далее, воспользовавшись уравнением (1), находим, что

$$u_s(x+1) - \lambda_s u_s(x) = \frac{1}{\theta'(\lambda_s)} \sum_{0}^{n-1} E_{n-k}(x) f(x+k) \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Исключая из этих соотношений $f(x)$, $f(x+1), \ldots, f(x+n-1)$ при помощи равенств (6), получаем соотношения:

$$u_s(x+1) = \lambda_s u_s(x) + \sum_{k=1}^{n} E_{k,s}(x)\, u_k(x), \qquad s = 1, 2, \ldots, n, \quad E_{k,s}(x) = O[\varphi(x)], \tag{12}$$

откуда окончательно следуют уравнения:

$$u_s(x+1) = \lambda_s u_s(x) + u_\nu(x)\, \psi_s(x), \qquad s = 1, 2, \ldots, n, \quad \psi_s(x) = O[\varphi(x)], \tag{13}$$

так как при $x > x_0$ верны неравенства (10). Значит,

$$\frac{u_\nu(x+1)}{u_\nu(x)} = \lambda_\nu + \psi_\nu(x), \quad \psi_\nu(x) = O[\varphi(x)]. \tag{14}$$

Построим частные решения уравнений (13). Рассмотрим сначала случай $s < \nu$, другими словами, случай $|\lambda_s| > |\lambda_\nu|$. Положим

$$v_s(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_\nu(x+k)\, \psi_s(x+k)}{\lambda_s^{k+1}} =$$

$$= -\lambda_s^{-1} u_\nu(x)\, O[\varphi(x)]\, O\left[\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_s|^{-k} \prod_{p=0}^{k-1} |\lambda_\nu + \psi_\nu(x+p+1)|\right] = u_\nu(x) O[\varphi(x)], \tag{15}$$

так как ряд (15) абсолютно сходится, вследствие $|\lambda_s| > |\lambda_\nu|$, и $v_s(s)$ удовлетворяет уравнению (13).

Если $|\lambda_s| < |\lambda_\nu|$. другими словами, если $s > \nu$, то полагаем

$$v_s(x) = \lambda_s^{x-1} \sum_{k=0}^{x-1} u_\nu(k)\, \psi_s(k)\, \lambda_s^{-k} =$$

$$= u_\nu(x)\, \varphi(x)\, O\left[\sum_{k=0}^{x-1} \left|\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right|^{x-k} \frac{\varphi(k)}{\varphi(x)} \prod_{m=k}^{x} \left|1 + \frac{\psi_\nu(m)}{\lambda_\nu}\right|^{-1}\right] = u_\nu(x) O[\varphi(x)], \tag{16}$$

так как

$$|\lambda_s| < |\lambda_\nu|, \quad \sum_{m=k}^{x} \left|1 + \frac{\psi_\nu(m)}{\lambda_\nu}\right| < C_0 \left|\frac{\lambda_\nu}{\lambda_s}\right|^{\frac{x-k}{4}},$$

$$\frac{\varphi(k)}{\varphi(x)} = \prod_{q=k}^{x-1} \frac{\varphi(q)}{\varphi(q+1)} < C_1 \left|\frac{\lambda_\nu}{\lambda_s}\right|^{\frac{x-k}{4}},$$

где C_0 и C_1 не зависят от $x-k$ вследствие условия $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = 1$. Поэтому при любом $s \neq \nu$

$$v_s(x) = u_\nu(x)\, O[\varphi(x)], \quad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Но любое решение уравнения (13), так как $v_s(x)$ — частное решение, имеет вид:

$$u_s(x) = v_s(x) + C_s \lambda_s^x = C_s \lambda_s^x + u_\nu(x)\, O[\varphi(x)],$$

где C_s — произвольная постоянная. Так как $|\lambda_1|>\ldots>|\lambda_{\nu-1}|>|\lambda_\nu|$, то, вследствие неравенств (10), $C_1=\ldots=C_{\nu-1}=0$, и, значит,

$$u_s(x)=u_\nu(x)\,O[\varphi(x)],\quad s<\nu. \tag{18}$$

Но если $s>\nu$, то

$$u_s(x)=C_s\lambda_s^x+u_\nu(x)\,O[\varphi(x)]=u_\nu(x)\left[O\left(\left|\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right|^{\frac{x}{2}}\right)+O[\varphi(x)]\right]=u_\nu(x)\,O[\varphi(x)],$$

так как $u_\nu(x)=\lambda_\nu^{x+o(x)}$ и

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)\prod_{x_0+1}^{x}\frac{\varphi(k)}{\varphi(k-1)}>C\left|\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right|^{\frac{x}{2}},\quad x>x_1,\quad C>0,$$

вследствие $\left|\frac{\lambda_s}{\lambda_\nu}\right|<1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\varphi(x-1)}=1$. Значит, при любом $s\neq\nu$

$$u_s(x)=u_\nu(x)\,O[\varphi(x)]. \tag{19}$$

Поэтому

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{u_1(x+1)+u_2(x+1)+\cdots+u_n(x+1)}{u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)}=$$

$$=\frac{u_\nu(x+1)}{u_\nu(x)}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{u_k(x+1)}{u_\nu(x+1)}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{u_k(x)}{u_\nu(x)}}=(\lambda_\nu+O[\varphi(x)])\frac{1+O[\varphi(x)]}{1+O[\varphi(x)]}=$$

$$=\lambda_\nu+w_\nu(x),\quad w_\nu(x)=O[\varphi(x)]. \tag{20}$$

Этим наша теорема доказана, так как по теореме Перрона в качестве $f(x)$ можно взять любую функцию фундаментальной системы $f_\nu(x)$ и для нее $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_\nu(x+1)}{f_\nu(x)}=\lambda_\nu,\quad 1\leqslant\nu\leqslant n.$

Следствие. Если $\sum\limits_{x_0}^{\infty}\varphi(k)<\infty$, то, полагая $\psi(x)=\sum\limits_{x+1}^{\infty}\varphi(k)$, получим, что

$$f_\nu(x)=\prod_{k=0}^{x}[\lambda_\nu+w_\nu(k)]=$$

$$=\lambda_\nu^x\prod_{0}^{\infty}[1+\lambda_\nu^{-1}w_\nu(k)]\prod_{x+1}^{\infty}[1+\lambda_\nu^{-1}(k)]=C_\nu\lambda_\nu^x e^{O[\psi(x)]},$$

другими словами, существует такая фундаментальная система решений уравнения (1), что для функций этой системы верны соотношения

$$\lambda_\nu^{-x}f_\nu(x)=1+O[\psi(x)],\quad 1\leqslant\nu\leqslant n.$$

Поступило
13.XI.1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Перрон О., Об одной теореме А. Пуанкаре, J. reine und angew. Math., 136 (1909), 17—37; О линейном разностном уравнении А. Пуанкаре, J. reine und angew. Math., 137 (1910), 6—64.

[2] Евграфов М. А., Новое доказательство теоремы Перрона, Изв. Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 77—82.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 87—98

С. Б. СТЕЧКИН

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе дается полное решение следующей задачи. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция и $\omega(\delta, f)$—ее модуль непрерывности. При каких ограничениях на положительную функцию $\omega(\delta)$ соотношения

$$\omega(\delta, f) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi)$$

влекут абсолютную сходимость ряда Фурье функции $f(x)$?

§ 1. Введение

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π, $\omega(\delta, f)$ — ее модуль непрерывности и $E_n(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — наилучшие приближения функции $f(x)$ посредством тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Если ряд Фурье функции $f(x)$ абсолютно сходится, то будем писать $f \in A$; в противном случае будем писать $f \overline{\in} A$.

Поставим следующую задачу: какие условия необходимо и достаточно наложить на положительную последовательность $\{B_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ для того, чтобы соотношения

$$E_n(f) = O(B_n) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

влекли $f \in A$? Иными словами, ищутся такие условия на последовательность $\{B_n\}$, при выполнении которых всякая непрерывная периодическая функция $f(x)$, удовлетворяющая соотношениям (1), обладает абсолютно сходящимся рядом Фурье и при невыполнении которых существует непрерывная периодическая функция $f(x)$, удовлетворяющая соотношениям (1) и такая, что $f \overline{\in} A$.

Решение этой задачи непосредственно вытекает из известных результатов С. Н. Бернштейна ([1]) и может быть сформулировано в виде следующего предложения:

(I). *Пусть* $\{B_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — *положительная последовательность. Соотношения*

$$E_n(f) = O(B_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

влекут $f \in A$ *в том и только том случае, если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} B_n^*, \tag{2}$$

где

$$B_n^* = \min_{k=1,2,\ldots,n} B_k \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Итак, сходимость ряда (2) является наиболее широким условием, влекущим $f \in A$, в терминах мажорант для наилучших приближений.

Поставим аналогичную задачу относительно мажорант для модулей непрерывности: какие условия необходимо и достаточно наложить на положительную функцию $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ для того, чтобы соотношения

$$\omega(\delta, f) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi) \tag{4}$$

влекли $f \in A$? Иными словами, каковы наиболее широкие условия абсолютной сходимости рядов Фурье в терминах мажорант для модулей непрерывности?

В этом направлении С. Н. Бернштейн (1) получил следующие результаты:

(II). *Если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{5}$$

то соотношения (4) *влекут* $f \in A$.

(III). *Если для некоторого* $\varepsilon > 0$ *функция* $\delta^{-\varepsilon}\omega(\delta)$ *возрастает, а функция* $\delta^{\varepsilon-1}\omega(\delta)$ *убывает и ряд* (5) *расходится, то соотношения* (4) *не влекут* $f \in A$.

Некоторые обобщения теоремы (III) были получены Сасом [см. (4), замечание 6.1].

В настоящей работе дается полное решение поставленной выше задачи. Оказывается, что если выполняются соотношения (4), то на самом деле

$$\omega(\delta, f) = O(\omega^*(\delta)), \quad (0 < \delta \leqslant \pi),$$

где $\omega^*(\delta) \leqslant \omega(\delta)$ — «истинная мажоранта», построение которой по функции $\omega(\delta)$ дается в § 2. Истинные мажоранты обладают примерно теми же свойствами, что и модули непрерывности, и с помощью одной леммы о числовых рядах (см. § 3, лемма 2) нам удается установить, что если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^*\left(\frac{1}{n}\right)$$

расходится, то соотношения (4) не влекут $f \in A$. Отсюда без труда выводится

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть* $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ — *положительная функция. Соотношения* (4) *влекут* $f \in A$ *в том и только том случае, если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^*\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\omega^*(\delta)$ — *истинная мажоранта, построенная по мажоранте* $\omega(\delta)$.

§ 2. Модули непрерывности и их мажоранты

В этом параграфе излагаются свойства модулей непрерывности непрерывных периодических функций и их мажорант, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Если $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π, то ее модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ обладает следующими свойствами [см., например, ([3]), § 1]:

1) $\omega(0, f) = 0$;

2) $\omega(\delta; f)$ — неубывающая функция от δ;

3) $\omega(\delta, f)$ — непрерывная функция от δ;

4) если $\delta \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$ и $\delta + \eta \leqslant \pi$, то

$$\omega(\delta + \eta, f) \leqslant \omega(\delta, f) + \omega(\eta, f).$$

Свойства 1) — 4) полностью характеризуют модули непрерывности непрерывных периодических функций*. Иными словами, если некоторая функция $\omega(\delta)$ задана на отрезке $[0, \pi]$ и удовлетворяет условиям 1) — 4), то найдется непрерывная функция $f(x)$ с периодом 2π, для которой

$$\omega(\delta, f) = \omega(\delta) \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi).$$

В частности, можно положить

$$f(x) = \omega(|x|) \quad (|x| \leqslant \pi).$$

В соответствии с этим, если функция $\omega(\delta)$, заданная на отрезке $[0, \pi]$, удовлетворяет условиям 1) — 4), то мы будем в дальнейшем называть ее *модулем непрерывности*.

Из 1) — 4) вытекают такие свойства модулей непрерывности [см. ([3])]:

5) если $\delta > 0$, p — натуральное число и $p\delta \leqslant \pi$, то

$$\omega(p\delta, f) \leqslant p\omega(\delta, f);$$

6) если $0 < \delta < \eta \leqslant \pi$, то

$$\eta^{-1}\omega(\eta, f) \leqslant 2\delta^{-1}\omega(\delta, f).$$

Нам потребуются также два свойства мажорант модулей непрерывности:

7) пусть функция $u(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ положительна и не убывает; если

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) = O\left(u\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

то

$$\omega(\delta, f) = O(u(\delta)) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi). \tag{7}$$

Докажем это утверждение. Пусть $0 < \delta \leqslant \pi$ и n — наименьшее натуральное число, для которого $\delta \geqslant \frac{1}{n}$. Очевидно, что $\delta \leqslant \frac{\pi}{n} < \frac{4}{n}$. Поэтому,

* Этот факт известен [см. ([3])].

используя свойства 5) и 2) модулей непрерывности, формулу (6) и монотонность функции $u(\delta)$, получаем:

$$\omega(\delta, f) = \omega\left(4\frac{\delta}{4}, f\right) \leqslant 4\omega\left(\frac{\delta}{4}, f\right) \leqslant 4\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) =$$
$$= O\left(u\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O(u(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi),$$

и соотношения (7) установлены.

8) $\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqslant \frac{C_1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(f) \quad (n = 1, 2, \ldots)$

[см. ([3]), случай $k = 1$ теоремы 8].

Переходим к рассмотрению дальнейших свойств мажорант модулей непрерывности.

Операция *. Каждой положительной функции $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ поставим в соответствие новую функцию $\omega^*(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ по следующему правилу: положим

$$\omega^{(0)}(0) = 0, \quad \omega^{(0)}(\delta) = \inf_{\delta \leqslant \eta \leqslant \pi} \omega(\eta) \quad (0 < \delta \leqslant \pi); \tag{8}$$

далее, положим

$$\omega^{(1)}(\delta) = \inf_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \{\omega^{(0)}(h) + \omega^{(0)}(\delta - h)\} \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi); \tag{9}$$

вообще, если функции $\omega^{(0)}(\delta), \ldots, \omega^{(k)}(\delta)$ $(k \geqslant 0)$ уже определены, то положим

$$\omega^{(k+1)}(\delta) = \inf_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \{\omega^{k}(h) + \omega^{(k)}(\delta - h)\} \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi). \tag{10}$$

Наконец, положим

$$\omega^*(\delta) = \lim_{k \to \infty} \omega^{(k)}(\delta) \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi). \tag{11}$$

Из формул (8) — (10) нетрудно усмотреть, что

$$\omega(\delta) \geqslant \omega^{(0)}(\delta) \geqslant \ldots \geqslant \omega^{(k)}(\delta) \geqslant \ldots \geqslant 0. \tag{12}$$

Поэтому предел (11) существует для любого δ из отрезка $[0, \pi]$.

Функцию $\omega^*(\delta)$ мы будем называть истинной мажорантой, построенной по функции $\omega(\delta)$. Основания для такого наименования станут ясны из дальнейшего.

Отметим несколько простых свойств истинных мажорант:

1) $0 \leqslant \omega^*(\delta) \leqslant \omega(\delta) \quad (0 < \delta \leqslant \pi)$

[см. (12)].

2) $\omega^*(\delta)$ — неубывающая функция от δ.

Действительно, функция $\omega^{(0)}(\delta)$ не убывает по самому ее построению; далее, индукция по k показывает, что функции $\omega^{(k)}(\delta)$ не убывают при произвольном k; остается заметить, что предельный переход не нарушает неубывания.

3) Если $\delta > 0$, $\eta > 0$ и $\delta + \eta \leqslant \pi$, то

$$\omega^*(\delta + \eta) \leqslant \omega^*(\delta) + \omega^*(\eta). \tag{13}$$

Из соотношения (10) вытекает, что

$$\omega^{(k+1)}(\delta + \eta) \leqslant \omega^{(k)}(\delta) + \omega^{(k)}(\eta).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем (13).

4) Если $0 < \delta < \eta \leqslant \pi$, то

$$\eta^{-1} \omega^* (\eta) \leqslant 2\delta^{-1} \omega^* (\delta). \tag{14}$$

Это свойство устанавливается точно так же, как аналогичное свойство модулей непрерывности. Прежде всего, из (13) следует, что если $\delta > 0$, p — натуральное число и $p\delta \leqslant \pi$, то

$$\omega^* (p\delta) \leqslant p\omega^* (\delta). \tag{15}$$

Далее, пусть n — наименьшее натуральное число, для которого $n\delta \geqslant \eta$, т. е. $\delta \geqslant \frac{\eta}{n}$. Очевидно, $n \geqslant 2$. В силу (15) и монотонности $\omega^* (\delta)$, имеем:

$$\omega^* (\eta) = \omega^* \left(n \frac{\eta}{n}\right) \leqslant n\, \omega^* \left(\frac{\eta}{n}\right) \leqslant n\omega^* (\delta). \tag{16}$$

Но, согласно определению n, $(n-1)\delta < \eta$, огкуда

$$n < \frac{\eta}{\delta} + 1 = \frac{\eta + \delta}{\delta} < \frac{2\eta}{\delta}.$$

Отсюда и в силу (16)

$$\omega^* (\eta) \leqslant 2 \frac{\eta}{\delta} \omega^* (\delta),$$

что эквивалентно (14).

5) Если $\omega_1 (\delta) = c\omega (\delta)$, где $c > 0$, то

$$\omega_1^* (\delta) = c\omega^* (\delta).$$

Это свойство очевидно.

Нетрудно показать, что если

$$\inf_{0<\delta\leqslant\pi} \omega (\delta) = 0,$$

то $\omega^* (\delta)$ есть модуль непрерывности, но это нам не понадобится.

Связь операции $*$ с мажорантами модулей непрерывности дается следующей леммой.

ЛЕММА 1. *Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция и $\omega (\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ — положительная функция. Если*

$$\omega (\delta, f) = O (\omega (\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi), \tag{17}$$

то

$$\omega (\delta, f) = O (\omega^* (\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi), \tag{18}$$

где $\omega^* (\delta)$ — истинная мажоранта, построенная по мажоранте $\omega (\delta)$.

Доказательство. Пусть сперва

$$\omega (\delta, f) \leqslant \omega (\delta) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

В силу монотонности модуля непрерывности имеем:

$$\omega (\delta, f) \leqslant \omega (\eta, f) \leqslant \omega (\eta) \quad (0 < \delta \leqslant \eta \leqslant \pi),$$

откуда

$$\omega (\delta, f) \leqslant \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\pi} \omega (\eta) = \omega^{(0)} (\delta) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Очевидно, что это неравенство справедливо также и для $\delta = 0$.

Далее, согласно свойству 4) модулей непрерывности, если $0 \leqslant h \leqslant \delta \leqslant \pi$, то

$$\omega (\delta, f) \leqslant \omega (h, f) + \omega (\delta - h, f) \leqslant \omega^{(0)} (h) + \omega^{(0)} (\delta - h),$$

откуда

$$\omega(\delta, f) \leqslant \inf_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \{\omega^{(0)}(h) + \omega^{(0)}(\delta - h)\} = \omega^{(1)}(\delta) \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi).$$

Аналогично устанавливается, что

$$\omega(\delta, f) \leqslant \omega^{(k)}(\delta) \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi,\ k = 1, 2, \ldots).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем, что

$$\omega(\delta, f) \leqslant \omega^*(\delta) \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi).$$

Пусть теперь в соответствии с (17)

$$\omega(\delta, f) \leqslant C_2 \omega(\delta) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Предыдущее рассуждение показывает, что тогда

$$\omega(\delta, f) \leqslant \{C_2 \omega(\delta)\}^* \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi),$$

откуда, в силу свойства 5) истинных мажорант,

$$\omega(\delta, f) \leqslant C_2 \omega^*(\delta) \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi).$$

Отсюда вытекают соотношения (18), и лемма 1 доказана.

Лемма 1 оправдывает наименование истинной мажоранты, введенное нами для функции $\omega^*(\delta)$.

§ 3. Основная лемма

ЛЕММА 2. *Пусть* $0 < \alpha \leqslant 1$ *и функция* $u(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ *положительна, не убывает и*

$$\eta^{-1} u(\eta) \leqslant C_3 \delta^{-1} u(\delta) \quad (0 < \delta < \eta \leqslant \pi). \tag{19}$$

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} u\left(\frac{1}{n}\right) \tag{20}$$

расходится, то существует положительная последовательность $\{B_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *обладающая следующими свойствами:*

1) $B_n \downarrow 0$, *

2) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} B_n$ *расходится,*

3) $\sum_{k=1}^{n} B_k \leqslant n u\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Сделаем несколько предварительных замечаний.

Достаточно установить, что существует последовательность $\{B_n\}$, обладающая свойствами 1), 2) и

3′) $\sum_{k=1}^{n} B_k \leqslant C_4 n u\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$,

где C_4 — некоторая положительная константа, ибо тогда последовательность $\{B_n / C_4\}$ будет обладать всеми нужными свойствами.

---

* Запись $B_n \downarrow 0$ означает, что $B_1 \geqslant B_2 \geqslant \ldots \geqslant B_n \geqslant \ldots$ и $B_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Из условий, которым удовлетворяет функция $u(\delta)$, вытекает, что

$$nu\left(\frac{1}{n}\right) \to \infty \quad (n \to \infty). \tag{21}$$

В самом деле, допустим, что

$$\varliminf_{n\to\infty} nu\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Тогда можно найти сколь угодно большие N_s, для которых

$$N_s u\left(\frac{1}{N_s}\right) < C_5 \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда, в силу (19),

$$nu\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant C_3 N_s u\left(\frac{1}{N_s}\right) \leqslant C_3 C_5 = C_6$$

для $1 \leqslant n < N_s$, т. е.

$$u\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{C_6}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

что противоречит расходимости ряда (20).

Возможны два случая:

$$\alpha)\ u(\delta) \geqslant C_7 \quad (0 < \delta \leqslant \pi), \quad \text{где } C_7 > 0,$$

и

$$\beta)\ u(\delta) \to 0 \text{ при } \delta \to +0.$$

Случай α) тривиален, так как тогда произвольная последовательность $\{B_n\}$, обладающая свойствами 1) и 2) леммы, обладает также свойством 3').

Рассмотрим основной случай β). Итак, пусть

$$u(\delta) \to 0 \quad (\delta \to +0). \tag{22}$$

Определим индуктивно возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Положим $n_1 = 1$; если $n_1, \ldots, n_k$ уже определены, то пусть n_{k+1} есть наименьший номер $N > n_k$, для которого

$$Nu\left(\frac{1}{N}\right) > 2n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right).$$

Таким образом,

$$nu\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 2n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right) \quad (n_k \leqslant n < n_{k+1}) \tag{23}$$

и

$$n_{k+1} u\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) > 2n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

В силу (21) такой номер n_{k+1} заведомо найдется.

Отметим, что

$$n_{k+1} > 2n_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{25}$$

Действительно, если $n_k < n \leqslant 2n_k$, то, в силу монотонности функции $u(\delta)$,

$$nu\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 2n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right), \tag{26}$$

и, следовательно, $n \neq n_{k+1}$.

Определим теперь последовательность $\{B_n\}$, положив

$$B_1 = u(1), \quad B_n = u\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) \quad (n_k < n \leqslant n_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots). \tag{27}$$

Покажем, что эта последовательность обладает свойствами 1), 2) и 3').

Свойство 1) вытекает из того, что $n_k \uparrow \infty$, $u(\delta)$ есть неубывающая функция от δ и, согласно (22), $u(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$.

Для доказательства свойства 2) замечаем, что, полагая ради удобства, $n_0 = 0$, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} B_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} n^{-\alpha} B_n = \sum_{k=1}^{\infty} u\left(\frac{1}{n_k}\right) \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} n^{-\alpha} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} u\left(\frac{1}{n_k}\right) \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} n_k^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} u\left(\frac{1}{n_k}\right) \frac{n_k - n_{k-1}}{n_k^{\alpha}}. \tag{28}$$

Отсюда, в силу (25),

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} B_n \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{1-\alpha} u\left(\frac{1}{n_k}\right). \tag{29}$$

Далее, пользуясь неравенствами (23), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} u\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-1-\alpha} \cdot n u\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right) \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-1-\alpha} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right) \sum_{n=n_k}^{\infty} n^{-1-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant 2C_8(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} n_k u\left(\frac{1}{n_k}\right) \cdot n_k^{-\alpha} = C_9(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{1-\alpha} u\left(\frac{1}{n_k}\right).$$

В силу расходимости ряда (20), это доказывает расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{1-\alpha} u\left(\frac{1}{n_k}\right),$$

а из (29) вытекает теперь расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} B_n,$$

и свойство 2) установлено.

Остается показать, что последовательность $\{B_n\}$ обладает свойством 3'). Пусть

$$n_{k-1} < N \leqslant n_k$$

для некоторого натурального k. Имеем:

$$\sum_{n=1}^{N} B_n = \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \sum_{n=n_{\varkappa-1}+1}^{n_\varkappa} B_n + \sum_{n=n_{k-1}+1}^{N} B_n = \sum_{\varkappa=1}^{k-1} (n_\varkappa - n_{\varkappa-1})\, u\left(\frac{1}{n_\varkappa}\right) +$$
$$+ (N - n_{k-1})\, u\left(\frac{1}{n_k}\right) \leqslant \sum_{\varkappa=1}^{k-1} n_\varkappa u\left(\frac{1}{n_\varkappa}\right) + Nu\left(\frac{1}{n_k}\right). \qquad (30)$$

Пусть $N > 1$, т. е. $k > 1$. В силу (24),

$$n_\varkappa u\left(\frac{1}{n_\varkappa}\right) \leqslant 2^{\varkappa-k+1} n_{k-1} u\left(\frac{1}{n_k}\right) \quad (\varkappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1).$$

Подставляя эти оценки в неравенство (30), находим:

$$\sum_{n=1}^{N} B_n \leqslant \sum_{\varkappa=1}^{k-1} n_\varkappa u\left(\frac{1}{n_\varkappa}\right) + Nu\left(\frac{1}{n_k}\right) \leqslant$$
$$\leqslant n_{k-1} u\left(\frac{1}{n_{k-1}}\right) \sum_{\varkappa=1}^{k-1} 2^{\varkappa-k+1} + Nu\left(\frac{1}{n_k}\right) \leqslant 2 n_{k-1}\, u\left(\frac{1}{n_{k-1}}\right) + Nu\left(\frac{1}{N}\right), \qquad (31)$$

так как функция $u(\delta)$ не убывает.

Но, согласно (19),

$$n_{k-1} u\left(\frac{1}{n_{k-1}}\right) \leqslant C_3 N u\left(\frac{1}{N}\right).$$

Отсюда и из (31) следует, что

$$\sum_{n=1}^{N} B_n \leqslant 2 n_{k-1} u\left(\frac{1}{n_{k-1}}\right) + Nu\left(\frac{1}{N}\right) \leqslant 2C_3 Nu\left(\frac{1}{N}\right) + Nu\left(\frac{1}{N}\right) =$$
$$= C_{10} Nu\left(\frac{1}{N}\right) \quad (N > 1).$$

Кроме того, $B_1 = u(1)$. Отсюда окончательно

$$\sum_{n=1}^{N} B_n \leqslant C_{10} Nu\left(\frac{1}{N}\right).$$

Этим установлено, что последовательность $\{B_n\}$ обладает свойством 3′), и лемма полностью доказана.

В настоящей работе мы воспользуемся этой леммой только для $\alpha = \frac{1}{2}$.

§ 4. Теоремы

Переходим к изложению основных результатов работы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция* $u(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ *положительна, не убывает и*

$$\eta^{-1} u(\eta) \leqslant C_{11} \delta^{-1} u(\delta) \quad (0 < \delta < \eta \leqslant \pi). \qquad (32)$$

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, u\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (33)$$

расходится, то существует непрерывная периодическая функция $f_1 \overline{\in} A$, для которой

$$\omega(\delta, f_1) = O(u(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi). \tag{34}$$

Доказательство. Функция $u(\delta)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2 для $\alpha = \frac{1}{2}$. Применяя эту лемму, получаем, что существует положительная последовательность $\{B_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, обладающая свойствами:

1) $B_n \downarrow 0$, (35)

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} B_n$ расходится,

3) $\sum_{k=1}^{n} B_k \leqslant nu\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$. (36)

Воспользуемся теоремой (I) введения. Так как в силу (3) и (35)

$$B_n^* = B_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то мы получаем, что существует функция $f_1 \overline{\in} A$, для которой

$$E_n(f_1) = O(B_n) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Оценим модуль непрерывности этой функции. В силу свойства 8) модулей непрерывности, имеем

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f_1\right) = O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} B_k\right),$$

откуда, согласно (36),

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f_1\right) = O\left(u\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Пользуясь свойством 7) модулей непрерывности, выводим отсюда, что

$$\omega(\delta, f_1) = O(u(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Итак, $f_1 \overline{\in} A$ и для этой функции выполняются соотношения (34). Тем самым теорема 1 доказана.

Отметим, что эта теорема является обобщением сформулированной во введении теоремы (III).

Следствие 1. *Пусть функция $u(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ положительна, не убывает, а функция $\delta^{-1}u(\delta)$ не возрастает. Если ряд (33) расходится, то существует непрерывная периодическая функция $f_1 \overline{\in} A$, для которой*

$$\omega(\delta, f_1) = O(u(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Действительно, если функция $\delta^{-1}u(\delta)$ не возрастает, то для нее выполняется условие (32).

Согласно результатам § 2, всякий модуль непрерывности $\omega(\delta)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Отсюда вытекает

Следствие 2. *Пусть $\omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ есть модуль непрерывности. Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

расходится, то существует непрерывная периодическая функция $f_1 \overline{\in} A$, для которой

$$\omega(\delta, f_1) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

ТЕОРЕМА 2 (основная теорема). *Пусть $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ — положительная функция. Соотношения*

$$\omega(\delta, f) = O(\omega(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi) \tag{37}$$

влекут $f \in A$ в том и только том случае, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^*\left(\frac{1}{n}\right), \tag{38}$$

где $\omega^*(\delta)$ — истинная мажоранта, построенная по мажоранте $\omega(\delta)$.

Нужно доказать два утверждения:

α) Если ряд (38) сходится, то соотношения (37) влекут $f \in A$.

β) Если ряд (38) расходится, то соотношения (37) не влекут $f \in A$, т. е. существует функция $f_2 \overline{\in} A$, для которой выполняются соотношения (37).

Доказательство α). Согласно лемме 1, соотношения (37) влекут

$$\omega(\delta, f) = O(\omega^*(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Теперь $f \in A$ вытекает из сходимости ряда (38) в силу сформулированной во введении теоремы (II).

Доказательство β). Согласно результатам § 2, всякая истинная мажоранта $\omega^*(\delta)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Применяя эту теорему к $u(\delta) = \omega^*(\delta)$, получаем, что существует функция $f_2 \overline{\in} A$, для которой

$$\omega(\delta, f_2) = O(\omega^*(\delta)) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Но, в силу свойства 1) истинных мажорант,

$$\omega^*(\delta) \leqslant \omega(\delta) \quad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Поэтому для функции f_2 выполняются соотношения (37).

Тем самым установлены утверждения α) и β), и теорема 2 полностью доказана.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
25. X. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, C. R., 199 (1934), 397—400.
[2] Никольский С. М., Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности, Доклады Ак. Наук СССР, 52 (1946), 191—194.
[3] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 219—242.
[4] Szăsz O., Fourier series and mean moduli of continuity, Trans. Amer. Math. Soc., 42 (1937), 366—395.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 99—134

А. Ф. ТИМАН

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе исследуются аппроксимативные свойства произвольных линейных процессов приближения периодических функций и устанавливаются эффективные условия для того, чтобы порядок приближения, осуществляемый данным методом на обычно рассматриваемых классах функций, совпадал с порядком наилучших приближений.

Получены также асимптотические оценки приближений для широкого класса методов.

§ 1. Введение

Эта работа посвящена исследованию произвольных линейных методов суммирования рядов Фурье с точки зрения их аппроксимативных свойств. Пусть $f(x)$ — интегрируемая, периодическая периода 2π функция и

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1.1}$$

— ее ряд Фурье.

Любая треугольная матрица чисел $\lambda_k^{(n)}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,n+1,$ $\lambda_0^{(n)}=1,\ \lambda_{n+1}^{(n)}=0)$ определяет некоторый линейный метод приближения, приводящий в соответствие каждой такой функции последовательность тригонометрических полиномов n-го порядка $U_n(f;x;\lambda)$ вида:

$$U_n(f;x;\lambda)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{1.2}$$

Одной из важных задач теории приближения является задача исследования аппроксимативных свойств методов такого типа. Эти свойства в общем случае для каждого заданного класса функций $\mathfrak{M}$ определяются поведением верхних граней

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M};x;\lambda)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}|f(x)-U_n(f;x;\lambda)|, \tag{1.3}$$

которые являются их количественными характеристиками.

В настоящее время имеется ряд результатов, более или менее полно выясняющих поведение величин $\mathcal{E}_n(\mathfrak{M};x;\lambda)$ для отдельных конкретных случаев [см., например, ([2]) — ([5]), ([10]) — ([14])]. Некоторые из них дают точное значение либо асимптотический закон убывания констант $\mathcal{E}_n(\mathfrak{M};x;\lambda)$ при $n\to\infty$ для разных классов непрерывных функций [см., например, ([2]), ([12]), ([14]), ([23])], другие выражают лишь порядок убывания указанных верхних граней при неограниченном возрастании n.

Первый асимптотически точный результат такого рода для случая $\lambda_k^{(n)}=1$ $(0\leqslant k\leqslant n)$ принадлежит А. Н. Колмогорову ([12]).

К данному циклу работ относится также и работа Б. Надя ([18]), где указанная задача изучается в более общей постановке. В ней рассматриваются линейные методы приближения, для которых числа $\lambda_k^{(n)}$ при всех n являются значениями некоторой так называемой «сумматорной» функции $\lambda(u)$ $(0\leqslant u\leqslant 1)$, т. е.

$$\lambda_k^{(n)}=\lambda\left(\frac{k}{n+1}\right).$$

В этом случае, пользуясь аппаратом теории интегралов Фурье, при известных ограничениях, накладываемых на «сумматорную» функцию $\lambda(u)$, Б. Надь получил несколько результатов, дающих, в основном, представление о порядке отклонения $\mathcal{E}_n(\mathfrak{M};\,x;\,\lambda)$ для обычно встречающихся классов функций.

В этих работах с указанной точки зрения подвергались исследованию классы $W^{(r)}H^{(\alpha)}$ функций, у которых существует r-я производная, удовлетворяющая условию Липшица степени α с константой единица, и им сопряженные классы $\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}}$. В некоторых случаях рассматривались также более общие классы функций, имеющих r-ю производную, модуль непрерывности которой не превышает заданного модуля непрерывности $\omega(t)$, и им сопряженные. Их принято обозначать соответственно через $W^{(r)}H_\omega$ и $\overline{W^{(r)}H_\omega}$.

В настоящей работе мы рассматриваем произвольные линейные методы приближения и устанавливаем некоторые общие факты, определяющие их аппроксимативные свойства на этих классах.

Основными вопросами, к которым относятся полученные здесь результаты, являются следующие:

1. Какой должна быть матрица чисел $\lambda_k^{(n)}$ для того, чтобы при $n\to\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{E}_n(W^{(r)}H_\omega;\,x;\,\lambda)\\ \mathcal{E}_n(\overline{W^{(r)}H_\omega};\,x;\,\lambda)\end{array}\right\}=O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right]? \tag{1.4}$$

2. Каков асимптотический закон убывания величин $\mathcal{E}_n(\mathfrak{M};\,x;\,\lambda)$ на рассматриваемых классах?.

В § 2 получены асимптотические оценки констант (1.3) для случая приближений интегральными операторами Н. И. Ахиезера — Б. М. Левитана. Эти результаты в основном носят вспомогательный характер и в § 5 используются при получении соответствующих оценок для произвольных линейных методов суммирования. Теорема 1 § 2 может представлять также известный самостоятельный интерес. Она обобщает некоторые результаты, полученные ранее А. Н. Колмогоровым ([12]) [см. также ([21])] и С. М. Никольским ([14]) для сумм Фурье. В том же параграфе для сравнения с периодическим случаем исследуется приближение любых функций, заданных на всей вещественной оси и удовлетворяющих там условию Липшица степени α, интегральными операторами Н. И. Ахиезера — Б. М. Левитана, которые теперь уже, вообще говоря, предста-

вляют значения на действительной оси целых функций конечной степени. Теорема 2 устанавливает асимптотическую оценку соответствующих приближений в данном случае. Сравнивая ее с теоремой 1, мы приходим к выводу, примыкающему к одному весьма интересному факту относительно наилучших приближений, недавно установленному С. Н. Бернштейном в его известной работе ([6]) [см. также работу ([22]), где этот вывод сделан для случая $\alpha=0$].

В § 3 устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения, которые, так же как и теорема 1, в последующем используются для получения основных результатов.

§ 4 посвящен исследованию линейных методов, дающих наилучший порядок приближения. В нем приводятся некоторые результаты (теоремы 3—6), связанные с первым из указанных выше вопросов и выясняющие влияние структуры матрицы $\lambda_k^{(n)}$ на аппроксимативные свойства соответствующего линейного метода.

Заметим, что это влияние обнаруживается уже из общих соображений, и главным образом связано с поведением разностей $1-\lambda_k^{(n)}$ при $n\to\infty$. Так, например, если мы хотим, чтобы данный метод гарантировал равномерную аппроксимацию любой непрерывной функции, то для этого необходимо, чтобы каждый столбец матрицы $\lambda_k^{(n)}$ представлял последовательность чисел, стремящихся к единице. При этом степень осуществляемого приближения известным образом связана с быстротой данного стремления.

В частности, легко доказывается, что стремление к нулю отклонения

$$\max_x |f(x)-U_n(f;x;\lambda)|$$

не может быть более быстрым, чем любая из разностей $1-\lambda_k^{(n)}$, за исключением тривиального случая, когда $f(x)\equiv\mathrm{const}$.

В § 5, относящемся, в основном, ко второму из указанных выше вопросов, даны оценки приближений для произвольных линейных методов. Полученные неравенства не могут быть улучшены на классе всех линейных методов приближений. Существует широкий круг методов, для которых они обращаются в асимптотические равенства. Теоремы 7, 8 и 9 этого параграфа дают соответствующие оценки порядка приближения для произвольных линейных методов. Из них, как частный случай, вытекают найденные ранее С. М. Никольским ([15]) и Б. Надем ([19]) условия того, чтобы метод суммирования (1.2) гарантировал равномерное приближение любой непрерывной функции.

Наконец, в этом параграфе для линейных методов приближения с матрицей, удовлетворяющей некоторому естественному условию (условие выпуклости (4.15)), получен окончательный асимптотически точный результат (теорема 10).

В заключение заметим, что приведенные здесь предложения содержат в себе ряд известных в настоящее время оценок.

Выражаю благодарность А. Н. Колмогорову, С. М. Никольскому и Н. И. Ахиезеру за внимательное отношение к моей работе.

§ 2. Асимптотические оценки при приближении интегральными операторами Н. И. Ахиезера — Б. М. Левитана

1. Постановка вопроса. Пусть $0 < \theta_n \leqslant 1$ — некоторая последовательность чисел и

$$G_n(x) = \frac{\cos \frac{1-\theta_n}{\theta_n} x - \cos \frac{x}{\theta_n}}{\pi x^2}. \tag{2.1}$$

Известное обобщение метода суммирования Фейера, предложенное Н. И. Ахиезером и Б. М. Левитаном [см. ([1]), ([2])], сводится к тому, что каждой измеримой на вещественной оси функции $f(x)$, для которой $\frac{f(x)}{1+x^2} \in L(-\infty, \infty)$, ставится в соответствие последовательность интегральных операторов

$$\sigma_n(f; \theta_n; x) = \int_0^\infty \left\{ f\left(x + \frac{t}{n\theta_n}\right) + f\left(x - \frac{t}{n\theta_n}\right) \right\} G_n(t)\, dt. \tag{2.2}$$

В случае периодичности $f(x)$ они представляют собой тригонометрические полиномы, которые при $\theta_n \equiv 1$ обращаются в обычные суммы Фейера, а при $\theta_n = \frac{1}{n}$ совпадают с соответствующей суммой Фурье [см. также работу ([7]), где для периодических функций рассматриваются другие значения θ_n] *.

В работе автора ([23]) уже было указано на известный самостоятельный интерес, который представляет собой исследование оценок приближения указанными полиномами. Здесь будет выяснена роль этого исследования с точки зрения приложений в задаче об аппроксимативных свойствах произвольных линейных методов приближения.

Н. И. Ахиезером и Б. М. Левитаном [([1]), ([2])] были получены некоторые оценки, выражающие порядок убывания соответствующих отклонений. Более точные результаты для произвольных классов $W^{(r)}H^{(\alpha)}$ и $\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}}$ известны лишь в случае $\theta_n = \frac{1}{n}$ [см. ([12]), ([14]), ([21])].

В этом параграфе рассматриваются любые нуль-последовательности θ_n и получены соответствующие асимптотически точные результаты.

2. Периодические функции. В настоящем пункте мы рассматриваем класс $KW^{(r)}H^{(\alpha)}$ периодических периода 2π функций, имеющих производную r-го порядка, удовлетворяющую условию Липшица степени α с константой K, и класс $\overline{KW^{(r)}H^{(\alpha)}}$ функций, тригонометрически сопряженных функциям из $KW^{(r)}H^{(\alpha)}$. При этом число r может быть также и дробным. В последнем случае производная понимается в смысле Вейля [см. ([9])]. Точнее, периодическая периода 2π функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = 0, \tag{2.3}$$

* Следует отметить, что интегральные выражения (2.2) представляют собой обобщение усеченных средних арифметических сумм Фурье (суммы Валле-Пуссена), к которым они сводятся, если рассматриваемые функции $f(x)$ являются периодическими. В этом случае они исследовались ранее С. М. Никольским ([28]), получившим асимптотическую оценку соответствующих констант Лебега.

есть производная r-го порядка от периодической периода 2π функции $f(x)$ со средним значением, по периоду равным нулю, если эти две функции связаны между собой равенством

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left[k(t-x) + \frac{r\pi}{2}\right] \varphi(t)\, dt. \tag{2.4}$$

Примечание. В силу известных свойств функций, удовлетворяющих условию Липшица первой степени, класс $KW^{(p)}H^{(1)}$ совпадает с классом $KW^{(p+1)}$ функций, представимых равенством (2.4), в котором $r = p + 1$ и $\varphi(t)$ — любая измеримая периода 2π функция, удовлетворяющая условию (1.3) и такая, что $|\varphi(x)| \leqslant K$ почти всюду.

Следующая теорема для любой нуль-последовательности θ_n дает решение задачи об асимптотическом поведении верхних граней

$$\mathcal{E}_{\sigma_n}(KW^{(r)}H^{(\alpha)}; x) = \sup_{f \in KW^{(r)}H^{(\alpha)}} |f(x) - \sigma_n(f; \theta_n; x)|, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{E}_{\sigma_n}(\overline{KW^{(r)}H^{(\alpha)}}; x) = \sup_{f \in \overline{KW^{(r)}H^{(\alpha)}}} |f(x) - \sigma_n(f; \theta_n; x)| \tag{2.6}$$

при $n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 1.* *Для любых чисел r и α ($r \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$) и для любой последовательности $\theta_n \to 0$ при $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E}_{\sigma_n}(KW^{(r)}H^{(\alpha)}; x) \\ \\ \mathcal{E}_{\sigma_n}(\overline{KW^{(r)}H^{(\alpha)}}; x) \end{array}\right\} = \frac{2^{\alpha+1} K \ln \frac{1}{\theta_n^*}}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\, dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{2.7}$$

где $\theta_n^* = \max\left\{\theta_n; \frac{1}{n}\right\}$ *и* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно всех последовательностей* $\{\theta_n\}$, *для которых* $\theta_n \leqslant 1 - \theta$ $(\theta > 0)$.

Доказательство. Нетрудно показать, что, благодаря периодичности функции $f(x)$, суммы (2.2) могут быть представлены в виде:

$$\sigma_n(f; \theta_n; x) = \sum_{|k|<n} \lambda\left(\frac{k}{n}\right) c_k e^{ikx},$$

где c_k — комплексные коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и

$$\lambda(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |u| \leqslant 1 - \theta_n, \\ \frac{1}{\theta_n}(1 - |u|), & 1 - \theta_n \leqslant |u| \leqslant 1. \end{cases}$$

Положив

$$m = [n(1-\theta_n)], \quad D_m(t) = \frac{\sin \frac{2m+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad K_{n-1}(t) = \frac{\sin^2 n \frac{t}{2}}{2n \sin^2 \frac{t}{2}},$$

* Эта теорема без доказательства была ранее опубликована в работе автора ([23].)

можно написать

$$\sigma_n(f;\,\theta_n;\,x)=\frac{1}{\theta_n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left\{K_{n-1}(t)-\frac{m+1}{n}K_m(t)+\frac{m+1-n(1-\theta_n)}{n}D_m(t)\right\}dt.$$

Очевидно, что если $\theta_n\leqslant\frac{1}{n}$, то $m=n-1$, а для данного случая теорема уже доказана [см. (14)].

Пусть теперь $\theta_n>\frac{1}{n}$, т. е. $m\leqslant n-2$. Тогда

$$\sigma_n(f;\,\theta_n;\,x)=$$

$$=\frac{1}{n\theta_n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\ (x+)\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}D_\nu(t)-\sum_{\nu=0}^{m}D_\nu(t)+[m+1-n(1-\theta_n)]\,D_m(t)\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{(n-m)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sum_{\nu=m}^{n-1}D_\nu(t)\,dt,$$

т. е.

$$\sigma_n(f;\,\theta_n;\,x)=\frac{1}{n-m}\sum_{\nu=m}^{n-1}$$

Отсюда, обозначив $\Delta_\nu(f;\,x)=f(x)-S_\nu(f;\,x)$, легко вывести, что

$$f(x)-\sigma_n(f;\,\theta_n;\,x)=\frac{1}{n-m}\sum_{\nu=m}^{n-1}\Delta_\nu(f;\,x). \tag{2.8}$$

Из очевидных соображений вытекает, что величины $\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}H^{(\alpha)};\,x)$ и $\mathscr{E}_{\sigma_n}(\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}};\,x)$ не зависят от x. Поэтому удобно все рассуждения проводить при $x=0$.

В работе А. Н. Колмогорова (12) [см. также (21)] было показано, что в наших предположениях

$$\Delta_\nu(f;\,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_\nu^{(r)}(t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{2.9}$$

где

$$D_n^{(r)}(t)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r},\quad \varphi(t)=f^{(r)}(t).$$

Поэтому

$$f(0)-\sigma_n(f;\,\theta_n;\,0)=\frac{1}{(n-m)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=m}^{n-1}D_\nu^{(r)}(t)\,dt. \tag{2.10}$$

Рассмотрим отдельно случаи $0<\alpha<1$ и $\alpha=1$.

Первый случай. $0<\alpha<1$. Из известных уже соображений следует, что при нахождении величины $\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}H^{(\alpha)};\,0)$ мы можем в равенстве (2.10) считать, что $\varphi(0)=0$, т. е. считать в нашей задаче верхнюю грань распространенной не на весь класс периодических функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$ с константой единица, а только на его подкласс $H_0^{(\alpha)}$ функций, обращающихся в нуль при $t=0$. Воспользовавшись соотношением

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\, D_\nu^{(r)}(t)\, dt = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \quad m \leqslant \nu \leqslant n-1, \tag{A}$$

имеющим место равномерно по всем $\varphi(t) \in H_0^{(\alpha)}$ [см. ([14])], найдем, что

$$f(0) - \sigma_n(f; \theta_n; 0) = \frac{1}{(n-m)\pi} \int_{M_n} \varphi(t) \sum_{\nu=m}^{n-1} D_\nu^{(r)}(t)\, dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{2.11}$$

где $M_n = [-\pi, \pi] - \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. Применим известное тождество [см. ([12]), ([14]) и ([21])]

$$D_\nu^{(r)}(t) = -\frac{A_\nu^{(r)}(t)}{(\nu+1)^r} - g_\nu^{(r)}(t), \tag{B}$$

где

$$A_\nu^{(r)}(t) = \frac{\sin\left(\frac{2\nu+1}{2}t + \frac{r\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$g_\nu^{(r)}(t) = \Delta(\nu+1)\,[B_\nu^{(r)}(t) + C_\nu^{(r)}(t)] - \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \Delta^2(k)\,[B_k^{(r)}(t) + C_k^{(r)}(t)],$$

$$B_k^{(r)}(t) = -\frac{\cos\frac{r\pi}{2}\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}, \quad C_k^{(r)}(t) = \frac{\sin\frac{r\pi}{2}\sin(k+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}},$$

$$\Delta(k) = \frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r}, \qquad \Delta^2(k) = \Delta(k) - \Delta(k+1).$$

Тогда из (2.11) получим, что

$$|f(0) - \sigma_n(f; \theta_n; 0)| = \left| \frac{1}{(n-m)\pi} \int_{M_n} \varphi(t) \sum_{\nu=m}^{n-1} \frac{A_\nu^{(r)}(t)}{(\nu+1)^r}\, dt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(n-m)\pi} \int_{M_n} \varphi(t) \sum_{\nu=m}^{n-1} g_\nu^{(r)}(t)\, dt \right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Можно показать, что

$$\int_{M_n} \varphi(t)\, g_\nu^{(r)}(t)\, dt = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \quad m \leqslant \nu < n, \tag{C}$$

равномерно по всем функциям $\varphi(t)$ из класса $H_0^{(\alpha)}$ [см. ([14])]. Поэтому

$$|f(0) - \sigma_n(f; \theta_n; 0) = \frac{1}{(n-m)\pi} \left| \int_{M_n} \varphi(t) \sum_{\nu=m}^{n-1} \frac{A_\nu^{(r)}(t)}{(\nu+1)^r}\, dt \right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right),$$

или

$$|f(0) - \sigma_n(f; \theta_n; 0)| = \frac{1}{(n-m)\pi} \left| \frac{1}{r} \int_{M_n} \varphi(t) \sum_{\nu=m}^{n-1} A_\nu^{(r)}(t)\, dt + \right.$$
$$\left. + \int_{M_n} \varphi(t) \sum_{\nu=m}^{n-1} \left\{ \frac{1}{(\nu+1)^r} - \frac{1}{n^r} \right\} A_\nu^{(r)}(t)\, dt \right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \tag{2.12}$$

Для каждой пары чисел n, m и для данной функции $\varphi(t) \in H_0^{(\alpha)}$ обозначим через N целое число, для которого

$$\sum_{\nu=m}^{N-1} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \varphi(t) A_\nu^{(r)}(t)\, dt = \max_{m \leqslant k \leqslant n-1} \sum_{\nu=m}^{k} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \varphi(t) A_\nu^{(r)}(t)\, dt, \quad m \leqslant N < n.$$

Применяя преобразование Абеля и учитывая положительность чисел $\frac{1}{(\nu+1)^r} - \frac{1}{n^r}$, $m \leqslant \nu < n-1$, нетрудно установить неравенство

$$\frac{1}{(n-m)\pi} \left| \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \varphi(t) \sum_{\nu=m}^{n-2} \left\{ \frac{1}{(\nu+1)^r} - \frac{1}{n^r} \right\} A_\nu^{(r)}(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \frac{1}{(m+1)^r} - \frac{1}{n^r} \right\} \frac{1}{(n-m)\pi} \left| \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \varphi(t) \sum_{\nu=m}^{N-1} A_\nu^{(r)}(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\theta_n}{n^r (n-m)\pi} \left| \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \varphi(t) \sum_{\nu=m}^{N-1} A_\nu^{(r)}(t)\, dt \right| = \frac{C\theta_n}{n^r} I_N^{(n)}(\varphi), \tag{2.13}$$

где C — некоторая положительная константа, не зависящая от n и φ. В силу тождества

$$\sum_{\nu=0}^{p} A_\nu^{(r)}(t) = \frac{\sin (p+1)\frac{t}{2} \sin\left[(p+1)\frac{t}{2} + \frac{r\pi}{2}\right]}{2\sin^2 \frac{t}{2}},$$

мы получим

$$\sum_{\nu=m}^{N-1} A_\nu^{(r)}(t) = \frac{\left(\sin^2 N\frac{t}{2} - \sin^2 m\frac{t}{2}\right)\cos\frac{r\pi}{2} + \frac{1}{2}(\sin Nt - \sin mt)\sin\frac{r\pi}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{\sin (N-m)\frac{t}{2} \sin\left[(N+m)\frac{t}{2} + \frac{r\pi}{2}\right]}{2\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Таким образом,

$$I_N^{(n)}(\varphi) = \frac{1}{(n-m)\pi} \left| \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \varphi(t) \frac{\sin (N-m)\frac{t}{2} \sin\left[(N+m)\frac{t}{2} + \frac{r\pi}{2}\right]}{2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt \right|. \tag{2.14}$$

Обозначим через l наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $l \geqslant \frac{r}{2}$, и положим $t_\nu = \frac{2\left(\nu + l - \frac{r}{2}\right)\pi}{N+m}$.

Пусть для $\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \pi$

$$K_{\nu, N}(t) = \begin{cases} 0, & t \overline{\in} \left[t_{\nu-\frac{1}{2}}, t_{\nu+\frac{1}{2}}\right], \\ \dfrac{\sin(N-m)\frac{t}{2}\sin\left[(N+m)\frac{t}{2}+\frac{r\pi}{2}\right]}{2\sin^2\frac{t}{2}}, & t \in \left[t_{\nu-\frac{1}{2}}, t_{\nu+\frac{1}{2}}\right]. \end{cases}$$

Представим $K_{\nu, N}(t)$ в виде суммы двух функций:

$$K_{\nu, N}(t) = \Psi_{\nu, N}(t) + r_{\nu, N}(t),$$

где

$$\Psi_{\nu, N}(t_\nu + t) = \begin{cases} K_{\nu, N}(t_\nu + t), & t \geqslant 0, \\ -K_{\nu, N}(t_\nu - t), & t \leqslant 0, \end{cases}$$

и убедимся, что

$$\int_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \varphi(t)\, r_{\nu, N}(t)\, dt = O\left(\frac{N-m}{n^\alpha \nu^{2-\alpha}}\right) \tag{2.15}$$

равномерно по всем функциям $\varphi \in H_0^{(\alpha)}$.

Справедливость этого соотношения вытекает из неравенства

$$|\varphi(t)| = |\varphi(t) - \varphi(0)| \leqslant |t|^\alpha$$

и из того, что

$$\left| \int_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{\sin(N-m)\frac{t}{2}\sin\left[(N+m)\frac{t}{2}+\frac{r\pi}{2}\right]}{\sin^2\frac{t}{2}}\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{-\frac{\pi}{N+m}}^{\frac{\pi}{N+m}} \frac{\sin(N+m)\frac{t}{2}\sin\frac{1}{2}(N-m)(t_\nu+t)}{\sin^2\frac{1}{2}(t_\nu+t)}\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{N+m}} \sin(N+m)\frac{t}{2} \left\{ \frac{\sin\frac{1}{2}(N-m)(t_\nu+t)}{\sin^2\frac{1}{2}(t_\nu+t)} - \frac{\sin\frac{1}{2}(N-m)(t_\nu-t)}{\sin^2\frac{1}{2}(t_\nu-t)} \right\} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{N+m}} \left| \frac{\sin(N+m)\frac{t}{2}\left\{\sin\frac{1}{2}(N-m)(t_\nu+t) - \sin\frac{1}{2}(N-m)(t_\nu-t)\right\}}{\sin^2\frac{1}{2}(t_\nu+t)}\, dt \right| +$$

$$+ \left| \int_0^{\frac{\pi}{N+m}} \sin(N+m)\frac{t}{2}\sin\frac{1}{2}(N-m)(t_\nu-t) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left\{ \frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}(t_\nu+t)} - \frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}(t_\nu-t)} \right\} dt \right| = O\left(\frac{N-m}{\nu^2}\right).$$

Далее, так как $\frac{1}{n} \leqslant t_{\frac{1}{2}}$, $t_0 > 0$, $t_\nu < \pi$ для $\nu \leqslant \frac{1}{2}(N+m-1)$, а $t_\nu > \pi$ для $\nu > \frac{1}{2}(N+m)$, то, в силу равенств

$$\frac{1}{n-m}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{t_{\frac{1}{2}}} \varphi(t)\frac{\sin(N-m)\frac{t}{2}\sin\left[(N+m)\frac{t}{2}+\frac{r\pi}{2}\right]}{\sin^2\frac{t}{2}}dt = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

$$\frac{1}{n-m}\int\limits_{t_{N_*-\frac{1}{2}}}^{\pi} \varphi(t)\frac{\sin(N-m)\frac{t}{2}\sin\left[(N+m)\frac{t}{2}+\frac{r\pi}{2}\right]}{\sin^2\frac{t}{2}}dt = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $N_* = \left[\frac{1}{2}(N+m-1)\right]$, мы получим, что

$$I_N^{(n)}(\varphi) = \frac{1}{(n-m)\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{N_*-1}\int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \varphi(t)K_{\nu,N}(t)\,dt\right| + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

откуда

$$I_N^{(n)}(\varphi) = \frac{1}{(n-m)\pi}\left|\int\limits_{-\frac{\pi}{N+m}}^{\frac{\pi}{N+m}}\sum_{\nu=1}^{N_*-1}\varphi(t_\nu+t)K_{\nu,N}(t_\nu+t)\,dt\right| + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

или

$$I_N^{(n)}(\varphi) = \frac{1}{(n-m)\pi}\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{N+m}}\sum_{\nu=1}^{N_*-1}\{\varphi(t_\nu+t)K_{\nu,N}(t_\nu+t)-\varphi(t_\nu-t)K_{\nu,N}(t_\nu-t)\}dt\right| =$$

$$= \frac{1}{(n-m)\pi}\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{N+m}}\sum_{\nu=1}^{N_*-1}\{\varphi(t_\nu+t)-\varphi(t_\nu-t)\}\Psi_{\nu,N}(t_\nu+t)\}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\frac{\pi}{N+m}}\sum_{\nu=1}^{N_*-1}\varphi(t_\nu-t)r_{\nu,N}(t_\nu-t)\,dt\right| + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Но так как, в силу (2.15),

$$\frac{1}{(n-m)\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{N+m}}\sum_{\nu=1}^{N_*-1}\varphi(t_\nu-t)r_{\nu,N}(t_\nu-t)\,dt = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{\nu=1}^{N_*-1}O\left(\frac{1}{\nu^{2-\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

то

$$I_N^{(n)}(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{(n-m)\pi}\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{N+m}}\sum_{\nu=1}^{N_*-1}\{\varphi(t_\nu+t)-\varphi(t_\nu-t)\}\Psi_{\nu,N}(t_\nu+t)\,dt\right| + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \quad (2.16)$$

Из этого соотношения, благодаря тому что $\varphi(t) \in H_0^{(\alpha)}$, следует неравенство

$$I_N^{(n)}(\varphi) \leqslant \frac{2^\alpha}{(n-m)\pi} \sum_{\nu=1}^{N_*-1} \int_0^{\frac{\pi}{N+m}} t^\alpha |\Psi_{\nu, N}(t_\nu + t)| \, dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad (2.17)$$

т. е.

$$I_N^{(n)}(\varphi) \leqslant \frac{2^{\alpha-1}}{(n-m)\pi} \sum_{\nu=1}^{N_*-1} \int_0^{\frac{\pi}{N+m}} t^\alpha \frac{\sin (N+m)\frac{t}{2} \left| \sin \frac{1}{2}(N-m)(t_\nu + t) \right|}{\sin^2 \frac{1}{2}(t_\nu + t)} \, dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$I_N^{(n)}(\varphi) \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{(n-m)\pi} \sum_{\nu=1}^{N_*-1} \int_0^{\frac{\pi}{N+m}} t^\alpha \frac{\sin (N+m)\frac{t}{2} \left| \sin \frac{1}{2}(N-m) t_\nu \right|}{t_\nu^2} \, dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{2^{\alpha-1}(N+m)^2}{(n-m)\pi^3} \sum_{\nu=1}^{N_*-1} \frac{\left| \sin (N-m)\frac{\nu\pi}{N+m} \right|}{\nu^2} \int_0^{\frac{\pi}{N+m}} t^\alpha \sin (N+m)\frac{t}{2} \, dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{N+m}\right)^\alpha \frac{2^\alpha}{\pi^2} \frac{N+m}{\pi(N-m)} \sum_{\nu=1}^{N_*-1} \frac{\left| \sin \nu \frac{N-m}{N+m}\pi \right|}{\nu^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t \, dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \qquad (2.18)$$

Заметим, кроме того, что

$$\frac{N+m}{\pi(N-m)} \sum_{\nu=1}^{N_*-1} \frac{\left| \sin \nu \frac{N-m}{N+m}\pi \right|}{\nu^2} = \frac{N+m}{\pi(N-m)} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{N+m}{N-m}\right]} \frac{\sin \nu \frac{N-m}{N+m}\pi}{\nu^2} +$$

$$+ \frac{N+m}{\pi(N-m)} \sum_{\nu=\left[\frac{N+m}{N-m}\right]+1}^{N_*-1} \frac{\left| \sin \nu \frac{N-m}{N+m}\pi \right|}{\nu^2} = \frac{N+m}{\pi(N-m)} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{N+m}{N-m}\right]} \frac{\sin \nu \frac{N-m}{N+m}\pi}{\nu^2} + O(1) =$$

$$= \frac{N+m}{\pi(N-m)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu \frac{N-m}{N+m}\pi}{\nu^2} + O(1).$$

Если еще учесть, что для $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^2} = -\int_0^x \ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) dt,$$

и равенство

$$-\int_0^x \ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) dt = -\int_0^x \ln [t + O(t^3)] \, dt = -\int_0^x \ln t \, dt - \int_0^x \ln [1 + O(t^2)] \, dt,$$

из которого следует, что при $x \to 0$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^2} = -\int_0^x \ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) dt = -\int_0^x \ln t \, dt + O(x) = x \ln \frac{1}{x} + O(x),$$

то, взяв $x = \frac{N-m}{N+m}\pi$, найдем:

$$\frac{N+m}{\pi(N-m)} \sum_{\nu=1}^{N_*-1} \frac{\left|\sin \nu \frac{N-m}{N+m}\pi\right|}{\nu^2} = \ln \frac{N+m}{N-m} + O(1).$$

Стало быть, в силу (2.16), для любой функции $\varphi(t) \in H_0^{(\alpha)}$ $(0 < \alpha < 1)$

$$I_N^{(n)}(\varphi) \leqslant \left(\frac{2}{N+m}\right)^{\alpha} \frac{2^{\alpha}}{\pi^2} \ln \frac{N+m}{N-m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} \sin t\, dt + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

или

$$I_N^{(n)}(\varphi) \leqslant \frac{2^{\alpha} \ln \frac{1}{\theta_n}}{\pi^2 n^{\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} \sin t\, dt + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right). \tag{2.19}$$

Рассуждая аналогично, мы получим такое же неравенство для интеграла

$$I_{N'}^{(n)}(\varphi) = \frac{1}{(n-m)\pi} \left| \int_{-\pi}^{-\frac{1}{n}} \varphi(t) \sum_{\nu=m}^{N'-1} A_{\nu}^{(r)}(t)\, dt \right|,$$

где N' определяется при помощи тех же соображений, что и число N. В силу (2.19) и (2.13), мы из (2.12) находим, что для рассматриваемых функций $f(x)$

$$|f(0) - \sigma_n(f;\, \theta_n;\, 0)| = \frac{1}{n^r (n-m)\pi} \left| \int_{M_n} \varphi(t) \sum_{\nu=m}^{n-1} A_{\nu}^{(r)}(t)\, dt \right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Применяя к двум интегралам, стоящим в правой части последнего соотношения, неравенство (2.19) при $N = n$ и ему аналогичное $\Big($для промежутка $\left(-\pi,\, -\frac{1}{n}\right)\Big)$ при $N' = n$, мы, таким образом, получим для $0 < \alpha < 1$ асимптотическое неравенство

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(KW^{(r)}H^{(\alpha)};\, 0) \leqslant \frac{2^{\alpha+1} K \ln \frac{1}{\theta_n}}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} \sin t\, dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \tag{2.20}$$

С другой стороны, для каждого n можно указать функцию $f_n(x) \in KW^{(r)}H^{(\alpha)}$ такую, что $|f_n(0) - \sigma_n(f_n;\, \theta_n;\, 0)|$ с точностью до слагаемого, порядок которого есть $O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$, совпадает с правой частью (2.20). Для этого достаточно взять функцию $f_n(x)$, у которой r-я производная $\varphi_n(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ определяется равенствами

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant t_1, \quad t_{n_*} \leqslant x \leqslant \pi, \\ (-1)^{\nu}\, 2^{\alpha-1} K (x - t_{\nu})^{\alpha}, & t_{\nu} \leqslant x \leqslant t_{\nu+\frac{1}{2}}, \\ (-1)^{\nu}\, 2^{\alpha-1} K (t_{\nu+1} - x)^{\alpha}, & t_{\nu+\frac{1}{2}} \leqslant x \leqslant t_{\nu+1}, \end{cases} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, n_* - 1,$$

и аналогичными равенствами на отрезке $[-\pi, 0]$.

То, что $\varphi_n(x)$ принадлежит классу $H_0^{(\alpha)}$, проверяется непосредственно. К тому же из (2.16) при $N=n$ легко усмотреть, что для функции $\varphi_n(x)$ неравенство (2.17) обратится в равенство ($K=1$). Если теперь учесть, что все последующие за неравенством (2.17) преобразования для получения (2.19) имели характер асимптотических равенств, то отсюда получим, что $\varphi_n(x)$ есть экстремальная функция.

Второй случай. $\alpha=1$. Учитывая примечание этого пункта (стр. 103) и рассуждая аналогично тому, как мы рассуждали при получении (2.12), найдем, что в этом случае

$$|f_n(0)-\sigma_n(f_n;\,\theta_n;\,0)=\frac{1}{n^{r+1}(n-m)\pi}\left|\int\limits_{M_n}\varphi(t)\sum_{\nu=m}^{n-1}A_\nu^{(r+1)}(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{M_n}\varphi(t)\sum_{\nu=m}^{n-1}\left\{\frac{1}{(\nu+1)^{r+1}}-\frac{1}{n^{r+1}}\right\}A_\nu^{(r+1)}(t)\,dt\right|+O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right), \qquad (2.21)$$

где $\varphi(t)=f^{(r+1)}(t)$ всюду, где $(r+1)$-я производная функции $f(t)$ существует. Задача, таким образом, сводится к нахождению верхней грани правой части (2.21) по всем измеримым периода 2π функциям, удовлетворяющим, кроме (2.3), условию $|\varphi(x)|\leqslant 1$. По этой причине

$$\frac{1}{(n-m)\pi}\left|\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=m}^{n-2}\left\{\frac{1}{(\nu+1)^{r+1}}-\frac{1}{n^{r+1}}\right\}A_\nu^{(r+1)}(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C\theta_n}{n^{r+1}(n-m)\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}\left|\frac{\sin(N-m)\frac{t}{2}\cdot\sin\left[(N+m)\frac{t}{2}+\frac{(r+1)\pi}{2}\right]}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right|dt,$$

где N определяется так же, как и при получении (2.13). Вычисления, аналогичные тем, которые проведены нами в ([22]) при получении соответствующих констант Лебега, показывают, что

$$\frac{1}{(n-m)\pi}\int\limits_{\pm\frac{1}{n}}^{\pm\pi}\left|\frac{\sin(N-m)\frac{t}{2}\sin\left[(N+m)\frac{t}{2}+\frac{(r+1)\pi}{2}\right]}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right|dt=\pm\frac{2}{\pi^2}\ln\frac{1}{\theta_n}+O(1). \qquad (2.22)$$

Следовательно, в силу (2.21), для любой функции $f(x)\in W^{(r)}H^{(1)}$ справедливо асимптотическое равенство

$$|f(0)-\sigma_n(f;\,\theta_n;\,0)|=$$

$$=\frac{1}{n^{r+1}(n-m)\pi}\left|\int\limits_{M_n}\varphi(t)\frac{\sin(n-m)\frac{t}{2}\sin\left[(n+m)\frac{t}{2}+\frac{(r+1)\pi}{2}\right]}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|+O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$$

равномерно по всем $f\in W^{(r)}H^{(1)}$.

Поэтому, как легко видеть, в нашем случае

$$\mathscr{E}_{\sigma_n}(W^{(r)}H^{(1)};\,0)=$$

$$=\frac{1}{n^{r+1}(n-m)\pi}\int\limits_{M_n}\left|\frac{\sin(n-m)\frac{t}{2}\sin\left[(n+m)\frac{t}{2}+\frac{(r+1)\pi}{2}\right]}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right|dt+O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

Остается еще раз применить равенство (2.22) при $N=n$, чтобы завершить доказательство первой части теоремы в случае $\alpha=1$.

Доказательство второй части теоремы легко сводится к рассуждениям, проведенным при доказательстве первой части [см., например, ([14])].

3. **Произвольные функции класса** $\operatorname{Lip}\alpha$ **на всей вещественной оси.** В этом пункте для сравнения с периодическим случаем, исследованным в п. 2, рассматриваются любые функции, заданные на всей числовой оси и удовлетворяющие там условию Липшица степени α с данной константой K (класс $KH^{(\alpha)}$). Так же как и при рассмотрении других классов функций, заданных на бесконечной оси, в качестве аппарата приближения естественно пользоваться функциями, представляющими значения на вещественной оси целых функций конечной степени. Таким, весьма удобным по ряду причин $\left(\text{по крайней мере для случая } 0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}\right)$ аппаратом приближения являются интегральные операторы (2.2), представляющие в этом случае значения на действительной оси целых функций степени $n-1$.

Следующая теорема устанавливает асимптотическую оценку отклонения рассматриваемых здесь функций $f(x)$ от соответствующих функций $\sigma_n(f;\,\theta_n;\,x)$ при $\theta_n\to 0$.

ТЕОРЕМА 2. *При любом* $0\leqslant\alpha<1$ *и* $n\to\infty$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\sup_{f\in KH^{(\alpha)}}|f(x)-\sigma_n(f;\,\theta_n;\,x)|=\frac{2^{\alpha+1}K}{\pi^2n^\alpha}\ln\frac{1}{\theta_n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t^\alpha\sin t\,dt+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),\qquad(2.23)$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно всех последовательностей* $\{\theta_n\}$.

Доказательство. Представим последовательность $\sigma_n(f;\,\theta_n;\,x)$ в форме

$$\sigma_n(f;\,\theta_n;\,x)=\frac{1}{n\theta_n\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\frac{\cos n(1-\theta_n)t-\cos nt}{t^2}\,dt\qquad(2.24)$$

и заметим, что верхняя грань в левой части (2.23) не зависит от x. Кроме того, в силу известных свойств операторов (2.2) [см., например, ([1])], без ограничения общности можно считать, что эта верхняя грань распространяется не на весь класс $KH^{(\alpha)}$, а лишь на его подкласс $KH_0^{(\alpha)}$ четных функций, обращающихся в ноль в точке $x=0$, и что $K=1$. Таким образом задача сводится к нахождению асимптотического поведения величины

$$\sup_{f\in H_0^{(\alpha)}}\sigma_n(f;\,\theta_n;\,x)\qquad(K=1).$$

Отправляясь от представления (2.24), нетрудно получить, что если $f\in H_0^{(\alpha)}$, то

$$\sigma_n(f;\,\theta_n;\,0)=\frac{4}{n\theta_n\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{2k-1}{2\tau_n}\pi}^{\frac{2k+1}{2\tau_n}\pi}\frac{\sin\tau_nt\sin\frac{1}{2}n\theta_nt}{t^2}\,dt+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

где $\tau_n = \frac{2-\theta_n}{2} n$ и $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно всех функций класса $H_0^{(\alpha)}$ и всех последовательностей $\theta_n > 0$.

Пусть

$$K_{\nu, n}(t) = \begin{cases} 0, & t \,\overline{\in} \left[\frac{2\nu-1}{2\tau_n}\pi,\ \frac{2\nu+1}{2\tau}\pi\right], \\ \frac{\sin \tau_n t \sin \frac{1}{2} n\theta_n t}{t^2}, & t \,\overline{\in} \left[\frac{2\nu-1}{2\tau_n}\pi,\ \frac{2\nu+1}{2\tau_n}\pi\right], \end{cases}$$

$$\Psi_{\nu, n}\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} + t\right) = \begin{cases} K_{\nu, n}\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} + t\right), & t \geqslant 0, \\ -K_{\nu, n}\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} - t\right), & t \leqslant 0, \end{cases}$$

$$r_{\nu, n}(t) = K_{\nu, n}(t) - \Psi_{\nu, n}(t).$$

Убедимся, что

$$\int\limits_{\frac{2\nu-1}{2\tau_\pi}\pi}^{\frac{2\nu+1}{2\tau_n}\pi} f(t)\, r_{\nu, n}(t)\, dt = O\left(\frac{\theta_n}{n^{\alpha-1}\nu^{2-\alpha}}\right) \tag{2.25}$$

равномерно по всем функциям $f(t) \in H_0^{(\alpha)}$ и всем последовательностям θ_n. Это легко проверяется на основании того, что

$$|f(t)| = |f(t) - f(0)| \leqslant |t|^{\alpha}$$

и в силу соотношения

$$\left| \int\limits_{\frac{2\nu-1}{2\tau_n}\pi}^{\frac{2\nu+1}{2\tau_n}\pi} \frac{\sin \tau_n t \sin \frac{1}{2} n\theta_n t}{t^2}\, dt \right| = \left| \int\limits_{-\frac{\pi}{2\tau_n}}^{\frac{\pi}{2\tau_n}} \frac{\sin \tau_n t \sin \frac{1}{2} n\theta_n \left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} + t\right)}{\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} + t\right)^2}\, dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\tau_n}} \sin \tau_n t \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2} n\theta_n \left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} + t\right)}{\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} + t\right)^2} - \frac{\sin \frac{1}{2} n\theta_n \left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} - t\right)}{\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} - t\right)^2} \right\} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\tau_n}} \frac{\sin \tau_n t \left\{ \sin \frac{1}{2} n\theta_n \left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} + t\right) - \sin \frac{1}{2} n\theta_n \left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} - t\right) \right\}}{\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} + t\right)^2}\, dt \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\tau_n}} \sin \tau_n t \sin \frac{1}{2} n\theta_n \left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} - t\right) \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} + t\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n} - t\right)^2} \right\} dt \right| = O\left(\frac{n\theta_n}{\nu^2}\right).$$

Стало быть, применяя соотношение (2.25), получаем:

$$\sigma_n(f;\ \theta_n;\ 0) = \frac{4}{n\theta_n\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\frac{2\nu-1}{2\tau_n}\pi}^{\frac{2\nu+1}{2\tau_n}\pi} f(t)\,K_{\nu,\,n}(t)\,dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{4}{n\theta_n\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2\tau_n}}\left[f\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}+t\right)K_{\nu,\,n}\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}+t\right) - f\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}-t\right)K_{\nu,\,n}\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}-t\right)\right]dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{4}{n\theta_n\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2\tau_n}}\left[f\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}+t\right) - f\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}-t\right)\right]\Psi_{\nu,\,n}\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}+t\right)dt +$$

$$+ \frac{4}{n\theta_n\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2\tau_n}} f\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}-t\right)r_{\nu,n}\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}-t\right)dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{4}{n\theta_n\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2\tau_n}}\left[f\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}+t\right) - f\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}-t\right)\right]\Psi_{\nu,\,n}\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}+t\right)dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Отсюда мы находим, что

$$|\sigma_n(f;\ \theta_n;\ 0)| \leqslant \frac{2^{\alpha+2}}{n\theta_n\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2\tau_n}} t^\alpha\left|\Psi_{\nu,\,n}\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}+t\right)\right|dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{2^{\alpha+2}}{n\theta_n\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2\tau_n}} t^\alpha\,\frac{\sin\tau_n t\left|\sin\frac{1}{2}n\theta_n\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}+t\right)\right|}{\left(\frac{\nu\pi}{\tau_n}+t\right)^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \qquad (2.26)$$

Следовательно,

$$|\sigma_n(f;\ \theta_n;\ 0)| \leqslant \frac{2^{\alpha+2}\tau_n^{\ 1-\alpha}}{n\theta_n\pi^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha\sin t\,dt\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu\frac{n\theta_n\pi}{2\tau_n}}{\nu^2} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Теперь нетрудно обнаружить, что

$$|\sigma_n(f;\ \theta_n;\ 0)| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha}\ln\frac{1}{\theta_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha\sin t\,dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

равномерно по всем функциям класса $H_0^{(\alpha)}$ и всем последовательностям θ_n. Остается еще заметить, что правая часть неравенства (2.26) на рассматриваемом классе функций достигается.

§ 3. Вспомогательные леммы

В этом параграфе устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения, нужные для получения основных результатов.

ЛЕММА 1. *Пусть для любых n, $k=1, 2, 3, \ldots$ и для некоторой функции $\omega(t)$, являющейся модулем непрерывности,*

$$c_k^{(n)}(\omega)=\frac{2}{k\pi}\int\limits_0^{\frac{k\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{nk}\right)\sin t\,dt. \tag{3.1}$$

Тогда справедливо соотношение

$$c_{2k+1}^{(n)}(\omega)=O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{k}\right] \tag{3.2}$$

равномерно по всем n и k. Кроме того,

$$c_1^{(n-1)}(\omega)-c_1^{(n)}(\omega)=O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right]. \tag{3.3}$$

Равенство (3.2) после интегрирования по частям немедленно вытекает из тождества

$$c_{2k+1}^{(n)}(\omega)=\frac{2}{\pi(2k+1)}\int\limits_0^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\cos t\,d\omega\left[\frac{2t}{n(2k+1)}\right],$$

если учесть, что $\omega(t)$ монотонно возрастает.

Далее, так как

$$c_1^{(n-1)}(\omega)-c_1^{(n)}(\omega)=\frac{2(n-1)}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2(\pi-1)}}\omega(2t)\sin(n-1)t\,dt-$$

$$-\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\omega(2t)\sin nt\,dt=\frac{4n}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\omega(2t)\cos\frac{2n-1}{2}t\sin t dt+O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4n}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}t\omega(2t)\,dt+O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right],$$

то отсюда следует и равенство (3.3).

ЛЕММА 2. *Для любого целого $r>0$ и для любых n, $p=1, 2, 3, \ldots$ имеют место соотношения*

$$\sum_{k=n+1}^{(2p+1)n-1}\frac{1+(-1)^{k-n+1}}{k^r[(2p+1)n-k]}=\frac{1}{(2p+1)^r}\frac{\ln n}{n^r}+O\left[\frac{\ln(2p+1)}{n^r(2p+1)}\right], \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=(2p+1)n+1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{k+n-1}}{k^r[k-(2p+1)n]}&=\frac{1}{(2p+1)^r}\frac{\ln n}{n^r}+O\left[\frac{\ln(2p+1)}{n^r(2p+1)^r}\right],\\ \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{k-n+1}}{k^r(k-n)}&=\frac{\ln n}{n^r}+O\left(\frac{1}{n^r}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

равномерно относительно всех p и n.

Для доказательства равенства (3.4) заметим, что

$$\frac{1}{x^r(c-x)}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c^r}\ln\frac{x}{c-x}-\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{1}{c^\nu x^{r-\nu}}\right]. \tag{3.6}$$

Кроме того, если $0<a<b<c$, то в промежутке $\left[a,\frac{cr}{r+1}\right]$ функция $\frac{1}{x^r(c-x)}$ монотонно убывает, а для $x>\frac{cr}{r+1}$ монотонно растет. Поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{(2p+1)n-1}\frac{1+(-1)^{n-k+1}}{k^r[(2p+1)n-k]}=\sum_{k=n+1}^{(2p+1)n-1}\frac{1}{k^r[(2p+1)n-k]}+O\left[\frac{1}{n^r(2p+1)}\right]=$$

$$=\int_{n+1}^{(2p+1)n-1}\frac{dx}{x^r[(2p+1)n-x]}+O\left[\frac{1}{n^r(2p+1)}\right]=$$

$$=\frac{1}{[(2p+1)n]^r}\ln\frac{[(2p+1)n-1][2pn-1]}{n+1}+\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{1}{[(2p+1)n]^\nu(n+1)^{r-\nu}}-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{1}{[(2p+1)n]^\nu[(2p+1)n-1]^{r-\nu}}+O\left[\frac{1}{n^r(2p+1)}\right]=$$

$$=\frac{\ln n}{[(2p+1)n]^r}+O\left[\frac{\ln(2p+1)}{n^r(2p+1)}\right]$$

равномерно по всем p и n.

Справедливость соотношений (3.5) проверяется аналогично. Так как функция $\frac{1}{x^r(x-c)}$ при $x>c$ монотонно убывает, то, в силу (3.6), имеем:

$$\sum_{k=(2p+1)n+1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{k-n+1}}{k^r[k-(2p+1)n]}=\sum_{k=(2p+1)n+1}^{\infty}\frac{1}{k^r[k-(2p+1)n]}+O\left[\frac{1}{n^r(2p+1)^r}\right]=$$

$$=\int_{(2p+1)n+1}^{\infty}\frac{dx}{x^r[x-(2p+1)n]}+O\left[\frac{1}{n^r(2p+1)^r}\right]=$$

$$=\frac{1}{[2p+1)n]^r}\ln[(2p+1)n+1]-\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{1}{[(2p+1)n]^\nu[(2p+1)n+1]^{r-\nu}}+$$

$$+O\left[\frac{1}{n^r(2p+1)^r}\right]=\frac{\ln n}{[(2p+1)n]^r}+O\left[\frac{\ln(2p+1)}{(2p+1)^r n^r}\right]$$

равномерно относительно p и n.

ЛЕММА 3. *Для любой последовательности чисел* $\{\mu_k\}$ *справедливо соотношение*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=n-k}^{n}\frac{n-k}{i}\right)\Delta^2\mu_k=\mu_0-\mu_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{n-k+1}+\mu_{n+1}\ln n+O(\mu_{n+1}). \tag{3.7}$$

Равенство (3.7) проверяется непосредственно путем последовательного применения двух преобразований Абеля.

ЛЕММА 4. *В случае $r=0$ первое из равенств* (2.7) (*соответственно второе*) *теоремы* 1 *выполняется равномерно относительно всех последовательностей* $\theta_n>0$ *для любого* $0\leqslant\alpha<1$ (*соответственно для любого* $0<\alpha<1$).

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из приведенного в § 2 доказательства теоремы 1.

§ 4. Линейные методы, дающие наилучший порядок приближения*

В этом параграфе приводятся некоторые результаты, связанные с первым из указанных во введении вопросов, а именно с вопросом о том, какой должна быть матрица чисел $\lambda_k^{(n)}$ для того, чтобы на всех классах $W^{(r)}H_\omega$ и $\overline{W^{(r)}H_\omega}$ выполнялось соотношение (1.4).

Имеет место следующая общая

ТЕОРЕМА 3. *Для любого линейного метода приближения* $U_n(f;x;\lambda)$, $|\lambda_k^{(n)}|\leqslant 1$, *и для любого модуля непрерывности* $\omega(t)$ *справедливы асимптотические неравенства*:

$$\left.\begin{matrix}\mathscr{E}_n(W^{(r)}H_\omega;\ x;\ \lambda)\\ \mathscr{E}_n\overline{(W^{(r)}H_\omega;\ x;\ \lambda)}\end{matrix}\right\}\geqslant\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r(n-k+1)}-\frac{\ln n}{n^r}\right|+$$

$$+O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right]+O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right], \tag{4.1}$$

где величины $O(1)$, *входящие в правые части* (4.1), *равномерно ограничены относительно всех рассматриваемых матриц. В случае* $r=0$ *эти соотношения имеют место для всех матриц, для которых* $|\lambda_k^{(n)}|\leqslant C$ (C — *произвольная константа*).

Если, кроме того, функция $\omega(t)$ *удсвлетворяет условию*

$$\frac{1}{2}\left[\omega(t_1)+\omega(t_2)\right]\leqslant\omega\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right),$$

то неравенства (4.1) *остаются в силе при увеличении в них правой части вдвое, и в этом случае в классе всех линейных методов приближения их дальше улучшить нельзя.*

Теорема 3 показывает, в какой мере быстрота стремления чисел $\lambda_k^{(n)}$ к единице (при $n\to\infty$) влияет на степень приближения, осуществляемого данным линейным методом. К этому вопросу мы еще вернемся.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\varphi_n^*(x)$ — последовательность нечетных периода 2π функций, заданных на $[0,\pi]$ следующим образом:

$$\varphi_n^*(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{2x}{n}\right), & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{2\pi-2x}{n}\right), & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

* Основные результаты этого и следующего параграфов без доказательств были ранее опубликованы в работе автора ([24]).

Легко видеть, что

$$\varphi_n^*(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+1}^{(n)}(\omega)\sin(2k+1)x, \tag{4.2}$$

где коэффициенты $c_{2k+1}^{(n)}$ определены равенствами (3.1).

Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(x)=\varphi_{n,r}(x)=\begin{cases}\varphi_n^*\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right), & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ \varphi_n(x)=\varphi_n(-x), & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\end{cases}$$

когда n четно, r четно,

$$\varphi_n(x)=\varphi_{n,r}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{n},\\ \varphi_n^*\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right), & \frac{\pi}{n}\leqslant x\leqslant\pi,\\ \varphi_n(x)=\varphi_n(-x), & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\end{cases}$$

когда n нечетно, r четно,

$$\varphi_n(x)=\varphi_{n,r}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2n},\quad \pi-\frac{\pi}{2n}\leqslant x\leqslant\pi,\\ \varphi_n^*\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right), & \frac{3\pi}{2n}\leqslant x\leqslant\pi-\frac{\pi}{2n},\\ \varphi_n(x)=-\varphi_n(-x), & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\end{cases}$$

когда n четно, r нечетно,

$$\varphi_n(x)=\varphi_{n,r}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2n},\quad \pi-\frac{\pi}{2n}\leqslant x\leqslant\pi,\\ \varphi_n^*\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right), & \frac{\pi}{2n}\leqslant x\leqslant\pi-\frac{\pi}{2n},\\ \varphi_n(x)=-\varphi_n(-x), & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\end{cases}$$

когда n нечетно, r нечетно.

Можно убедиться, что определенная таким образом последовательность функций $\varphi_n(x)$ в общем случае принадлежит классу $H_{2\omega}$. Если же модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет принятому в теореме условию выпуклости кверху, то $\varphi_n(x)\in H_\omega$. Кроме того, для всех $x\in\left[\frac{3\pi}{2n},\ \pi-\frac{\pi}{2n}\right]$

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+1}^{(n)}(\omega)\sin\left[(2k+1)nx+(2k+1)\frac{r\pi}{2}\right]. \tag{4.3}$$

Пусть $r>0$. В этом случае очевидно, что последовательность функций

$$f_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}\varphi_n(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left[k(t-x)+\frac{r\pi}{2}\right]}{k^r}$$

принадлежит рассматриваемому классу $W^{(r)}H_\omega$. $\Big($В случае произвольного модуля непрерывности $\omega(t)$ вместо последовательности $f_n(x)$ следует рассматривать $\frac{1}{2}f_n(x)$.$\Big)$ Для этих функций полиномы $U_n(f_n;x;\lambda)$ могут быть представлены в виде

$$U_n(f_n;\ x;\ \lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^{(n)}}{k^r}\cos\left[k(t-x)+\frac{r\pi}{2}\right]dt.$$

Таким образом,

$$f_n(x) - U_n(f_n;\ x;\ \lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\cos\left[k(t-x)+\frac{r\pi}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\left[k(t-x)+\frac{r\pi}{2}\right]}{k^r}\right\}dt.$$

Поэтому

$$\mathcal{E}_n(W^{(r)}H_\omega;\ x;\ \lambda) = \mathcal{E}_n(W^{(r)}H_\omega;\ 0;\ \lambda) \geqslant |f_n(0) - U_n(f_n;\ 0;\ \lambda)| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\varphi_n(t)\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\right\}dt\right|. \quad (4.4)$$

Но так как для любой константы C

$$\int_0^{\frac{C}{n}}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)\right|dt = O\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right)$$

и, кроме того [см., например, ([12])],

$$\int_0^{\frac{C}{n}}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\right|dt = O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

то

$$\int_0^{\frac{C}{n}}\varphi_n^*\left(nt+\frac{r\pi}{2}\right)\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\right\}dt =$$

$$= O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k}\right] + O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right].$$

Следовательно, из (4.2), (4.3) и (4.4) мы находим, что

$$\mathcal{E}_n(W^{(r)}H_\omega;\ x;\ \lambda) \geqslant \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\right\}\sum_{i=0}^{\infty}c_{2i+1}^{(n)}(\omega)\sin\left[(2i+1)nt+(2i+1)\frac{r\pi}{2}\right]dt\right| +$$

$$+ O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right] + O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right],$$

т. е.

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}H_\omega;\ x;\ \lambda) \geqslant \left| \frac{2c_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right) + \right.\right.$$

$$+ \left.\sum_{k=n+1}^\infty \frac{\cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\right\} \sin\left(nt + \frac{r\pi}{2}\right) dt + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\right\} \sum_{i=1}^\infty c_{2i+1}^{(n)}(\omega) \sin\left[(2i+1)nt + (2i+1)\frac{r\pi}{2}\right] dt \right| +$$

$$+ O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right] + O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right] =$$

$$= |I_n' + I_n''| + O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right] + O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right].$$

При этом

$$I_n' = \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \int_0^\pi \sum_{k=1}^n \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \sin(n-k)t\, dt +$$

$$+ \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \sin[(n+k)t + r\pi] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^r} [\sin(n-k)t + \sin[(n+k)t + r\pi]] \right\} dt =$$

$$= \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{n-k} \cdot \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} + (-1)^r \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{n+k} \cdot \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \right\} +$$

$$+ \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \left\{ \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{k^r(n-k)} + (-1)^r \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{k^r(n+k)} \right\}.$$

Учитывая второе из соотношений (3.5), получим, что

$$I_n' = \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{n-k} \cdot \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} - \frac{\ln n}{n^r} \right\} +$$

$$+ O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{k^r} (1-\lambda_k^{(n)})\right] + O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right]. \tag{4.5}$$

Далее,

$$I_n'' = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i+1}^{(n)}(\omega) \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \sin \{[(2i+1)n-k]t + ir\pi\}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i+1}^{(n)}(\omega) \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \sin \{[(2i+1)n+k]t + (i+1)r\pi\}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i+1}^{(n)}(\omega) \int_0^{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \sin \{[(2i+1)n-k]t + ir\pi\}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i+1}^{(n)}(\omega) \int_0^{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \sin \{[(2i+1)n+k]t + (i+1)r\pi\}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i+1}^{(n)}(\omega)\ (-1)^{ir} \sum_{k=1}^{n} \frac{[1+(-1)^{n-k+1}]\ (1-\lambda_k^{(n)})}{k^r\,[(2i+1)n-k]} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i+1}^{(n)}(\omega)\ (-1)^{(i+1)r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{(2i+1)n+k} \cdot \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i+1}^{(n)}(\omega)\ (-1)^{ir} \left\{ \sum_{k=n+1}^{(2i+1)n-1} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{k^r\,[(2i+1)n-k]} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=(2i+1)n+1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{k^r[(2i+1)n-k]} \right\} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i+1}^{(n)}(\omega)\ (-1)^{(i+1)r} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{k^r\,[(2i+1)n+k]}.$$

Поэтому, воспользовавшись соотношением (3.2), а также равенствами (3.4) и (3.5) леммы 2, найдем:

$$I_n'' = O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right] + O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right]. \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6), таким образом, следует, что

$$\mathcal{E}_n(W^{(r)}H_\omega;\ x;\ \lambda) \geqslant \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{n-k}\ \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} - \frac{\ln n}{n^r} \right| +$$

$$+ O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right] + O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right]. \tag{4.7}$$

Рассматривая вместо функции $\varphi_n(x)$ функцию $\varphi_{n-1}(x)$ и учитывая, что для всякого модуля непрерывности $\omega(t)$ справедливо (3.3), мы, наряду с неравенством (4.7), очевидно, получим неравенство:

$$\mathcal{E}_n(W^{(n)}H_\omega;\ x;\ \lambda) \geqslant \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1+(-1)^{n-k+2}}{n-k-1} \cdot \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} - \frac{\ln n}{n^r} \right| +$$

$$+ O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right] + O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right]. \tag{4.8}$$

Из этих неравенств, если учесть, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{(n-k+1)^2 k^r} = \sum_{1\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{(n-k+1)^2 k^r} + \sum_{\frac{n}{2}<k\leqslant n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{(n-k+1)^2 k^r} =$$

$$= O\left[\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right] + O\left[\frac{1}{n^r}\right],$$

мы получаем доказательство первой части теоремы 3 (при $r>0$) для модулей непрерывности, удовлетворяющих условию выпуклости кверху. В случае произвольного модуля непрерывности, как уже отмечалось, все рассуждения следует проводить для функции $\frac{1}{2} f_n(x)$, и мы получим таким образом неравенство (4.1).

Легко видеть, что поскольку рассуждения проводились для любого $r>0$, то вместе с тем доказана и вторая часть теоремы 3 (при $r>0$). Пусть $r=0$. Доказательство в этом случае проводится аналогично предыдущему. Мы рассматриваем функции $\varphi_n(x) = \varphi_{n,0}(x)$. Для них

$$U_n(\varphi_n;\ x;\ \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos k(x-t)\right\} dt.$$

Поэтому

$$\mathscr{E}_n(W^{(0)}H_\omega;\ x;\ \lambda) = \mathscr{E}_n(W^{(0)}H_\omega;\ 0;\ \lambda) \geqslant |\varphi_n(0) - U_n(\varphi_n;\ 0;\ \lambda)| =$$

$$= |U_n(\varphi_n;\ 0;\ \lambda)| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \varphi_n(t) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt\right\} dt \right|. \qquad (4.9)$$

Очевидно, что при $\lambda_k^{(n)} = O(1)$

$$\int_0^{\frac{C}{n}} \varphi^*(nt) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt\right\} dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad (C \text{ — константа}).$$

Следовательно, в этом случае мы из (4.9) получим неравенство

$$\mathscr{E}_n(W^{(0)}H_\omega;\ x;\ \lambda) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi} \left| \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt\right\} \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+1}^{(n)}(\omega) \sin(2i+1)nt\,dt \right| + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

т. е.

$$\mathscr{E}_n(W^{(0)}H_\omega;\ x;\ \lambda) \geqslant \left| \frac{2c_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt \sin nt\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt\right\} \sum_{i=0}^{n} c_{2i+1}^{(n)}(\omega) \sin(2i+1)nt\,dt \right| + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

При этом, так как мы считаем, что $\lambda_k^{(n)} = O(1)$,

$$\frac{2\,c_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\int_0^\pi \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kt \sin nt\, dt =$$

$$= \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\int_0^\pi \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \sin(n-k)\, t\, dt + \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\int_0^\pi \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \sin(n+k)\, t\, dt =$$

$$= \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{n-k}\lambda_k^{(n)} + \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{n+k}\lambda_k^{(n)} =$$

$$= \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{n-k}\lambda_k^{(n)} + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

и, в силу (3.2),

$$\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^\infty c_{2i+1}^{(n)}(\omega)\int_0^\pi \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kt\right\} \sin(2i+1)\, nt\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^\infty c_{2i+1}^{(n)}(\omega)\int_0^\pi \sin(2i+1)\, nt\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^\infty c_{2i+1}^{(n)}(\omega)\int_0^\pi \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \sin[(2i+1)\, n-k]\, t\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^\infty c_{2i+1}^{(n)}(\omega)\int_0^\pi \sum_{k=1}^u \lambda_k^{(n)} \sin[(2i+1)\, n+k]\, t\, dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Следовательно,

$$\mathscr{E}_n(W^{(0)}H_\omega;\ x;\ \lambda] \geqslant \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1+(-1)^{n-k+1}}{n-k}\lambda_k^{(n)}\right| + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \qquad (4.10)$$

Рассматривая функцию $\varphi_{n-1}(x)$ и учитывая соотношение (3.3), мы, наряду с неравенством (4.10), получим неравенство

$$\mathscr{E}_n(W^{(0)}H_\omega;\ x;\ \lambda) \geqslant \frac{c_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1+(-1)^{n-k}}{n-k-1}\lambda_k^{(n)}\right| + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \qquad (4.11)$$

Из соотношений (3.3), (4.10) и (4.11) непосредственно вытекает, что для любого модуля непрерывности $\omega(t)$, удовлетворяющего условию выпуклости кверху,

$$\mathscr{E}_n(W^{(0)}H_\omega;\ x;\ \lambda) \geqslant \frac{2c_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}\right| + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \qquad (4.12)$$

Для произвольного модуля непрерывности вместо функций $\varphi_n(x)$ следует рассматривать функции $\frac{1}{2}\varphi_n(x)$, и мы получим в этом случае неравенство (4.12) с вдвое меньшей правой частью, что доказывает первую часть теоремы 3 при $r=0$. Для получения второй части теоремы сле-

дует рассмотреть последовательность функций $\varphi_n(x)=\varphi_{n,1}(x)$ и провести аналогичные рассуждения.

Остается еще заметить, что существуют линейные методы приближения (например, суммы Фурье $\lambda_k^{(n)}=1$, $0\leqslant k\leqslant n$; суммы Валле-Пуссена $\lambda_k^{(n)}=1$, $0\leqslant k\leqslant n-p$, $\lambda_k^{(n)}=\frac{n-k+1}{p+1}$, $n-p\leqslant k\leqslant n+1$), для которых, в силу известных результатов [см. ([12]), ([14]), ([23])], неравенства (4.1), если в них правую часть увеличить вдвое, обращаются в асимптотические равенства при $\omega(t)=t^\alpha$. В случае $r=0$ эти неравенства обращаются в асимптотические равенства при любом выпуклом модуле непрерывности, например, для сумм Фурье [см. ([16])].

Теорема 3 доказана. Из нее вытекает

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы линейный метод приближения* $U_n(f;\,x;\,\lambda)$ *при* $n\to\infty$ *осуществлял на всех классах* $W^{(r)}H^\alpha$ *и* $\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ *приближение того же порядка, что и* $\sup\limits_f E_n(f)$, *необходимо, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r(n-k+1)}=\frac{\ln n}{n^r}+O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{4.13}$$

Для доказательства заметим, что функция

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^{r+\alpha+1}}$$

при нечетном r и $0\leqslant\alpha<1$ имеет r-ю производную, удовлетворяющую условию Липшица степени α, а при четном r этим свойством обладает ее сопряженная функция*. Для нее

$$f(0)-U_n(f;0;\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^{r+\alpha+1}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+\alpha+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^{r+\alpha+1}}+O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right),$$

и, следовательно, необходимо, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \tag{4.14}$$

Таким образом, из необходимости условия (4.14) и неравенства (4.1) теоремы 3 непосредственно вытекает теорема 4 для $r>0$.

В случае $r=0$ теорема 4 автоматически вытекает из одной только теоремы 3.

Заметим, что условие (4.13), будучи необходимым, в общем случае еще не является достаточным для того, чтобы линейный метод $U_n(f;x;\lambda)$

---

* Это следует из того, что для наилучшего приближения имеет место равенство

$$E_n[f^{(r)}(x)]=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

давал на рассматриваемых классах наилучший порядок приближения. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть метод, определяющийся матрицей $\{\lambda_k^{(n)}\}$, у которой $\lambda_k^{(n)}=1$ для $0\leqslant k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$ и $\lambda_k^{(n)}=0$ для $\left[\frac{n}{2}\right]<k\leqslant n+1$. При помощи (3.6) нетрудно обнаружить, что эта система чисел удовлетворяет условию (4.13). Вместе с тем, легко видеть, что в данном случае при $n\to\infty$ имеет место соотношение порядка

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}H^{(\alpha)};x;\lambda)\sim\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}.$$

Однако ниже устанавливается, что в классе матриц, удовлетворяющих некоторым естественным дополнительным ограничениям, условие (4.13) не только необходимо, но и достаточно.

Отметим, что при $r=0$ соотношение (4.13) является необходимым условием того, чтобы метод суммирования $U_n(f;x;\lambda)$ гарантировал равномерное приближение для любой непрерывной периода 2π функции $f(x)$. В этом случае, полагая $\alpha=0$, получаем известный результат С. М. Никольского [см. ([15])].

Следующее предложение, доказательство которого будет вытекать и результатов § 5, дополняет теорему 4.

ТЕОРЕМА 5. *Если матрица* $\lambda_k^{(n)}$ *такова, что система чисел* $\mu_k^{(n)}=\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}$ $(0<k\leqslant n+1,\ \mu_0^{(n)}=0)$ *при каждом фиксированном* n *не убывает и выпукла, т. е.*

$$\mu_k^{(n)}\leqslant\mu_{k+1}^{(n)},\quad \mu_k^{(n)}-2\mu_{k+1}^{(n)}+\mu_{k+2}^{(n)}\geqslant 0, \tag{4.15}$$

то для того чтобы порядок приближения, осуществляемый полиномами $U_n(f;x;\lambda)$ *на всех классах* $W^{(r)}H^{(\alpha)}$ *и* $\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}}$ $(0\leqslant\alpha<1)$, *совпадал с порядком верхней грани соответствующих наилучших приближений на этих классах, необходимо и достаточно выполнение условия* (4.13).

Условию (4.15) удовлетворяют многие из методов, применяющихся в качестве аппарата приближения. Ему удовлетворяют также известные наилучшие линейные методы, найденные Н. И. Ахиезером, М. Г. Крейном ([2]) и Ж. Фаваром ([25]) и определяющиеся матрицей $\lambda_k^{(n)}=\lambda_r\left(\frac{k}{n+1}\right)$, где для $t\in[0,1]$

$$\lambda_r(t)=1-t^r\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{(2k-t)^r}+\frac{1}{(2k+t)^r}\right],$$

если r четно, и

$$\lambda_r(t)=1-t^r\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k-t)^r}-\frac{1}{(2k+t)^r}\right],$$

— если r нечетно.

Из результатов следующего параграфа будет также вытекать

ТЕОРЕМА 6. *Если матрица* $\lambda_k^{(n)}$ $(\lambda_k^{(n)}=O(1))$ *удовлетворяет второму из условий* (4.15), *либо вместо него — условию* $\Delta^2\mu_k^{(n)}\leqslant 0$, *то для того*

чтобы порядок приближения, осуществляемой полиномами $U_n(f; x,)$ *на всех классах* $W^{(r)}$ $(r \geqslant 0)$ *и* $\overline{W^{(r)}}$ $(r > 0)$, *совпадал с порядком верхней грани соответствующих наилучших приближений на этих классах, необходимо и достаточно выполнение условия* (4.13).

§ 5. Оценки приближений

В этом параграфе мы рассматриваем классы функций $W^{(r)}H^{(\alpha)}$, $\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}}$ и получаем оценки для произвольных линейных методов приближения на них.

Справедлива следующая общая теорема, дающая для верхних граней $\mathscr{E}_n(W^{(r)}H^{(\alpha)}; x; \lambda)$ и $\mathscr{E}_n(\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}}; x; \lambda)$ оценку сверху.

ТЕОРЕМА 7. *Для любого линейного метода приближения* $U_n(f; x; \lambda)$, *для всякого целого числа* $r \geqslant 0$ *и* $0 \leqslant \alpha < 1$ *при* $n \to \infty$ *имеют место асимптотические неравенства:*

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{E}_n(W^{(r)}H^{(\alpha)}; x; \lambda)\\ \mathscr{E}_n(\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}}; x; \lambda)\end{array}\right\} \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\, dt \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{n}{n-k} \left| \Delta^2 \left(\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \right) \right| +$$

$$+ O\left\{ \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \left| \Delta^2 \left(\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \right) \right| + n^{1-\alpha} (1-\lambda_1^{(n)}) \right\} + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}} \right). \quad (5.1)$$

Неравенства (5.1) *в классе всех линейных методов приближения улучшить нельзя. Существуют линейные методы, для которых они обращаются в асимптотические равенства**.

Рассмотрим отдельно три случая.

1°. $r > 0$, четно и $0 \leqslant \alpha < 1$. Если $f(x) \in W^{(r)}H^{(\alpha)}$, то имеет место представление

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left[k(t-x) + \frac{r\pi}{2} \right]}{k^r},$$

в котором $\varphi(t) \in W^{(0)}H^{(\alpha)} = H^{(\alpha)}$ и $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = 0$. Поэтому

$$f(x) - U_n(f; x; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k^{(n)} \cos\left[k(t-x) + \frac{r\pi}{2} \right] dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) D_{n+1}^{(r)}(t-x)\, dt, \quad (5.2)$$

---

* В случае $\alpha = 0$ правые части неравенств (5.1) следует увеличить вдвое. При этом $W^{(r)}H^{(0)}$ обозначает класс функций, имеющих почти всюду производную r-го порядка, по абсолютной величине не превышающую единицу. Во втором из неравенств (5.1) случай $r = 0$, $\alpha = 0$ исключается.

где функции $D_n^{(r)}(t)$ определены в § 2 [см. (2.9)], а $\mu_k^{(n)} = \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}$ $(0 < k \leqslant n+1,\ \mu_0^{(n)} = 0)$.

Очевидно, что можно ограничиться лишь рассмотрением функций $\varphi(t) \in H_0^{(\alpha)}$, т. е. таких функций $\varphi(t) \in H^{(\alpha)}$, для которых $\varphi(0) = 0$. Кроме того, из известных соображений следует, что величины $\mathcal{E}_n(W^{(r)}H^{(\alpha)}; x; \lambda)$ и $\mathcal{E}_n(\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}}; x; \lambda)$ не зависят от x. Поэтому удобно проводить оценки для $x = 0$. Применяя к сумме, стоящей в правой части равенства (5.2), преобразование Абеля, получим:

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \Delta\mu_k^{(n)} S_k(\varphi; 0) + \frac{1}{\pi(n+1)^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \frac{\sin\frac{2n+3}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}} dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^r} dt \right|,$$

где $S_k(\varphi; 0)$ — частная сумма порядка k ряда Фурье функции $\varphi(t)$ в точке $t = 0$.

В силу соотношений (A), (B), (C) § 2 мы находим, что

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \Delta\mu_k^{(n)} S_k(\varphi; 0) \right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \Delta\mu_{n-k}^{(n)} S_{n-k}(\varphi; 0) \right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \qquad (5.3)$$

равномерно по всем функциям $\varphi(t) \in H_0^{(\alpha)}$. К сумме, стоящей в правой части последнего равенства, еще раз применяем преобразование Абеля. Тогда

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| =$$

$$= \left| -\sum_{k=0} \Delta^2\mu_{n-i-1}^{(n)} \sum_{i=0}^{k} S_{n-i}(\varphi; 0) - \mu_1^{(n)} \sum_{i=0}^{n} S_i(\varphi; 0) \right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \qquad (5.4)$$

Введя обозначение

$$\sigma_n(\varphi; k; 0) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} S_{n-i}(\varphi; 0),$$

мы, таким образом, получаем:

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \left|\Delta^2\mu_{n-k-1}^{(n)}\right| |\sigma_n(\varphi; k; 0)| +$$

$$+ (n+1) \left|\mu_1^{(n)}\right| \cdot |\sigma_n(\varphi; n; 0)| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

В силу первой части теоремы 1 (случай $r=0$) и леммы 4, имеют место неравенства:

$$|\sigma_n(\varphi; k; 0)| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t \, dt \ln \frac{n}{k+1} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \tag{5.5}$$

которые выполняются равномерно по всем $0 \leqslant k \leqslant n$ и всем функциям $\varphi(t) \in H_0^{(\alpha)}$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Поэтому

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t dt \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \ln \frac{n}{k+1} |\Delta^2 \mu_{n-k-1}^{(n)}| +$$

$$+ O\left\{\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta^2 \mu_{n-k-1}^{(n)}| + (n+1)^{1-\alpha} |\mu_1^{(n)}|\right\} + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

2°. *r нечетно и $0 < \alpha < 1$.* В силу (5.2), после применения преобразования Абеля найдем, что в этом случае

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| =$$

$$= \left| - \sum_{k=0}^{n} \Delta\mu_k^{(n)} \overline{S}_k(\varphi; 0) + \frac{1}{\pi(n+1)^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{2n+3}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^r} dt \right|, \tag{5.6}$$

где $\overline{S}_k(\varphi; 0)$ — частная сумма порядка k ряда, сопряженного к ряду Фурье функции $\varphi(t)$, взятая в точке $t=0$.

Пользуясь применявшимися уже соотношениями (A), (B), (C) § 2 для ядра $D_{n+1}^{(r)}(t)$ и учитывая, что

$$\overline{\varphi}(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt, \qquad \mu_{n+1}^{(n)} = \frac{1}{(n+1)^r} = -\sum_{k=0}^{n} \Delta\mu_k^{(n)},$$

нетрудно получить равенство:

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \Delta\mu_k^{(n)} [\overline{\varphi}(0) - \overline{S}_k(\varphi; 0)] \right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \Delta\mu_{n-k}^{(n)} [\overline{\varphi}(0) - \overline{S}_{n-k}(\varphi; 0)] \right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{5.7}$$

выполняющееся равномерно по всем функциям $\varphi(t) \in H_0^{(\alpha)}$. Отсюда

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| = \left| - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 \mu_{n-k-1}^{(n)} \sum_{i=0}^{k} [\overline{\varphi}(0) - \overline{S}_{n-i}(\varphi; 0)] - \right.$$

$$\left. - \mu_1^{(n)} \left[\overline{\varphi}(0) - \sum_{i=0}^{n} \overline{S}_i(\varphi; 0)\right] \right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Таким образом, мы приходим к неравенству

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta^2 \mu_{n-k-1}^{(n)}| |\overline{\varphi}(0) - \overline{\sigma}_n(\varphi; k; 0)| +$$
$$+ (n+1) |\mu_1^{(n)}| |\overline{\varphi}(0) - \overline{\sigma}_n(\varphi; n; 0)| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right),$$

где

$$\overline{\sigma}_n(\varphi; k; 0) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \overline{S}_{n-i}(\varphi; 0).$$

В силу второй части теоремы 1 (случай $r=0$), имеют место неравенства

$$|\overline{\varphi}(0) - \overline{\sigma}_n(\varphi; k; 0)| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t \, dt \ln \frac{n}{k+1} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \tag{5.8}$$

которые выполняются равномерно по всем $0 \leqslant k \leqslant n$ и всем функциям $\varphi(t) \in H_0^{(\alpha)}$ $(0 < \alpha < 1)$. Следовательно,

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t \, dt \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \ln \frac{n}{k+1} |\Delta^2 \mu_{n-k-1}^{(n)}| +$$
$$+ O\left\{\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta^2 \mu_{n-k-1}^{(n)}| + (n+1)^{1-\alpha} |\mu_1^{(n)}|\right\} + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Если же $\alpha = 0$, то из тождества (5.6) легко получить соотношение

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| = \left|\sum_{k=0}^{n} \Delta \mu_k^{(n)} [\overline{\varphi}_n(0) - \overline{S}_k(\varphi; 0)]\right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) =$$
$$= \left|\sum_{k=0}^{n} \Delta \mu_{n-k}^{(n)} [\overline{\varphi}_n(0) - \overline{S}_{n-k}(\varphi; 0)]\right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{5.9}$$

где

$$\varphi_n(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} [\varphi(t) - \varphi(-t)] \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \, dt,$$

которое выполняется равномерно по всем ограниченным функциям $\varphi(t)$. Остается еще раз применить преобразование Абеля и вместо неравенства (5.8) воспользоваться справедливым для всех функций $|\varphi(t)| \leqslant 1$ известным неравенством

$$|\overline{\varphi}_n(0) - \overline{\sigma}_n(\varphi; k; 0)| \leqslant \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{n}{k+1} + O(1), \tag{5.10}$$

которое можно получить непосредственно [см., например, ([26])].

Таким образом, первая часть теоремы 7 для $r > 0$ доказана. Из приведенных рассуждений следует, очевидно, и справедливость второй части этой теоремы $(r > 0)$.

3°. $r=0$. Очевидно, что без ограничения общности можно считать $f(0)=0$. Так как

$$U_n(f;0;\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt\right\}dt,$$

то после применения двух преобразований Абеля получим:

$$U_n(f;0;\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}S_k(\varphi;0)=\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_{n-k}^{(n)}S_{n-k}(f;0)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)}\sum_{i=0}^{k}S_{n-i}(f;0)+(1-\lambda_1^{(n)})\sum_{i=0}^{n}S_i(f;0)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)}\sigma_n(f;k;0)+(n+1)(1-\lambda_1^{(n)})\sigma_n(f;n;0).$$

Значит,

$$|U_n(f;0;\lambda)|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,|\Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)}|\cdot|\sigma_n(f;k;0)|+(n+1)\,|1-\lambda_1^{(n)}|\,|\sigma_n(f;n;0)|$$

и поэтому, согласно неравенству (5,5),

$$|U_n(f;0;\lambda)|\leqslant\frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^\alpha\sin t\,dt\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\ln\frac{n}{k+1}\,|\Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)}|+$$

$$+O\left\{\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,|\Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)}|+(n+1)^{1-\alpha}\,|1-\lambda_1^{(n)}|\right\}.$$

Этим доказана первая часть теоремы 7 при $r=0$. Для доказательства второй части $(0<\alpha<1)$ оценим разность

$$\overline{f}(0)-U_n(\overline{f};0;\lambda)=\overline{f}(0)-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\sin kt\,dt$$

и применим преобразование Абеля. Мы получим:

$$\overline{f}(0)-U_n(\overline{f};0;\lambda)=\overline{f}(0)-\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}\overline{S}_k(f;0)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}\,[\overline{f}(0)-\overline{S}_k(f;0)]=\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_{n-k}^{(n)}\,[\overline{f}(0)-\overline{S}_{n-k}(f;0)].$$

Вторичное применение преобразования Абеля дает:

$$|\overline{f}(0)-U_n(\overline{f};0;\lambda)|=\Big|-\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2\lambda_{n-k-1}^{(n)}\sum_{i=0}^{k}[\overline{f}(0)-\overline{S}_{n-i}(f;0)]+$$

$$+(1-\lambda_1^{(n)})\sum_{i=0}^{n}[\overline{f}(0)-\overline{S}_{n-i}(f;0)]\Big|,$$

откуда

$$|\bar{f}(0) - U_n(\bar{f}; 0; \lambda)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,|\Delta^2 \lambda_{n-k-1}^{(n)}|\,|\bar{f}(0) - \sigma_n(\bar{f}; k; 0)| + \\ + (n+1)\,|1 - \lambda_1^{(n)}|\,|\bar{f}(0) - \bar{\sigma}_n(f; n; 0)|.$$

Поэтому, в силу применявшегося уже неравенства (5.8),

$$|\bar{f}(0) - U_n(\bar{f}; 0; \lambda)| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\, dt \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \ln \frac{n}{k+1}\, |\Delta^2 \lambda_{n-k-1}^{(n)}| + \\ + O\left\{\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,|\Delta^2 \lambda_{n-k-1}^{(n)}| + (n+1)^{1-\alpha}\,|1 - \lambda_1^{(n)}|\right\}.$$

Из приведенной ниже теоремы 10 будет следовать, что неравенства (5.1) в классе всех линейных методов приближения улучшить нельзя.

Теорема 7 полностью доказана.

Наряду с теоремой 7 укажем еще на одну оценку подобного типа.

ТЕОРЕМА 8. *Для любого линейного метода приближения $U_n(f; x; \lambda)$, для любого целого числа $r \geqslant 0$ и $0 \leqslant \alpha < 1$ при $n \to \infty$ справедливы асимптотические неравенства:*

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{E}_n(W^{(r)}H^{(\alpha)}; x; \lambda) \\ \mathcal{E}_n(\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}}; x; \lambda) \end{matrix}\right\} \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\, dt \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i}\right) \left|\Delta^2 \left(\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right)\right| + \\ + O\left\{\sum_{k=0}^{[qn]} (k+1)^{1-\alpha} \left|\Delta^2 \left(\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right)\right| + \right. \\ \left. + \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=[qn]+1}^{n-1} (n-k) \left|\Delta^2 \left(\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}\right)\right|\right\} + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{5.11}$$

где q — любое фиксированное положительное число, меньшее единицы.

Неравенства (5.11) *в классе всех линейных методов приближения улучшить нельзя. Существуют линейные методы, для которых они обращаются в асимптотические равенства.*

Доказательство. Так же, как и при доказательстве теоремы 7, рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного r.

Если r четно и положительно, то, придерживаясь обозначений теоремы 7, в силу (5.3), имеем:

$$|f(0) - U_n(f; 0; \lambda)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, \Delta^2 \mu_k^{(n)} \sigma_k(\varphi; k; 0) + (n+1)\, \mu_n^{(n)} \sigma_n(\varphi; n; 0)\right| + \\ + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) = \left|\sum_{k=0}^{[qn]} (k+1)\, \Delta^2 \mu_k^{(n)} \sigma_k(\varphi; k; 0) + \right. \\ \left. + \sum_{k=[qn]+1}^{n-1} (n-k)\, \Delta^2 \mu_k^{(n)} \sigma_n(\varphi; n-k; 0) + (n+1)\, \Delta \mu_{[qn]}^{(n)} \sigma_n(\varphi; n; 0)\right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Так как мы считаем, что $|\lambda_k^{(n)}| \leqslant C$, где C — некоторая константа, то из тождества

$$[qn]\,\Delta\mu_{[qn]}^{(n)} = \mu_0^{(n)} - \mu_{[qn]}^{(n)} + \sum_{k=0}^{[qn]-1} (k+1)\,\Delta\mu_k^{(n)},$$

если учесть, что $\mu_0^{(n)} = 0$, будет следовать, в силу (5.5), что

$$|f(0) - U_n(f;0;\lambda)| = \left| \sum_{k=[qn]}^{n-1} (n-k)\,\Delta^2\mu_k^{(n)}\,\sigma_n(\varphi; n-k; 0) \right| +$$

$$+ O\left\{ \sum_{k=0}^{[qn]} (k+1)^{1-\alpha} |\Delta^2 \mu_k^{(n)}| \right\} + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Остается еще раз воспользоваться неравенством (5.5).

Пользуясь вместо (5.3) и (5.5) соотношениями (5.7), (5.9), а также неравенствами (5.8), (5.10) и рассуждая точно так же, мы получим теорему 8 для нечетного r. Исследование случая $r=0$ проводится аналогично.

Из теоремы 8 вытекает

ТЕОРЕМА 9. *Для любого линейного метода приближения* $U_n(f;x;\lambda)$ $(|\lambda_k^{(n)}| \leqslant C)$ *и для любого целого числа* $r \geqslant 0$ *имеют место соотношения*

$$\left.\begin{matrix}(r \geqslant 0) & \mathcal{E}_n(W^{(r)};x;\lambda) \\ (r > 0) & \mathcal{E}_n(\overline{W^{(r)}};x;\lambda)\end{matrix}\right\} = O\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i} \right) \left| \Delta^2 \left(\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \right) \right| \right\}. \tag{5.12}$$

Из той же теоремы 8 получаем

Следствие. *Если*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i} \right) \left| \Delta^2 \left(\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \right) \right| = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \tag{5.13}$$

и существует такое $0 < q < 1$, *при котором*

$$\sum_{k=0}^{[qn]} (k+1)^{1-\alpha} \left| \Delta^2 \left(\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \right) \right| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{5.14}$$

то соответствующий линейный метод $U_n(f;x;\lambda)$ *для всех функций классов* $W^{(r)}H^{(\alpha)}$ $(r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \alpha < 1)$, $\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}}$ $(r>0, 0 \leqslant \alpha < 1;\ r=0,\ 0<\alpha<1)$ *осуществляет приближение порядка* $O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$.

Применительно к случаю $\alpha = 0$ мы получаем отсюда, что выполнения одного лишь условия (5.13) уже достаточно, чтобы гарантировать наилучший порядок приближения на классах $W^{(r)}$ $(r \geqslant 0)$ и $\overline{W}^{(r)}$ $(r > 0)$.

Таким образом, это следствие при $r=0$, $\alpha=0$ содержит в себе результаты С. М. Никольского ([15]) и Б. Надя ([19]) о так называемых матрицах типа F для непрерывных функций.

Теорема 9 вместе с леммой 3 и теоремами 3, 4 доказывает теорему 6.

Для линейных методов приближения, удовлетворяющих условию (4.15), мы получаем следующий асимптотический окончательный результат.

ТЕОРЕМА 10. *Если матрица чисел $\lambda_k^{(n)}$ удовлетворяет условию* (4.15), *то для всякого* $0 \leqslant \alpha < 1$ *при* $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства:*

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{E}_n(W^{(r)}H^{(\alpha)};x;\lambda)\\ \mathscr{E}_n(\overline{W^{(r)}H^{(\alpha)}};x;\lambda)\end{array}\right\} = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\,dt \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r(n-k+1)} - \frac{\ln n}{n^r}\right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{5.15}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно всех рассматриваемых матриц (при* $\alpha = 0$ *правую часть следует увеличить вдвое).*

Теорема 10 немедленно вытекает из теоремы 3 и теоремы 7, после применения леммы 3, если учесть, что при выполнении условия (4.15) будет:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} = O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right).$$

Из этой теоремы и соотношений (5.3), (5.6), (5.8) непосредственно вытекают основные результаты, полученные в работе А. Зигмунда ([10]), касающейся линейных методов приближения с матрицей

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^p \quad (0 < r \leqslant p).$$

Отметим частный случай теоремы 10, соответствующий $r = 0$.

ТЕОРЕМА 10'. *Если у треугольной матрицы* $\lambda_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n+1$; $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\lambda_{n+1}^{(n)} = 0$) *каждая строка образует монотонно убывающую и вогнутую систему чисел, то при* $0 < \alpha < 1$ *и* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические оценки:*

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{E}_n(H^{(\alpha)};x;\lambda)\\ \mathscr{E}_n(\overline{H}^{(\alpha)};x;\lambda)\end{array}\right\} = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\,dt \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{5.16}$$

Эти равенства в общем случае теряют силу для $\alpha = 1$ *(первое из них верно также и при* $\alpha = 0$, *если правую часть увеличить вдвое).*

Поступило
3. IX. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., ГТТИ, 1947.

[2] Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении периодических функций, Доклады Ак. Наук СССР, XV (1937), 107—111.

[3] Ахиезер Н. И. и Левитан Б. М., Об одном применении неравенств Г. Бора и Ж. Фавара. Доклады Ак. Наук СССР, XIV (1937), 419—422.

[4] Бернштейн С. Н., Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné, Mém. de l'Acad. Roy. de Belgique, 2-me série 4 (1912), 1—104.

[5] Бернштейн С. Н., Sur un procédé de sommation de séries trigonométriques, Comptes Rendus Ac. Sc., 191 (1930), 976—979.

[6] Бернштейн С. Н., Обобщение одного результата С. М. Никольского, Доклады Ак. Наук СССР, LIII (1946), 587—590.

[7] La Vallée Poussin Ch., Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919.

[8] Jackson D., The theory of approximation., N. Y., 1930.

[9] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., ГОНТИ, 1939.

[10] Zygmund A., The approximation of functions by typical means of their Fourier series, Duke Math. J., 12 (1945), 695—705.

[11] Zygmund A., On the degree of approximation of functions by Fejers means, Bull. Math. Soc., 51 (1945), 274—278.

[12] Колмогоров А. Н., Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Functionen, Ann. Math., 36 (1935), 521—526.

[13] Lebesgue H., Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, Bull. Soc. Math. de France, 38 (1910), 184—210.

[14] Никольский С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Тр. Матем. Инст. им. В. А. Стеклова Ак. Наук СССР, XV (1945), 1—76.

[15] Никольский С. М., О линейных методах суммирования рядов Фурье, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 259—278.

[16] Никольский С. М., Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности, Доклады Ак. Наук СССР, LII (1946), 191—194.

[17] Nagy B., Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen, Acta Sci. Math., Szeged., XI (1946), 71—84.

[18] Nagy B., Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier, Hungarica Acta Math., vol. 1, N 3 (1948), 14—52.

[19] Nagy B., Méthodes de sommation des séries de Fourier. I, Acta Sci. Math., Szeged., 12 (1950), 204—210.

[20] Натансон И. П., О приближенном представлении функций, удовлетворяющих условию Липшица, с помощью интеграла Валле-Пуссена, Доклады Ак. Наук СССР, LIV (1946), 11—14.

[21] Пинкевич В. Т., О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем, 4 (1940), 521—528.

[22] Тиман А. Ф., Некоторые асимптотические оценки для полиномов Н. И. Ахиезера—Б. М. Левитана, Доклады Ак. Наук СССР, LXIV (1949), 175—178.

[23] Тиман А. Ф., Обобщение некоторых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского, Доклады Ак. Наук СССР, LXXXI (1951), 508—611.

[24] Тиман А. Ф., Линейные методы приближения периодических функций тригонометрическими полиномами, Доклады Ак. Наук СССР, LXXXIV (1952), 1147—1150.

[25] Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynômes trigonométriques, Bull. de Sci. Math., 61 (1937), 209—224.

[26] Щербина А. Д., Об одном методе суммирования рядов, сопряженных рядам Фурье, Матем. сб., 27 (69) : 2 (1950), 157—170.

[27] Якоб М., Применение трансформации Лапласа к суммированию рядов Фурье и тригонометрических интерполяционных полиномов, Доклады Ак. Наук СССР, XXXII (1941), 390—394.

[28] Никольский С. М., О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 509—520.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17(1953), 135—162

В. К. ДЗЯДЫК

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НА КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ОГРАНИЧЕННУЮ s-Ю ПРОИЗВОДНУЮ ($0 < s < 1$)

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе исследуется оценка приближения (равномерного и в среднем) класса периодических функций, имеющих дробную s-ю производную. В частности, находится наилучшее приближиние в среднем при помощи тригонометрических полиномов заданного порядка функции

$$\Psi_s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \cos\left(kt - \frac{s\pi}{2}\right)$$

при $0 < s < 1$.

§ 1. Введение

Под наилучшим равномерным приближением (т. е. приближением в метрике C) некоторой непрерывной периода 2π функции $f(t)$ при помощи тригонометрических полиномов $T_n(t)$ заданного порядка n будем понимать величину

$$E_n[f(t)]_C = E_n(f)_C = \min_{T_n} \max_t |f(t) - T_n(t)|,$$

а под наилучшим приближением в среднем (т. е. приближением в метрике L) суммируемой периода 2π функции $\varphi(t)$ — величину

$$E_n[\varphi(t)]_L = E_n(\varphi)_L = \min_{T_n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T_n(t)|\, dt.$$

Иногда (когда это не сможет вызвать недоразумений) мы будем просто писать $E_n(f)$ или $E_n(\varphi)$.

В § 3 дано решение задачи наилучшего приближения в метрике L функции $\Psi_s(t)$ ($0 < s < 1$), представимой следующим тригонометрическим рядом:

$$\Psi_s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{s\pi}{2}\right)}{k^s}. \tag{1}$$

Для решения этой задачи мы в § 2 исследуем поведение при достаточно больших n функции $W_n(t)$, равной

$$W_n(t) \doteq \frac{1}{\sin nt} [\Psi_s(t) - T^*_{n-1}(t)], \tag{2}$$

где $T^*_{n-1}(t)$ — тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка, интерполирующий функцию $\Psi_s(t)$ в нулях $\sin nt$. Это исследование представляет также самостоятельный интерес в силу того обстоятельства, что среди всех тригонометрических полиномов $(n-1)$-го порядка полином $T^*_{n-1}(t)$, как это будет доказано в § 3, наименее уклоняется в метрике L от функции $\Psi_s(t)$, в силу чего функция $W_n(t)$ является характеристической функцией наилучшего приближения в среднем функции $\Psi_s(t)$.

Отправляясь от результатов § 2 и 3, мы в § 4 и 5 распространяем на случай дробного $s\,(0<s<1)$ ряд результатов, полученных для целых $s\,(s=1, 2, \ldots)$ в работах Ж. Фавара, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна, С. М. Никольского и автора [см. (1), (2), (3), (4) и (5)]; в § 4 мы находим величину наилучшего приближения (в метриках C и L) на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0<s<1)$, и указываем линейный метод, осуществляющий это приближение; в § 5 доказываем лемму, позволяющую находить (асимптотически) величину наилучшего приближения в среднем периодических функций с особенностями вида особенности функции $\Psi_s(t)$ $(0<s<1)$ в точке $t=0$.

§ 2. Исследование поведения функции $W_n(t)$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть s — произвольное дробное число* $(0<s<1)$. *Тогда при достаточно больших n и $t\in(0, 2\pi)$*

$$W_n(t)=\frac{s\sin\frac{s\pi}{2}K_s}{2\sin^2\frac{t}{2}\,n^{s+1}}\left[1+O\left(\frac{1}{n\sin\frac{t}{2}+1}\right)\right], \tag{3}$$

где

$$K_s=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^{s+1}}.$$

Кроме того, при $t\in\left(0,\ \frac{\ln n}{n}\right)$

$$\frac{K}{t^{1-s}nt}>W_n(t)>\frac{K'}{t^{2-s}(t+t_1)^s}\frac{1}{n^{s+1}}, \tag{3'}$$

$$\frac{K_1}{t_1^{1-s}nt}>W_n(2\pi-t)>\frac{K_1'}{t(t+t_1)}\frac{1}{n^{s+1}}, \tag{3''}$$

где K, K', K_1 и K_1' — некоторые положительные постоянные и $t_1=\frac{\pi}{n}$.

Доказательство. В силу того что способы доказательства соотношений (3), (3′) и (3″) будут совершенно различными, мы разобьем доказательство теоремы 1 на четыре части.

I. Доказательство соотношения (3). Воспользуемся следующими предложениями:

1°. Пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty}{}' a_k\cos kt$ обозначает ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt.$$

Тогда если a_k (соответственно b_k) стремятся к нулю при $k \to \infty$, то в каждой точке t, в которой сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty}{}' a_k \cos kt$ (соответственно ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt$), справедливы соотношения:

$$\sin nt \sum_{k=0}^{\infty}{}' a_k \cos kt = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (a_{n-j} - a_{n+j}) \sin jt + \frac{1}{2} \sum_{j=n}^{\infty} (a_{j-n} - a_{j+n}) \sin jt, \quad (4)$$

$$\sin nt \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1}{}' (b_{n-j} + b_{n+j}) \cos jt + \frac{1}{2} \sum_{j=n}^{\infty} (b_{j+n} - b_{j-n}) \cos jt, \quad (5)$$

которые непосредственно вытекают при $N \to \infty$ из следующих тождеств:

$$\sin nt \sum_{k=0}^{N}{}' a_k \cos kt = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N}{}' a_k [\sin (k+n) t - \sin (k-n) t] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=n}^{N+n} a_{j-n} \sin jt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} \sin jt - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-n} a_{j+n} \sin jt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (a_{n-j} - a_{n+j}) \sin jt + \frac{1}{2} \sum_{j=n}^{N-n} (a_{j-n} - a_{j+n}) \sin jt + \frac{1}{2} \sum_{j=N-n+1}^{N+n} a_{j-n} \sin jt,$$

$$\sin nt \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} b_k [\cos (k-n) t - \cos (k+n) t] =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{N+n} b_{j-n} \cos jt + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} \cos jt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-n} b_{n+j} \cos jt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (b_{n-j} + b_{n+j}) \cos jt + \frac{1}{2} \sum_{j=n}^{N-n} (b_{j+n} - b_{j-n}) \cos jt - \frac{1}{2} \sum_{j=N-n+1} b_{j-n} \cos jt.$$

2°. Если $\{\lambda_k\}$ есть выпуклая нуль-последовательность, т. е. если

$$\Delta^2 \lambda_k = \lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} > 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$, то при $t \in (0, 2\pi)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Delta^2 \lambda_k = \lambda_0, \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cos kt = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 \lambda_k [1 - \cos (k+1) t] =$$

$$= \frac{\Delta \lambda_0}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 \lambda_k \cos (k+1) t, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin kt = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 \lambda_k [(k+1) \sin t - \sin (k+1) t] =$$

$$= \frac{\lambda_0 \sin t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 \lambda_k \sin (k+1) t. \quad (8)$$

Все эти соотношения доказываются при помощи преобразования Абеля. Докажем, например, (8). Мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kt = \sum_{k=1}^{n} \Delta\lambda_k \overline{D}_k(t) + \lambda_{n+1}\overline{D}_n(t) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \Delta^2\lambda_\nu \overline{K}_\nu(t) + \Delta\lambda_{n+1}\overline{K}_n(t) + \lambda_{n+1}\overline{D}_n(t),$$

где

$$\overline{D}_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \sin jt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$\overline{K}_\nu(t) = \sum_{j=1}^{\nu} D_j(t) = \frac{\nu\cos\frac{t}{2} - \left[\cos\frac{3}{2}t + \cos\frac{5}{2}t + \ldots + \cos\frac{2\nu+1}{2}t\right]}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{\nu\cos\frac{t}{2} + \dfrac{\sin t - \sin(\nu+1)t}{2\sin\frac{t}{2}}}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{(\nu+1)\sin t - \sin(\nu+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Устремляя n к бесконечности и учитывая, что при этом $n\Delta\lambda_n \to 0$ [см. ([6]), стр. 64], получим первую часть соотношения (8). Вторая часть справедлива в силу (6). Доказательство (6) имеется в работе ([6]) на стр. 64; наконец, (7) следует при $n \to \infty$ из соотношения [см. ([6]), стр. 112]:

$$\sum_{k=0}^{n}{}' \lambda_k \cos kt = \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\Delta^2\lambda_\nu K_\nu(t) + K_n(t)(n+1)\Delta\lambda_{n+1} + D_n(t)\lambda_{n+1},$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$(\nu+1)K_\nu(t) = \sum_{j=0}^{\nu} D_j(t) = \sum_{j=0}^{\nu} \frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\nu+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 = \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,[1-\cos(\nu+1)t].$$

Отметим, что так как $|\cos kt| \leqslant 1$ и $|\sin kt| \leqslant k|\sin t|$ (справедливость этого неравенства доказывается при помощи индукции), то при произвольном фиксированном t, в силу (6), имеет место:

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2\lambda_\nu \cos(\nu+1)t\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2\lambda_\nu = \Delta\lambda_0,$$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2\lambda_\nu \sin(\nu+1)t\right| \sin t \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\Delta^2\lambda_\nu = \lambda_0|\sin t|\right.$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}{}' \lambda_k \cos kt = \frac{\Delta\lambda_0}{4\sin^2\frac{t}{2}}(1+\overline{\theta}_1), \tag{7'}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin kt = \frac{\lambda_0 \sin t}{4\sin^2\frac{t}{2}}(1+\overline{\theta}_2), \tag{8'}$$

где $|\overline{\theta}_1|<1$ и $|\overline{\theta}_2|<1$.

Покажем, что при $t \in (0,\ 2\pi)$

$$2\sin nt \lim_{l\to\infty}\left\{\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty} b_j^l \sin jt + \sin\frac{s\pi}{2}\sum_{j=0}^{\infty}{}' a_j^l \cos jt\right\} = \Psi_s(t) - T_{n-1}(t), \tag{9}$$

где

$$b_j^l = r^j\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[(2i-1)n]^s} - \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[j+(2i-1)n]^s}, \quad a_j^l = \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[j+(2i-1)n]^s}. \tag{10}$$

$T_{n-1}(t)$ есть некоторый тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка, очевидно, интерполирующий функцию $\Psi_s(t)$ в нулях $\sin nt$ и поэтому совпадающий с $T^*_{n-1}(t)$ [см. (2)] * , а $r=r(l)$ есть произвольная функция от целочисленного аргумента l, удовлетворяющая при каждом данном l условию:

$$0<1-r^{2n}<\frac{1}{l}. \tag{11}$$

В самом деле, применяя при фиксированных n и l соотношение (5), получим:

$$2\sin nt\sum_{j=1}^{\infty} b_j^l \sin jt = 2\sin nt \sum_{j=1}^{\infty}\left\{r^j\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[(2i-1)n]^s} - \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[j+(2i-1)n]^s}\right\}\sin jt =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}{}'\left\{r^{n-j}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[(2i-1)n]^s} + r^{n+j}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[(2i-1)n]^s} - \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[n-j+(2i-1)n]^s} -\right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[n+j+(2i-1)n]^s}\right\}\cos jt = \sum_{j=n}^{\infty}\left\{(r^{j+n}-r^{j-n})\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[(2i-1)n]^s} -\right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[j+n+(2i-1)n]^s} + \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[j-n+(2i-1)n]^s}\right\}\cos jt =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}{}'\left\{(r^{n-j}+r^{n+j}-2)\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[(2i-1)n]^s} - \sum_{i=1}^{l}\left[\frac{1}{(-j+2in)^s} + \frac{1}{(j+2in)^s} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{[(2i-1)n]^s}\right]\right\}\cos jt + \sum_{j=n}^{\infty}\left\{r^j\frac{r^{2n}-1}{r^n}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[(2i-1)n]^s} + \frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+2ln)^s}\right\}\cos jt =$$

---

* Существование и конечность предела

$$\lim_{l\to\infty}\left\{\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty} b_j^l \sin jt + \sin\frac{s\pi}{2}\sum_{j=0}^{\infty}{}' a_j^l \cos jt\right\} = \frac{1}{2}W_n(t)$$

в каждой точке $t \in (0,\ 2\pi)$ будут доказаны ниже [см. (14)].

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ (r^{n-j} + r^{n+j} - 2) \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{[(2i-1)\,n]^s} - \sum_{i=1}^{l} \left[\frac{1}{(-j+2in)^s} + \frac{1}{(j+2in)^s} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{(2in-n)^s} \right] \right\} \cos jt - (1 - r^{2n}) \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{[(2i-1)\,n]^s} \right) \frac{\cos nt - r\cos(n-1)\,t}{1 - 2r\cos t + r^2} +$$

$$+ \sum_{j=n}^{\infty} \left[\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+2ln)^s} \right] \cos jt.$$

Учитывая, что

$$|r^{n-j} + r^{n+j} - 2| < 2\,(1 - r^{2n}) < \frac{2}{l} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{[(2i-1)\,n]^s} < \frac{1}{n^s} \int_0^{2l} \frac{dt}{t^s} = O\left(\frac{l}{l^s n^s}\right),$$

$$\left| \frac{\cos nt - r\cos(n-1)\,t}{1 - 2r\cos t + r^2} \right| < \frac{2}{(1-r)^2 + 2r\,(1 - \cos t)} < \frac{1}{r\,(1 - \cos t)}, \tag{12}$$

$$\sum_{j=n}^{\infty} \frac{\cos jt}{(j+2ln)^s} = \sum_{k=(2l+1)\,n}^{\infty} \frac{\cos(k-2ln)\,t}{k^s} =$$

$$= \left(\sum_{k=(2l+1)\,n}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^s} \right) \cos 2\,lnt + \left(\sum_{k=(2l+1)\,n}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^s} \right) \sin 2\,lnt,$$

мы при каждом фиксированном n, устремляя l к бесконечности, найдем:

$$2 \sin nt \lim_{l\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j^l \sin jt = \sum_{j=0}^{n-1}{}' \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(2in-n)^s} - \frac{1}{(-j+2in)^s} - \frac{1}{(j+2in)^s} \right] \cos jt + \right.$$

$$+ \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\cos jt}{j^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^s} - T'_{n-1}(t), \tag{9'}$$

где

$$T'_{n-1}(t) = -\frac{1}{n^s} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2i-1)^s} - \frac{1}{(2i)^s} \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{j^s} - \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(2in-n)^s} - \frac{1}{(2in-j)^s} - \frac{1}{(2in+j)^s} \right] \right\} \cos jt.$$

Докажем [см. также (7), Satz III], что

$$2 \sin nt \lim_{l\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty}{}' a_j^l \cos jt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^s} - T''_{n-1}(t), \tag{9''}$$

где

$$T''_{n-1}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{j^s} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2\nu n-j)^s} - \frac{1}{(2\nu n+j)^s} \right] \right\} \sin jt.$$

Действительно, в силу (4).

$$2\sin nt \sum_{j=0}^{\infty}{}' a_j^l \cos jt = \sum_{j=1}^{n-1} (a_{n-j}^l - a_{n+j}^l) \sin jt + \sum_{j=n}^{\infty} (a_{j-n}^l - a_{j+n}^l) \sin jt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{l} \left[\frac{1}{(2in-j)^s} - \frac{1}{(2in+j)^s} \right] \right\} \sin jt + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\sin jt}{j^s} - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\sin jt}{(2ln+j)^s}.$$

Устремляя l к бесконечности и учитывая, что при этом

$$\sum_{j=n}^{\infty} \frac{\sin jt}{(j+2\,\mathrm{ln})^s} = \sum_{k=(2l+1)n}^{\infty} \frac{\sin (k-2\,ln)\,t}{k^s} =$$

$$= \left(\sum_{k=(2l+1)n}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^s} \right) \cos 2\,lnt - \left(\sum_{k=(2l+1)n}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^s} \right) \sin 2lnt \to 0,$$

мы получим (9″). Из (9′) и (9″) следует (9).

Применяя для оценки сумм в фигурных скобках (9) формулы (7) и (8), найдем [см. ([6]), стр. 7]:

$$\alpha(l;t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^l \sin jt = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ r^j \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{[(2i-1)\,n]^s} - \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{[j+(2i-1)\,n]^s} \right\} \sin jt =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} r^j \sin jt \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{[(2i-1)\,n)^s} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{[j+(2i-1)\,n]^s} \right) \sin jt =$$

$$= \frac{r \sin t}{1-2r\cos t + r^2} \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{[(2i-1)\,n]^s} - \frac{\sin t}{4\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{[(2i-1)\,n]^s} +$$

$$+ \frac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{l} \Delta^2 \frac{1}{[j+(2i-1)\,n]^s} \right) \sin (j+1)\,t =$$

$$= \frac{-(1-r)^2 \sin t}{4\sin^2 \frac{t}{2}\,(1-2r\cos t + r^2)} \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{[(2i-1)\,n]^s} +$$

$$+ \frac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{l} \Delta^2 \frac{1}{[j+(2i-1)\,n]^s} \right) \sin (j+1)\,t, \tag{13}$$

$$\beta(l;t) = \sum_{j=0}^{\infty}{}' a_j^l \cos jt = \sum_{j=0}^{\infty}{}' \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{[j+(2i-1)\,n]^s} \right) \cos jt =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{i=1}^{l} \Delta \frac{1}{[(2i-1)\,n]^s} - \frac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{l} \Delta^2 \frac{1}{[j+(2i-1)\,n]^s} \right) \cos (j+1)\,t =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{i=1}^{l} \left\{ \frac{1}{[(2i-1)\,n]^s} - \frac{1}{[(2i-1)\,n+1]^s} \right\} -$$

$$- \frac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{l} \Delta^2 \frac{1}{[j+(2i-1)\,n]^s} \right) \cos (j+1)\,t;$$

устремляя l к бесконечности, в силу (11) и (12) будем иметь:

$$\alpha(t) = \lim_{l\to\infty} \alpha(l; t) = \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta^2 \frac{1}{[\nu + (2i-1)n]^s} \right) \sin(\nu+1)t,$$

$$\beta(t) = \lim_{l\to\infty} \beta(l; t) = \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s}{[(2i-1)n + \theta_i]^{s+1}} -$$

$$- \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta^2 \frac{1}{[\nu + (2i-1)n]^s} \right) \cos(\nu+1)t,$$

где $0 < \theta_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Отсюда, в силу (2) и (9), следует, что

$$W_n(t) = 2\cos\frac{s\pi}{2} \cdot \alpha(t) + 2\sin\frac{s\pi}{2} \cdot \beta(t) =$$

$$= \frac{\cos\frac{s\pi}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta^2 \frac{1}{[\nu + (2i-1)n]^s} \right) \sin(\nu+1)t +$$

$$+ \frac{s.\sin\frac{s\pi}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{[(2i-1)n + \theta_i]^{s+1}} - \frac{\sin\frac{s\pi}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta^2 \frac{1}{[\nu + (2i-1)n]^s} \right) \cos(\nu+1)t. \tag{14}$$

Учитывая, наконец, что последовательность

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^2 \frac{1}{[\nu + (2i-1)n]^s} \right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

является выпуклой нуль-последовательностью, мы, в силу (7′) и (8′), получим:

$$W_n(t) = \frac{s.\sin\frac{s\pi}{2}}{2n^{s+1}\sin^2\frac{t}{2}} \left[K_s + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] +$$

$$+ \frac{\cos\frac{s\pi}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} \frac{\sin t}{4\sin^2\frac{t}{2}} (1 + \bar{\theta}_2) \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^2 \frac{1}{[-1 + (2i-1)n]^s} -$$

$$- \frac{\sin\frac{s\pi}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}} (1 + \bar{\theta}_1) \sum_{i=1}^{\infty} \Delta^3 \frac{1}{[-1 + (2i-1)n]^s} =$$

$$= \frac{s.\sin\frac{s\pi}{2}}{2n^{s+1}\sin^2\frac{t}{2}} \left[K_s + O\left(\frac{1}{n\sin\frac{t}{2}}\right) + O\left(\frac{1}{n^2\sin^2\frac{t}{2}}\right) \right].$$

Отсюда и вытекает справедливость соотношения (3) при $t \in \left(\frac{1}{n}, 2\pi - \frac{1}{n}\right)$; справедливость (3) при $t \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ или $t \in \left(2\pi - \frac{1}{n}, 2\pi\right)$ следует из первых частей неравенств (3′) и (3″), доказательство которых мы получим в конце этого параграфа. Заметим еще, что так как в правой части

соотношения (14) все слагаемые, кроме первого, являются четными а знак первого слагаемого, в силу (8), совпадает со знаком $\sin t$:

$$\operatorname{sign}\left\{\frac{\cos\frac{s\pi}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\Delta^2\frac{1}{[\nu+(2i-1)n]^s}\right)\sin(\nu+1)t\right\}=$$

$$=\operatorname{sign}\left\{\frac{\cos\frac{s\pi}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{\sin t}{4\sin^2\frac{t}{2}}(1+\bar{\theta}_2)\sum_{i=1}^{\infty}\Delta^2\frac{1}{[-1+(2i-1)n]^s}\right\}=\operatorname{sign}\sin t,$$

то при $t\in(0,\pi)$

$$W_n(t)>W_n(-t)=W_n(2\pi-t). \tag{15}$$

II. Доказательство второй части (3″). Воспользуемся следующим представлением функции $\Psi_s(t)$ [см. ([8]), § 6]:

$$\Psi_s(t)=\frac{\pi}{\Gamma(s)}\cdot\frac{1}{t^{1-s}}+\frac{\pi}{\Gamma(s)}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(t+2\pi)^{1-s}}+\frac{1}{(t+4\pi)^{1-s}}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{(t+2\pi n)^{1-s}}-\frac{1}{(2\pi)^{1-s}}\cdot\frac{n^s}{s}\right\}=\frac{\pi}{\Gamma(s)}\frac{1}{t^{1-s}}+A_s(t),\quad t\in(0,2\pi), \tag{16}$$

где

$$A_s(t)=\frac{\pi}{\Gamma(s)}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(t+2\pi)^{1-s}}+\frac{1}{(t+4\pi)^{1-s}}+\cdots+\frac{1}{(t+2\pi n)^{1-s}}-\frac{1}{(2\pi)^{1-s}}\cdot\frac{n^s}{s}\right\}.$$

Принимая во внимание, что, в силу теоремы о среднем, при $t\in(0,2\pi)$

$$\int_{2(k+1)\pi}^{2(k+2)\pi}\frac{dx}{x^{1-s}}<2\pi\frac{1}{(t+2k\pi)^{1-s}}<\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{dx}{x^{1-s}},$$

мы находим для произвольного n:

$$\frac{1}{(2\pi)^{1-s}}\cdot\frac{n^s}{s}-\frac{(4\pi)^s}{2\pi s}=\frac{1}{2\pi}\int_{4\pi}^{2n\pi}\frac{dx}{x^{1-s}}<$$

$$<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(t+2k\pi)^{1-s}}<\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2n\pi}\frac{dx}{x^{1-s}}=\frac{1}{(2\pi)^{1-s}}\cdot\frac{n^s}{s}$$

и, следовательно,

$$-\frac{(4\pi)^s}{2\Gamma(s+1)}<A_s(t)<0,$$

т. е. $A_s(t)$ есть ограниченная монотонно убывающая выпуклая функция.

Обозначим через $T^{(1)}_{n-1}(t)$ тригонометрический полином, интерполирующий функцию $\frac{1}{t^{1-s}}$ в точках $t_k=\frac{k\pi}{n}$ $(k=1,2,\ldots,2n-1)$, а через $T^{(2)}_{n-1}(t)$ — полином, интерполирующий в этих же точках функцию $A_s(t)$. Тогда, очевидно,

$$W_n(t)=\frac{\pi}{\Gamma(s)}\cdot\frac{1}{\sin nt}\left[\frac{1}{t^{1-s}}-T^{(1)}_{n-1}(t)\right]+$$

$$+\frac{1}{\sin nt}[A_s(t)-T^{(2)}_{n-1}(t)]=\frac{\pi}{\Gamma(s)}C_1(t)+C_2(t), \tag{17}$$

где

$$C_1(t)=\frac{1}{\sin nt}\left[\frac{1}{t^{1-s}}-T^{(1)}_{n-1}(t)\right],\qquad C_2(t)=\frac{1}{\sin nt}[A_s(t)-T^{(2)}_{n-1}(t)]. \tag{17'}$$

Оценим каждое слагаемое правой части равенства (17) в отдельности.

1. Известно, что для всякого тригонометрического полинома n-го порядка $T_n(\theta)$ справедливо тождество [см. (9), стр. 303]:

$$T_n(\theta) = C \cos n\theta + \frac{\cos n\theta}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k T_n(\theta_k) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_k}{2}, \tag{18}$$

где C имеет некоторое неизвестное нам значение, а θ_k — нули $\cos n\theta$:

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Покажем, что в правой части (18) слагаемое

$$\frac{\cos n\theta}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k T_n(\theta_k) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_k}{2}$$

представляет собой тригонометрический полином n-го порядка, не содержащий члена с $\cos n\theta$.

В самом деле, при произвольном k $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$

$$\cos n\theta \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_k}{2} = (-1)^k \sin n(\theta - \theta_k) \cdot \frac{1 + \cos(\theta - \theta_k)}{\sin(\theta - \theta_k)}$$

и так как

$$\frac{\sin n(\theta - \theta_k)}{\sin(\theta - \theta_k)}$$

есть тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка, а

$$\frac{\sin n(\theta - \theta_k)}{\sin(\theta - \theta_k)} \cos(\theta - \theta_k)$$

есть четный относительно $(\theta - \theta_k)$ тригонометрический полином, не содержащий $\sin n(\theta - \theta_k) = (-1)^k \cos n\theta$, то наше утверждение доказано. Отсюда следует, что для всякого тригонометрического полинома $(n-1)$-го порядка $\bar{T}_{n-1}(\theta)$ справедливо тождество:

$$T_{n-1}(\theta) \equiv \frac{\cos n\theta}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \bar{T}_{n-1}(\theta_k) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_k}{2}. \tag{19}$$

Полагая $\bar{T}_{n-1}(\theta) = T_{n-1}\left(\theta + \frac{q\pi}{2n}\right)$, где q — произвольное фиксированное действительное число, получим:

$$T_{n-1}\left(\theta + \frac{q\pi}{2n}\right) \equiv \frac{\cos n\theta}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k T_{n-1}\left(\theta_k + \frac{q\pi}{2n}\right) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_k}{2},$$

или, если произвести замену переменной $\theta = t - \frac{q\pi}{2n}$, $\theta_k = t_k - \frac{q\pi}{2n}$:

$$T_{n-1}(t) \equiv \frac{\cos\left(nt - \frac{q\pi}{2}\right)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k T_{n-1}(t_k) \operatorname{ctg} \frac{t - t_k}{2} =$$

$$= \frac{\cos\left(nt - \frac{q\pi}{2}\right)}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k T_{n-1}(t_k) \operatorname{ctg} \frac{t - t_k}{2}. \tag{20}$$

В частности, при $q = 1$ находим:

$$T_{n-1}(t) \equiv \frac{\sin nt}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \cdot T_{n-1}(t_k) \operatorname{ctg} \frac{t - t_k}{2}, \tag{20'}$$

где t_k — нули $\sin nt$: $t_k = \frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$.

Учитывая, что, в силу равенств

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k e^{il\cdot\frac{k\pi}{n}} = \frac{1-\left(-e^{i\frac{l\pi}{n}}\right)^{2n}}{1+e^{i\frac{l\pi}{n}}} = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

для всякого тригонометрического полинома $(n-1)$-го порядка $T_{n-1}(t)$ справедливо равенство:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k T_{n-1}(t_k) = 0, \tag{21}$$

мы найдем, что в точке $t_0 = 0$ полином $T_{n-1}^{(1)}(t)$ [см. (17)] примет значение, равное

$$T_{n-1}^{(1)}(0) = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} T_{n-1}^{(1)}(t_k) = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{t_k^{1-s}}. \tag{22}$$

Поэтому, применяя тождество (20′), получим:

$$T_{n-1}^{(1)}(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left\{T_{n-1}^{(1)}(0)\operatorname{ctg}\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k t_k^{s-1}\operatorname{ctg}\frac{t-t_k}{2}\right\}. \tag{23}$$

Так как, с другой стороны,

$$\frac{1}{t^{1-s}} = \frac{1}{t^{1-s}}\,\frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \operatorname{ctg}\frac{t-t_k}{2} =$$

$$= \frac{\sin nt}{2n}\left\{\frac{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{t^{1-s}} + \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k t^{s-1}\operatorname{ctg}\frac{t-t_k}{2}\right\},$$

то [см. (17)]:

$$C_1(2\pi - t) = \frac{1}{2n}\left\{\operatorname{ctg}\frac{2\pi-t}{2}\left[\frac{1}{(2\pi-t)^{1-s}} - T_{n-1}^{(1)}(0)\right] - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k\left[t_k^{s-1} - (2\pi-t)^{s-1}\right]\operatorname{ctg}\frac{2\pi-t-t_k}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2n}\left\{-\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\left[\frac{1}{(2\pi-t)^{1-s}} - T_{n-1}^{(1)}(0)\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k\left[t_k^{s-1} - (2\pi-t)^{s-1}\right]\operatorname{ctg}\frac{t+t_k}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{nt}\left\{\left[T_{n-1}^{(1)}(0) - \frac{1}{(2\pi-t)^{1-s}}\right]\frac{\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} - t\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}\,\frac{t_k^{s-1} - (2\pi-t)^{s-1}}{t+t_k}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\frac{t+t_k}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t+t_k}{2}} - t\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\,\frac{t_{2n-k}^{s-1} - (2\pi-t)^{s-1}}{t-t_k}\cdot\frac{\frac{t-t_k}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t-t_k}{2}}\right\}. \tag{24}$$

Воспользовавшись разложением [см., например ([10]), т. II, стр. 509]:

$$\frac{\pi x}{\operatorname{tg}\pi x}=1-2\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}x^{2j}\quad(|x|<1),\tag{25}$$

где $S_{2j}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2j}}$, мы при $t\in\left(0,\frac{1}{n^{1-s}}\right)$ будем иметь:

$$\left[T_{n-1}^{(1)}(0)-\frac{1}{(2\pi-t)^{1-s}}\right]\frac{\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}=\left[T_{n-1}^{(1)}(0)-\frac{1}{(2\pi-t)^{1-s}}\right]\left[1-2\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{2j}\right]=$$

$$=T_{n-1}^{(1)}(0)+O(1),\tag{a}$$

$$t\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{t_k^{s-1}-(2\pi-t)^{s-1}}{t+t_k}\frac{\frac{t+t_k}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t+t_k}{2}}=t\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{t_k^{s-1}-(2\pi-t)^{s-1}}{t-t_k}-$$

$$-2t\sum_{k-1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{t_k^{s-1}-(2\pi-t)^{s-1}}{t+t_k}\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}\left(\frac{t+t_k}{2\pi}\right)^{2j}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{t\,t_k^{s-1}}{t+t_k}-(2\pi-t)^{s-1}t\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{t+t_k}-$$

$$-\frac{t}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\left[\frac{1}{t_1^{1-s}}-\left(\frac{1}{t_1^{1-s}}-\frac{1}{t_k^{1-s}}\right)\right]\left(\frac{t+t_k}{2\pi}\right)^{2j-1}+$$

$$+\frac{(2\pi-t)^{s-1}t}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\left(\frac{t+t_k}{2\pi}\right)^{2j-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{tt_k^{s-1}}{t+t_k}+O(1)-\frac{1}{\pi}\frac{t}{t_1^{1-s}}\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\left(\frac{t+t_k}{2\pi}\right)^{2j-1}+$$

$$+\frac{t}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{t_1^{1-s}}-\frac{1}{t_k^{1-s}}\right)\left(\frac{t+t_k}{2\pi}\right)^{2j-1}+O(t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{tt_k^{s-1}}{t+t_k}+O(1)+O\left(\frac{t}{t_1^{1-s}}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{tt_k^{s-1}}{t+t_k}+O(1),\tag{b}$$

$$t\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t_{2n-k}^{s-1}-(2\pi-t)^{s-1}}{t-t_k}\frac{\frac{t-t_k}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t-t_k}{2}}=t\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t_{2n-k}^{s-1}-(2\pi-t)^{s-1}}{t-t_k}-$$

$$-\frac{t}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi-t_k)^{1-s}}\left(\frac{t-t_k}{2\pi}\right)^{2j-1}+$$

$$+\frac{t(2\pi-t)^{s-1}}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{t-t_k}{2\pi}\right)^{2j-1}=O(t)+O(t)+O(t)=O(t),\tag{c}$$

ибо:

1) последовательность

$$\left\{\frac{t_{2n-k}^{s-1}-(2\pi-t)^{s-1}}{t-t_k}\right\}=\left\{\frac{(2\pi-t_k)^{s-1}-(2\pi-t)^{s-1}}{t-t_k}\right\}$$

является монотонной и ограниченной, как последовательность угловых коэффициентов пучка прямых, проходящих через точку $(2\pi-t;\,(2\pi-t)^{s-1})$ и точки $(2\pi-t_k;\,(2\pi-t_k)^{s-1})$;

2) если $t\in(t_i,\,t_{i+1})$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi-t_k)^{1-s}}\left(\frac{t_k-t}{2\pi}\right)^{2j-1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1}\left[\frac{1}{\pi^{1-s}}-\left(\frac{1}{\pi^{1-s}}-\frac{1}{(2\pi-t_k)^{1-s}}\right)\right]\left(\frac{t_k-t}{2\pi}\right)^{2j-1}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}S_{2j}\sum_{k=i+1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi-t_k)^{1-s}}\left(\frac{t_k-t}{2\pi}\right)^{2j-1}=O(1).$$

Подставляя (a), (b) и (c) в (24), получим:

$$C_1(2\pi-t)=\frac{1}{nt}\left\{T_{n-1}^{(1)}(0)-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{tt_k^{s-1}}{t+t_k}+O(1)\right\},\tag{26}$$

или, заменяя $\frac{tt_k^{s-1}}{t+t_k}$ через $\frac{1}{t_k^{1-s}}-\frac{t_k^s}{t+t_k}$, в силу (22), найдем:

$$C_1(2\pi-t)=\frac{1}{nt}\left\{T_{n-1}^{(1)}(0)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{t_k^{1-s}}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{t_k^s}{t+t_k}+O(1)\right\}=$$

$$=\frac{1}{nt}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{t_k^s}{t+t_k}+O(1)\right\}.\tag{27}$$

Для оценки суммы в фигурных скобках исследуем сначала вид функции

$$f(x)=\frac{x^s}{t+x}.$$

Мы найдем:

$$f'(x)=\frac{\left[\frac{st}{x}-(1-s)\right]}{(t+x)^2}x^s,\quad f'\left(\frac{st}{1-s}\right)=0,\tag{28}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x^{2-s}(x+t)^3}[(1-s)(2-s)x^2-2s(2-s)tx-s(1-s)t^2],$$

$$f''\left(\frac{s(2-s)\pm\sqrt{s(2-s)}}{(2-s)(1-s)}\,t\right)=0.\tag{28'}$$

Отсюда следует, что:

α) функция $f(x)$ растет при $x\in\left[0,\,\frac{st}{1-s}\right]$ и убывает при $x>\frac{st}{1-s}$;

β) функция $f(x)$ вогнута при $x\in\left(0,\,\frac{s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}}{(2-s)(1-s)}\,t\right)$ и выпукла при

$$x > \frac{s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}}{(2-s)(1-s)}\, t > \frac{st}{1-s};$$

γ) $\max\limits_{\frac{st}{1-s}<x<\pi} |f'(x)| = -f'\left(\frac{s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}}{(2-s)(1-s)}t\right)$ и, следовательно,

$$\max_{t_{2k}>\frac{st}{1-s}} \left|\frac{t_{2k}^s}{t+t_{2k}} - \frac{t_{2k+1}^s}{t+t_{2k+1}}\right| = \max_{t_{2k}>\frac{st}{1-s}} |f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})| \leqslant$$

$$\leqslant -t_1 \cdot f'\left(\frac{s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}}{(2-s)(1-s)}\, t\right). \tag{29}$$

Заметим, что если некоторая последовательность $\{a_k\}$ обладает тем свойством, что при $k \leqslant 2N-2$ $\Delta^2 a_k \leqslant 0$, а при $k \geqslant 2N$ $\Delta^2 a_k \geqslant 0$, то при условии $\left[\frac{n}{2}\right] \geqslant N+1$ справедливо соотношение:

$$\sum_{k=1}^{2\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k-1} a_k + \frac{1}{2} a_{2\left[\frac{n}{2}\right]+1} = a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} \Delta^2 a_{2i} - \frac{a_{2N}}{2} + \frac{a_{2N+1}}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=N+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \Delta^2 a_{2i-1} > a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{1}{2}(a_{2N} - a_{2N+1});$$

принимая во внимание свойства α) и β) функции $f(x)$, а также соотношения (28) и (29), мы получаем:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{2\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k-1} \frac{t_k^s}{t+t_k} + \frac{1}{2}\, \frac{t^s_{2\left[\frac{n}{2}\right]+1}}{t+t_{2\left[\frac{n}{2}\right]+1}} > \frac{t_1^s}{t+t_1} - \frac{t_2^s}{2(t+t_2)} -$$

$$-\frac{1}{2}\max_{t_{2k}>\frac{st}{1-s}} \left|\frac{t_{2k}^s}{t+t_{2k}} - \frac{t_{2k+1}^s}{t+t_{2k+1}}\right| \geqslant \frac{t_1^s}{t+t_1} - \frac{2^s t_1^s}{2(t+2t_1)} -$$

$$-\frac{1}{2} t_1 \frac{1-s-st\,\dfrac{(2-s)(1-s)}{s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}}\,\dfrac{1}{t}}{\left[t + \dfrac{s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}}{(2-s)(1-i)}\, t\right]^2} \cdot \left[\frac{s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}}{(2-s)(1-s)}\, t\right]^s =$$

$$= \frac{(4-2^s)\,t_1 + (2-2^s)\,t}{2(t+t_1)(t+2t_1)}\, t_1^s - \frac{1}{2}\, \frac{t_1}{t^{2-s}}\, \frac{1-s-\dfrac{s(2-s)(1-s)}{s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}}}{(2-s+\sqrt{s(2-s)})^2} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}}{(2-s)(1-s)}\right]^s (2-s)^2(1-s)^2 > \frac{(2-2^s)\,2t_1 + (2-2^s)\,t}{2(t+t_1)(t+2t_1)}\, t_1^s -$$

$$-\frac{1}{2}\, \frac{t_1}{t^{2-s}}(1-s)\, \frac{\sqrt{s(2-s)}\,(1-s)^2}{[s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}]\left(1+\sqrt{\dfrac{s}{2-s}}\right)^2} \left[\frac{s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}}{(2-s)(1-s)}\right]^s =$$

$$= \frac{2-2^s}{2(t+t_1)} t_1^s - \frac{1}{2}\frac{t_1}{t^{2-s}}(1-s)\frac{\sqrt{s(2-s)}(1-s)^{2-s}}{\left(1+\sqrt{\frac{s}{2-s}}\right)^2 [s(2-s)+\sqrt{s(2-s)}]^{1-s}}\frac{1}{(2-s)^s} >$$

$$> \frac{1-s}{2}\left\{\frac{t_1^s}{t+t_1} - \frac{t_1}{t^{2-s}}\frac{s^{\frac{s}{2}}(1-s)^{2-s}}{\left(1+\sqrt{\frac{s}{2-s}}\right)^2 [1+\sqrt{s(2-s)}]^{1-s}(2-s)^{\frac{s}{2}}}\right\}. \quad (30)$$

Поэтому, если $t > 2t_1$, то

$$\varphi(t) > \frac{1-s}{2}\cdot\frac{t_1^s}{t}\left\{\frac{2}{3} - \frac{1-s}{2^{1-s}}\right\} >$$

$$> \frac{1-s}{2t^{1-s}}\left(\frac{t_1}{t}\right)^s \frac{2\left[1+1-s-\frac{s(1-s)}{2}\right]-3(1-s)}{3\cdot 2^{1-s}} = \frac{(1-s)(1+s^2)}{3\cdot 2^{2-s}}\left(\frac{t_1}{t}\right)^s \frac{1}{t^{1-s}}. \quad (30')$$

Если же $t < 2t_1$ и $t_1 < \frac{st}{1-s}$, то в этом случае

$$1-s < \frac{t}{t+t_1}, \quad s > \frac{t_1}{t+t_1} > \frac{1}{3}$$

и

$$\left(1+\sqrt{\frac{s}{2-s}}\right)^2 > \left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 > 2,$$

и из (30) следует, что

$$\varphi(t) > \frac{1-s}{2}\left[\frac{t_1^s}{t+t_1} - \frac{t_1}{t^{2-s}}\left(\frac{t}{t+t_1}\right)^{2-s}\frac{1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1-s}{2}\frac{t_1}{t+t_1}\left[\frac{1}{t_1^{1-s}} - \frac{1}{2(t+t_1)^{1-s}}\right] > \frac{1-s}{4}\frac{t_1^s}{t+t_1}. \quad (30'')$$

Наконец, если $t < 2t_1$ и $t_1 \geqslant \frac{st}{1-s}$ то последовательность $\left\{\frac{t_k^s}{t+t_k}\right\}$ будет, в силу α), убывать уже с первого члена и, следовательно, в этом случае

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{t_k^s}{t+t_k} > \frac{t_1^s}{t+t_1} - \frac{t_2^s}{t+t_2} = \frac{t_1^s}{t+t_1} - \frac{2^s t_1^s}{t+2t_1} =$$

$$= t_1^s\frac{(2-2^s)t_1-(2^s-1)t}{(t+t_1)(t+2t_1)} > t_1^s\frac{\left[1-s+\frac{s(1-s)}{2}-\frac{s(1-s)(2-s)}{6}\right]t_1 - st}{(t+t_1)(t+2t_1)} =$$

$$= t_1^s\frac{(1-s)t_1 - st + \frac{3s(1-s)-s(1-s)(2-s)}{6}t_1}{(t+t_1)(t+2t_1)},$$

а так как при $t_1 > \frac{st}{1-s}$

$$(1-s)t_1 - st > 0,$$

то

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{t_k^s}{t+t_k} > \frac{s(1-s^2)}{6}\cdot\frac{t_1^{1+s}}{(t+t_1)(t+2t_1)}. \quad (30''')$$

Принимая во внимание, что

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{2\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^{k-1}\frac{t_k^{\ s}}{t+t_k}+\frac{1}{2}\frac{t^s_{2\left[\frac{n}{2}\right]+1}}{t+t_{2\left[\frac{n}{2}\right]+1}}=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{t_k^{\ s}}{t+t_k}+O(1),$$

мы из (27), в силу оценок (30′), (30″) и (30‴), получим, что при $t\in\left(0,\frac{1}{n^{1-s}}\right)$

$$C_1(2\pi-t)>\frac{K}{nt}\frac{1}{(nt+\pi)^s}\cdot\frac{1}{(t+t_1)^{1-s}}=\frac{K}{t(t+t_1)}\cdot\frac{1}{n^{s+1}},\tag{31}$$

где K — положительная постоянная.

2. Для оценки величины $C_2(2\pi-t)$ проведем сначала рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены для $C_1(2\pi-t)$. В силу (21),

$$T^{(2)}_{n-1}(0)=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}T^{(2)}_{n-1}(t_k)=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}A_s(t_k).$$

Эта величина, вследствие ограниченности и монотонности функции $A_s(t)$, является ограниченной равномерно по n. Воспользовавшись тождеством (20), представим $T^{(2)}_{n-1}(t)$ и $A_s(t)$ в виде:

$$T^{(2)}_{n-1}(t)=\frac{\sin nt}{2n}\left\{T^{(2)}_{n-1}(0)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k A_s(t_k)\operatorname{ctg}\frac{t-t_k}{2}\right\},$$

$$A_s(t)=\frac{\sin nt}{2n}\left\{A_s(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k A_s(t)\operatorname{ctg}\frac{t-t_k}{2}\right\}.$$

Отсюда следует, что при $t\in\left(0,\frac{1}{n^{1-s}}\right)$

$$C_2(2\pi-t)=\frac{1}{2n}\left\{\left[T^{(2)}_{n-1}(0)-A_s(2\pi-t)\right]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k[A_s(t_k)-A_s(2\pi-t)]\operatorname{ctg}\frac{t+t_k}{2}\right\}=$$
$$=\frac{1}{nt}\left\{\left[T^{(2)}_{n-1}(0)-A_s(2\pi-t)\right]\frac{\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}-t\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{A_s(t_k)-A\ (2\pi-t)}{t+t_k}\frac{\frac{t\ +}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t+t_k}{2}}-\right.$$
$$\left.-t\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{A_s(2\pi-t_k)-A_s(2\pi-t)}{t-t_k}\frac{\frac{t-t_k}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t-t_k}{2}}\right\}=$$
$$=\frac{1}{nt}\{O(1)+O(1)+O(t)\}=O\left(\frac{1}{nt}\right).\tag{32}$$

Подставляя оценки (31) и (32) в (17), получим вторую часть неравенства (3″).

III. Доказательство второй части (3′). Если $t\in\left(\frac{t_1}{3^{\frac{1}{1-s}}},\frac{1}{n^{1-s}}\right)$, то справедливость второй части (3′) следует, в силу (15), из второй части (3″). Если же $t\in\left(0,\frac{t}{3^{\frac{1}{1-s}}}\right)$, то при достаточно больших n, в силу (23) и (22),

$$\left|T_{n-1}^{(1)}(t)\right| = \frac{\sin nt}{2n}\left|\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{t_k^{1-s}}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{t_k^{1-s}}\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sin t}{2}\frac{1}{t_1^{1-s}}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} + \frac{\sin t}{2}\frac{\cos\frac{t_1}{4}}{\sin\frac{t_1}{4}}\frac{1}{t_1^{1-s}} + \frac{\sin t}{2}\left|\sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{t_k^{1-s}}\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{t_1^{1-s}} + \frac{1}{t_1^{1-s}} + \frac{\sin t}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\left[\frac{1}{\pi^{1-s}} + \left(\frac{1}{t_{2n-i}^{1-s}} - \frac{1}{\pi^{1-s}}\right)\right]\operatorname{ctg}\frac{t_{2n} - t_i - t}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{t_1^{1-s}} + \frac{\sin t}{2\pi^{1-s}}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\operatorname{ctg}\frac{t + t_i}{2} +$$

$$+ \frac{\sin t}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\left(\frac{1}{\pi^{1-s}} - \frac{1}{t_{2n-1}^{1-s}}\right)\operatorname{ctg}\frac{t + t_i}{2} < \frac{2{,}5}{t_1^{1-s}} \tag{33}$$

и, следовательно,

$$C_1(t) = \frac{1}{\sin nt}\left[\frac{1}{t^{1-s}} - T_{n-1}^{(1)}(t)\right] > \frac{1}{\sin nt}\left[\frac{1}{t^{1-s}} - \frac{2{,}5}{\left(3^{\frac{1}{1-s}}t\right)^{1-s}}\right] = \frac{1}{6t^{1-s}\sin nt}.$$

Так как, с другой стороны, легко проверить по аналогии с получением оценки (32), что $C_2(t) = O\left(\frac{1}{nt}\right)$, $t \in \left(0, \frac{t_1}{3^{\frac{1}{1-s}}}\right)$, то, в силу (17),

$$W_n(t) = \frac{\pi}{\Gamma(s)}C_1(t) + C_2(t) = \frac{\pi}{6\Gamma(s)}\cdot\frac{1}{t^{1-s}\sin nt} + O\left(\frac{1}{nt}\right) >$$

$$> \frac{\overline{K}'}{{}^{2-s}}\frac{1}{n} > \frac{K'}{t^{2-s}(t + t_1)^s}\frac{1}{n^{s+1}},$$

где $\overline{K}'$ и K' — некоторые постоянные.

IV. Доказательство первых частей неравенств (3′) и (3″) непосредственно следует из (17), если учесть, что

1) при $t > \frac{t_1}{3^{\frac{1}{1-s}}}$ справедливость этих неравенств вытекает из (3);

2) при $t \in \left(0, \frac{t_1}{3^{\frac{1}{1-s}}}\right)$:

(α) $T_{n-1}^{(1)}(t) = O\left(\frac{1}{t_1^{1-s}}\right)$ [см. (33)],

(β) $T_{n-1}^{(1)}(2\pi - t) = O\left(\frac{1}{t_1^{1-s}}\right)$

[доказательство такое же, как и для (33)];

(γ) $C_2(t) = O\left(\frac{1}{nt}\right)$, $C_2(2\pi - t) = O\left(\frac{1}{nt}\right)$.

Этим теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что из (3), (3′) и (3″) вытекает, что при достаточно больших n характеристическая функция $W_n(t)$ является положительной для всех $t \in (0, 2\pi)$.

§ 3. Наилучшее приближение в среднем функции $\Psi_s(t)$

ТЕОРЕМА 2. *При произвольном натуральном n и произвольном дробном s $(0<s<1)$*

$$E_{n-1}[\Psi_s(t)]_L = \min_{T_{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_s(t) - T_{n-1}(t)|\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_s(t) - T^*_{n-1}(t)|\,dt =$$

$$= \frac{1}{n^s} E_0[\Psi_s(t)]_L = \frac{1}{n^s}\int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_s(\xi) - \Psi_s(\pi)|\,d\xi = \frac{4K_s \cdot \sin\frac{s\pi}{2}}{n^s}, \tag{34}$$

где K_s имеет то же значение, что и в теореме 1, а $T^*_{n-1}(t)$ определяется формулой:

$$T^*_{n-1}(t) = \frac{\mu_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\mu_k^* \cos kt + \nu_k^* \sin kt),$$

где

$$\mu_0^* = -\frac{2\cos\frac{s\pi}{2}}{n^s}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2i-1)^s} - \frac{1}{(2i)^s}\right],$$

$$\mu_k^* = \cos\frac{s\pi}{2}\left\{\frac{1}{k^s} - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2in-n)^s} - \frac{1}{(2in-k)^s} - \frac{1}{(2in+k)^s}\right]\right\}, \tag{35}$$

$$\nu_k^* = \sin\frac{s\pi}{2}\left\{\frac{1}{k^s} - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2in-k)^s} - \frac{1}{(2in+k)^s}\right]\right\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму:

ЛЕММА 1. *Характеристическая функция $W_n(t)$ является положительной при всех n $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Доказательство. В силу равенств

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} e^{ik\left(t+\frac{\nu\pi}{N}\right)} = e^{ikt}\frac{1-e^{i2k\pi}}{1-e^{\frac{ik\pi}{N}}}\begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 2Nj \\ 2Ne^{ikt} & \text{при } k = 2Nj \end{cases} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

для всякого сходящегося тригонометрического ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty}{}' (a_j \cos jt + b_j \sin jt)$$

справедливо следующее тождество:

$$\sum_{\nu=0}^{2N-1}\sum_{j=0}^{\infty}{}'\left[a_j\cos j\left(t+\frac{\nu\pi}{N}\right) + b_j \sin j\left(t+\frac{\nu\pi}{N}\right)\right] =$$

$$= 2N\sum_{j=0}^{\infty}{}'(a_{2Nj}\cos j2Nt + b_{2Nj}\sin j2Nt).$$

Применяя это тождество к функции $W_m(t)$, мы, в силу (2) и (9), найдем, что при произвольном фиксированном m $(m = 1, 2, \ldots,)$ в любой точке $t \in (0, 2\pi)$

$$\sum_{\nu=0}^{2N-1} W_{2Nm}\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)=\sum_{\nu=0}^{2N-1} 2\lim_{l\to\infty}\left\{\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty} b_j{}^l \sin j\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{s\pi}{2}\sum_{j=0}^{\infty}{}' a_j{}^l \cos j\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)\right\}=2\lim_{l\to\infty}\left\{\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{2N-1}\sum_{j=1}^{\infty}\left(r^j\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[(2i-1)\,2Nm]^s}-\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[j+(2i-1)2Nm]^s}\right)\sin j\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)+$$

$$\left.+\sin\frac{s\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{2N-1}\sum_{j=0}^{\infty}{}'\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[j+(2i-1)2Nm]^s}\right)\cos j\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)\right\}=$$

$$=2\lim_{l\to\infty}\left\{2N\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(r^{2Nj}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[(2i-1)\,2Nm]^s}-\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[2Nj+(2i-1)2Nm]^s}\right)\sin jt+\right.$$

$$\left.+2N\sin\frac{s\pi}{2}\sum_{j=0}^{\infty}{}'\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[2Nj+(2i-1)\,2Nm]^s}\right)\cos jt\right\}=$$

$$=(2N)^{1-s}\,2\lim_{l\to\infty}\left\{\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left((r^{2N})^j\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[(2i-1)m]^s}-\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[j+(2i-1)\,m]^s}\right)\sin jt+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{s\pi}{2}\sum_{j=0}^{\infty}{}'\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[j+(2i-1)m]^s}\right)\cos jt\right\}=(2N)^{1-s}W_m(t),$$

т. е. при любых натуральных m и N

$$W_m(t)=\frac{1}{(2N)^{1-s}}\sum_{\nu=0}^{2N-1} W_{2Nm}\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right). \tag{36}$$

Так как, в силу замечания, сделанного в конце предыдущего параграфа, характеристическая функция $W_{2Nm}(t)$ при достаточно больших N является всюду положительной, то из соотношения (36) автоматически вытекает справедливость леммы.

Доказательство теоремы 2. Из равенств

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{ik\left(t+\frac{2\nu\pi}{n}\right)}=e^{ikt}\,\frac{1-e^{2\pi ki}}{1-e^{\frac{2\pi ki}{n}}}=\begin{cases}0\ , & \text{если } k\neq nj,\\ n.e^{ikt}\ , & \text{если } k=nj\end{cases}$$

следует, что для всякого сходящегося тригонометрического ряда $\sum_{j=0}^{\infty}(a_j\cos jt+b_j\sin jt)$ справедливо тождество:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left[a_j\cos j\left(t+\frac{2\nu\pi}{n}\right)+b_j\sin j\left(t+\frac{2\nu\pi}{n}\right)\right]=n\sum_{j=0}^{\infty}(a_{nj}\cos jnt+b_{nj}\sin jnt). \tag{37}$$

Принимая во внимание, что, в силу (2) и леммы 1,

$$\operatorname{sign}\,[\Psi_s(t)-T^*_{n-1}(t)]=\operatorname{sign}\,[\sin ntW_n(t)]=\operatorname{sign}\sin nt \tag{38}$$

и что [см. ([11]), стр. 98]

$$\int_0^{2\pi}\begin{matrix}\sin kt\\ \cos kt\end{matrix}\operatorname{sign}\sin nt\,dt=0\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

получим, что, с одной стороны,

$$E_{n-1}[\Psi_s(t)]_L = \min_{T_{n-1}} \int_0^{2\pi} |\Psi_s(t) - T_{n-1}(t)|\, dt \leqslant \int_0^{2\pi} |\Psi_s(T) - T^*_{n-1}(t)|\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\Psi_s(t) - T^*_{n-1}(t)] \operatorname{sign} \sin nt\, dt, \qquad (34')$$

а с другой (учитывая (37)):

$$E_{n-1}[\Psi_s(t)]_L = \min_{T_{n-1}} \int_0^{2\pi} |\Psi_s(t) - T_{n-1}(t)|\, dt \geqslant \min_{T_{n-1}} \int_0^{2\pi} [\Psi_s(t) - T_{n-1}(t)] \operatorname{sign}\sin nt\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\Psi_s(t) - T^*_{n-1}(t)] \operatorname{sign} \sin nt\, dt = \int_0^{2\pi} \Psi_s(t) \operatorname{sign} \sin nt\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^\nu \Psi_s\left(t + \frac{\nu\pi}{n}\right) \right\} dt = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \Psi_s\left(t + \frac{2\nu\pi}{n}\right) \right\} dt -$$

$$- \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \Psi_s\left(t + \frac{2\nu\pi}{n}\right) \right\} dt = n \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kn\xi - \frac{s\pi}{2}\right)}{(kn)^s} \right) d\xi - n \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kn\xi - \frac{s\pi}{2}\right)}{(kn)^s} \right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{n^s} \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(k\xi - \frac{s\pi}{2}\right)}{k^s} \right) d\xi - \frac{1}{n^s} \int_{\pi}^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(k\xi - \frac{s\pi}{2}\right)}{k^s} \right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{n^s} \int_0^{2\pi} |\Psi_s(\xi) - \Psi_s(\pi)|\, d\xi = \frac{4}{n^s} \sin\frac{s\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{s+1}} = \frac{4k_s \sin\frac{s\pi}{2}}{n^s}. \qquad (34'')$$

Из (34′) и (34″) следует (34). (35) следует из (9), (9′) и (9″), если учесть, что

$$T^*_{n-1}(t) = \cos\frac{s\pi}{2} T'_{n-1}(t) + \sin\frac{s\pi}{2} T''_{n-1}(t).$$

Этим теорема 2 доказана полностью.

Замечание. Как известно [см. ([2]), ([3]), а также ([11]), стр. 211—212], при целых s $(s = 1, 2, \ldots)$

$$\frac{1}{\pi} E_{n-1}[\Psi_s(t)]_L = \min_{T_{n-1}} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_s(t) - T_{n-1}(t)|\, dt = \frac{4K_s}{\pi n^s},$$

где

$$K_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(s+1)}}{(2k+1)^{s+1}};$$

учитывая, что $E_0[\Psi_s(t)]_L = \min\limits_{c} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_s(t) - c|\, dt = 4K_s$, имеем:

$$E_{n-1}[\Psi_s(t)]_L = \min_{T_{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_s(t) - T_{n-1}(t)|\, dt = \frac{4K_s}{n^s} = \frac{1}{n^s} E_0[\Psi_s(t)]_l.$$

Следствие 1. *Из теоремы 1 вытекает, что, каковы бы ни были положительные числа* $\delta\ (0<\delta<\pi)$ *и* $\varepsilon\ (\varepsilon>0)$, *при достаточно больших* n *справедливо:*

$$\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}|\Psi_s(t)-T^*_{n-1}(t)|\,dt=\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|\Psi_s(t)-T^*_{n-1}(t)|\,dt<\int_{\delta}^{2\pi-\delta}W_n(t)\,dt<$$

$$<(1+\varepsilon)\frac{s.\sin\frac{s\pi}{2}\cdot K_s}{2n^{s+1}}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}}=2(1+\varepsilon)\,s.\sin\frac{s\pi}{2}\cdot K_s\cdot\frac{\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}}{n^{s+1}}.$$

Чтобы получить аналогичную оценку при целых s, мы воспользуемся следующими предложениями, доказанными Надем [см. (7), § 2 и § 3].

Назовем последовательность $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\ l$ раз монотонной, если $\Delta^j a_i=\Delta^{j-1}a_i-\Delta^{j-1}a_{i+1}\geqslant 0$ для $j=1,2,\ldots,l$ ($\Delta^0 a_i$ обозначает здесь просто a_i) и $i=n,\ n+1,\ldots$. Тогда:

1. Для всякой трижды монотонной нуль-последовательности $\lambda_n,\ \lambda_{n+1},\ \ldots$ найдется тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка $T^{n-1}_{\lambda 0}(t)$ такой, что

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\cos kt-T^{n-1}_{\lambda 0}(t)=2\cos nt.C(t), \tag{39}$$

где

$$C(t)=\sum_{j=0}^{\infty}{}'\,c_j\cos jt,\qquad c_j=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\lambda_{j+(2\nu+1)n}.$$

2. Какова бы ни была дважды монотонная нуль-последовательность $\mu_n,\ \mu_{n+1},\ \ldots$ такая, что ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{\mu_k}{k}$ сходится, найдется тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка $T^{n-1}_{\mu 1}(t)$ такой, что

$$\sum_{k=n}^{\infty}\mu_k\sin kt-T^{n-1}_{\mu 1}(t)=\lim_{l\to\infty}[2\sin nt\,D_l(t)], \tag{39'}$$

где

$$D_l(t)=\sum_{j=0}^{\infty}d_j^l\cos jt,\qquad d_j^l=\sum_{\nu=0}^{l-1}\mu_{j+(2\nu+1)n}.$$

Полином $T^{n-1}_{\lambda 0}(t)$ (соответственно $T^{n-1}_{\mu 1}(t)$) является при этом полиномом наилучшего приближения в среднем функции $\sum\limits_{k=n}^{\infty}{}'\lambda_k\cos kt$ $\Big($соответственно $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\mu_k\sin kt\Big)$*

---

* То, что при условиях, наложенных на последовательность $\lambda_n,\ \lambda_{n+1},\ \ldots$ $(\mu_n,\ \mu_{n+1},\ \ldots)$, ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty}{}'\lambda_k\cos kt\ \Big(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\mu_k\sin kt\Big)$ сходится к некоторой суммируемой функции $\lambda(t)$ $(\mu(t))$ и является ее рядом Фурье, доказывается в теории тригонометрических рядов [см. (6), § 5.12 (I) и § 5.13].

При помощи этих двух предложений мы без труда сможем доказать следующее:

1) если $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots$ есть произвольная трижды монотонная нуль-последовательность, то

$$\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{\infty}{}' \lambda_k \cos kt - T_{\lambda 0}^{n-1}(t)\right| dt < 4\Delta c_0 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\,; \qquad (40)$$

2) если $\mu_n, \mu_{n+1}, \ldots$ есть произвольная дважды монотонная нуль-последовательность и ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{\mu_k}{k}$ сходится, то

$$\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{\infty} \mu_k \sin kt - T_{\mu 1}^{n-1}(t)\right| dt < 4\Delta d_0 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\,, \qquad (40')$$

где $\Delta d_0 = \sup\limits_{l} \Delta d_0{}^l = \lim\limits_{l\to\infty} = \Delta d_0{}^l = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\left[\mu_{(2\nu+1)n} - \mu_{(2\nu+1)n+1}\right]$ и

$$\Delta c_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\left[\lambda_{(2\nu+1)n} - \lambda_{(2\nu+1)n+1}\right].$$

В самом деле, в силу (39) и (39'),

$$\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{\infty}{}' \lambda_k \cos kt - T_{\lambda 0}^{n-1}(t)\right| dt < \int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi} 2\,|C(t)|\,dt,$$

$$\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{\infty} \mu_k \sin kt - T_{\mu 1}^{n-1}(t)\right| dt < \limsup_{l}\left\{\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi} 2\,|D_l(t)|\,dt\right\}.$$

Так как при выполнении условий, наложенных на $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$, последовательность $\{c_j\}$ (равно как и при любом l последовательность $\{d_j^l\}$) является выпуклой нуль-последовательностью, то мы, в силу (7') и (8'), получим:

$$\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi} 2\,|C(t)|\,dt < 2\Delta c_0 \int_{\delta}^{\pi}\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}} = 4\Delta c_0 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\,,$$

$$\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi} 2\,|D_l(t)|\,dt < 2\Delta d_0{}^l \int_{\delta}^{\pi}\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}} = 4\Delta d_0{}^l \cdot \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \quad (l = 1, 2, \ldots),$$

откуда и следуют соотношения (40) и (40').

В частности, если $\lambda_k = \frac{1}{k^s}$, то при четном s функция $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^s}$, а при нечетном — функция $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^s}$ обращается в $(-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]}\cdot \Psi_s(t)$ и поэтому:

1) при четном s

$$\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}|\Psi_s(t) - T_{n-1}^{s}(t)|\,dt <$$

$$< 4\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\left\{\frac{1}{[(2\nu+1)n]^s} - \frac{1}{[(2\nu+1)n+1]^s}\right\} = O\left(\frac{1}{\delta . n^{s+1}}\right); \qquad (41)$$

2) при нечетном s

$$\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} |\Psi_s(t) - T_{n-1}^s(t)|\, dt <$$

$$< 4\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{[(2\nu+1)n]^s} - \frac{1}{[(2\nu+1)n+1]^s}\right\} = O\left(\frac{1}{\delta . n^{s+1}}\right), \qquad (41')$$

где $T_{n-1}^s(t)$ означает полином наилучшего приближения в среднем на интервале $(0, 2\pi)$ функции $\Psi_s(t)$.

§ 4. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$

Будем говорить, что функция $f(t)$ периода 2π имеет производную s-го порядка $(s > 0)$ в смысле Вейля, равную $f^{(s)}(t) = \varphi(t)$, если $\varphi(t)$ есть функция периода 2π, суммируемая на периоде, удовлетворяющая условию $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = 0$ и связанная с $f(t)$ при помощи равенства

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t-\xi)\, \Psi_s(\xi)\, d\xi. \qquad (42)$$

Из леммы 1 следует, что при любом n тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка $T_{n-1}^*(t)$, интерполирующий функцию $\Psi_s(t)$ в нулях $\sin nt$, интерполирует ее только в этих нулях, причем с переменой знака. Функции с аналогичными свойствами были предметом исследований А. А. Маркова, Ж. Фавара, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна, Б. Надя и С. М. Никольского [см. ([11]), стр. 96; ([1]), ([2]), ([3]), ([7]) и ([4])]. В этом параграфе мы воспользуемся некоторыми результатами С. М. Никольского, который, обобщив и развив все проведенные ранее исследования, получил целый ряд общих теорем [см. ([4])].

Пусть (L) и (M) обозначают пространства функций периода 2π, соответственно суммируемых и ограниченных на $[0, 2\pi]$, $H_M^{(p)}$ — класс функций $h \in (M)$ с $\|h\|_M \leqslant 1$, ортогональных ко всем тригонометрическим функциям порядка $p-1$ $(p > 0)$:

$$\int_0^{2\pi} h(t) \begin{matrix}\cos kt\\ \sin kt\end{matrix}\, dt = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1), \qquad (43)$$

и $H_L^{(p)}$ $(p > 0)$ — класс функций $h \in (L)$ с $\|h\|_L \leqslant 1$, для которых выполняются те же равенства (43). При этом $H_M^{(0)}$ и $H_L^{(0)}$ обозначают множество функций $h \in (M)$ с $\|h\|_M \leqslant 1$ и соответственно множество функций $h \in (L)$ с $\|h\|_L \leqslant 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Если функции f выражаются через φ при помощи равенства* (42), *то*

$$\sup_{\varphi \in H_M^{(p)}} E_n(f)_C = \sup_{\varphi \in H_M^{(n)}} \|f\|_M = \frac{4}{\pi}\,\frac{K_s \cdot \sin\frac{s\pi}{2}}{n^s}, \qquad (44)$$

$$(p = 0, 1, 2, \ldots n)$$

$$\sup_{\varphi \in H_L^{(p)}} E_n(f)_L = \sup_{\varphi \in H_L^{(n)}} \|f\|_L = \frac{4}{\pi}\,\frac{K_s \cdot \sin\frac{s\pi}{2}}{n^s}. \qquad (44')$$

Укажем метод, дающий на классе функций, имеющих ограниченную s-ю производную, приближение, равное наилучшему. Зададим, следуя Надю [см. (7)], систему чисел

$$\mu_p, \mu_{p+1}, \ldots, \mu_{n-1}; \nu_p, \nu_{p+1}, \ldots, \nu_{n-1}, \quad 0 \leqslant p \leqslant n \tag{45}$$

(при $p = 0$ $\nu_0 = 0$). Приведем в соответствие каждой функции f вида (42), где $\varphi \in H_M^{(p)}$ или $\varphi \in H_L^{(p)}$, тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка:

$$T_{n-1}(f; t; \mu, \nu) = \sum_{k=p}^{n-1} \{\mu_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \nu_k (a_k \sin kt - b_k \cos kt)\}, \tag{46}$$

определяемый системой чисел (45), где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции φ, которой соответствует при помощи равенства (42) функция f.

Полином $T_{n-1}(f; t; \mu, \nu)$ можно рассматривать как приближение функции f. Он линейно зависит от φ и называется линейным методом (определяемым системой (45)) приближения функции f вида (42). В качестве меры приближения функций f классов $H_M^{(p)}$ и $H_L^{(p)}$ при помощи этих полиномов, определяемых фиксированной системой чисел (45), можно рассматривать верхние грани

$$\mathscr{E}_n(H_M^{(p)}; \mu, \nu)_C = \sup_{\varphi \in H_M^{(p)}} \| f - T_n(f; t; \mu, \nu) \|_C \tag{47}$$

и

$$\mathscr{E}_n(H_L^{(p)}; \mu, \nu)_L = \sup_{\varphi \in H_L^{(p)}} \| f - T_n(f; t; \mu, \nu) \|_L. \tag{47'}$$

Метод приближения вида (46) называется наилучшим для класса $H_M^{(p)}$ (соответственно $H_L^{(p)}$), если он определяется такой системой чисел (45), для которой верхняя грань (47) (соответственно (47′)) будет наименьшей среди возможных.

ТЕОРЕМА 4. *Линейный метод* (46) *является наилучшим для класса* $H_M^{(p)}$ *при* $\mu_k = \mu_k^*$, $\nu_k = \nu_k^*$ [*см.* (35)] $(k = p, p+1, \ldots, n-1)$, *причем*

$$\mathscr{E}_{n-1}(H_M^{(p)}; \mu^*, \nu^*) = \frac{4}{\pi} \frac{K_s \cdot \sin \frac{s\pi}{2}}{n^s}. \tag{48}$$

Этот наилучший линейный метод для класса $H_M^{(p)}$ *является единственным.*

ТЕОРЕМА 5. *Линейный метод* (46) *является наилучшим для класса* $H_L^{(p)}$ *при* $\mu = \mu_k^*$, $\nu_k = \nu_k^*$ $(k = p, p+1, \ldots, n-1)$, *причем*

$$\mathscr{E}_{n-1}(H_L^{(p)}; \mu^*, \nu^*) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{K_s \sin \frac{s\pi}{2}}{n^s}. \tag{49}$$

Доказательство. Справедливость теорем 3, 4 и 5 непосредственно вытекает из доказанных ранее свойств функции $\Psi_s(t)$, ибо, как показал

С. М. Никольский [см. ([4]), § 6, теоремы 3, 6 и 7], каждая из этих теорем имеет место для всякого класса функций $f(t)$, представимых в виде

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\xi)K(t-\xi)\,d\xi,$$

если только ядро $K(t)$ удовлетворяет при каждом $n\,(n=1, 2, \ldots)$ следующему условию (A_n^*):

1. Функция $K(t)$ суммируема, периода 2π и тождественно не равна нулю.

2. Существует тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка

$$\overline{T}^*_{n-1}(t)=\frac{\overline{\mu}_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(\overline{\mu}_k^*\cos kt+\overline{\nu}_k^*\sin kt)$$

и положительное число $\lambda\leqslant\frac{\pi}{n}$ такое, что если

$$K_n^*(t)=K(t)-\overline{T}^*_{n-1}(t),\quad \varphi_n^*(t)=\operatorname{sign}K_n^*(t),$$

то для почти всех t

$$\varphi_n^*(t+\lambda)=-\varphi_n^*(t).$$

При этом только в правых частях (44), (44′), (48) и (49) вместо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_s(t)-T^*_{n-1}(t)|\,dt=\frac{4}{\pi}\,\frac{K_s\sin\frac{s\pi}{2}}{n^s}$$

должна стоять соответственно величина интеграла $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K(t)-\overline{T}^*_{n-1}(t)|\,dt$, а в левых частях (48) и (49) вместо чисел μ_k^* и ν_k^* — соответственно числа $\overline{\mu}_k^*$ и $\overline{\nu}_k^*$.

Линейный метод для класса $H_M^{(p)}$ является единственным, если в полуинтервале $[0, 2\pi)$ существует $2n-1$ точек, в которых $K_n^*(t)$ непрерывна и меняет знак. Покажем, что все эти условия для ядра $\Psi_s(t)$ выполняются, если взять $\lambda=\frac{\pi}{n}$. В самом деле,

1) $\Psi_s(t)$ в силу монотонности [см. (16)] на $(0, 2\pi)$ обращается в 0 только в одной точке;

2) в силу (38), $\operatorname{sign}[\Psi_s(t)-T^*_{n-1}(t)]=-\operatorname{sign}\left[\Psi_s\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-T^*_{n-1}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right]$;

3) в $2n-1$ точках $t_k=\frac{k\pi}{n}$ $(k=1, 2, \ldots, 2n-1)$ функция $\Psi_s(t)$ непрерывна и разность $\Psi_s(t)-T^*_{n-1}(t)$ меняет знак.

Замечание. Отправляясь от ряда Фурье функции $f^{(s)}(t)=\varphi(t)$

$$f^{(s)}(t)=\varphi(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

мы получим линейный метод (46).

Если исходить из ряда Фурье функции $f(t)$

$$f(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt),$$

то, ввиду того что

$$\alpha_k = \frac{1}{k^s}\left(a_k \cos\frac{s\pi}{2} - b_k \sin\frac{s\pi}{2}\right), \qquad \beta_k = \frac{1}{k^s}\left(a_k \sin\frac{s\pi}{2} + b_k \cos\frac{s\pi}{2}\right),$$

мы представим μ_k^* и ν_k^* в виде:

$$\mu_k^* = \frac{\cos\frac{s\pi}{2}}{k^s}\left\{1 - k^s \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2in)^s} - \frac{1}{(2in-k)^s} - \frac{1}{(2in+k)^s}\right]\right\} = \frac{\cos\frac{s\pi}{2}}{k^s}(1-\xi_k^*),$$

$$\nu_k^* = \frac{\sin\frac{s\pi}{2}}{k^s}\left\{1 - k^s \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2in-k)^s} - \frac{1}{(2in+k)^s}\right]\right\} = \frac{\sin\frac{s\pi}{2}}{k^s}(1-\eta_k^*),$$

получим:

$$T_{n-1}(f; t; \mu^*, \nu^*) = T_{n-1}(f; t; \bar{\mu}, \bar{\nu}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} [\bar{\mu}_k(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) + \bar{\nu}_k(\alpha_k \sin kt - \beta_k \cos kt)], \tag{50}$$

где $\bar{\mu}_k = 1 - \cos^2\frac{s\pi}{2}\xi_k^* - \sin^2\frac{s\pi}{2}\cdot\eta_k^*$, $\bar{\nu}_k = \frac{1}{2}\sin s\pi(\xi_k^* - \eta_k^*)$.

§ 5. О наилучшем приближении в среднем функций с особенностями

Приведем, наконец, доказательство одной леммы, которая вместе со следствием § 3 даст возможность получить асимптотическую величину наилучшего приближения в среднем периодических функций с особенностями дробного порядка s $(0 < s < 1)$ [см. ([12]), ([13]) и ([14])].

Обозначим через $E_n[f(t); a, b; K]_L$, где $-\pi < a < b < \pi$, наилучшее приближение в среднем функции $f(t)$ в промежутке $[a, b]$ при помощи тригонометрических полиномов $T_n(t)$ порядка n, подчиненных условию:

$$\int_{-\pi}^{a} + \int_{b}^{\pi} |T_n(t)|\, dt \leqslant K.$$

Тогда справедлива следующая лемма, идея доказательства которой в основном заимствована нами из работы С. Н. Бернштейна [см. ([12])]:

ЛЕММА 2. *Пусть число α удовлетворяет условию:*

$$2\alpha < \rho < \frac{1-s}{2}.$$

Тогда, каково бы ни было положительное число ε, при достаточно больших n

$$E_n\left[\Psi_s(t); -\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}; n^h\right]_L > (1-\varepsilon) E_n[\Psi_s(t)]_L \quad (0 < s < 1), \tag{51}$$

где h — произвольное положительное число.

Доказательство. Пусть $m = n + l$, где $l = [n^\rho]$ — целое число, и пусть

$$q(t) = \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^l = \left(1 - \sin^2\frac{t}{2}\right)^l = \cos^{2l}\frac{t}{2}.$$

Тогда для взвешенного наилучшего приближения имеем:

$$E_{n,\, q(t)}[\Psi_s(t)]_L = \inf_{T_n}\int_{-\pi}^{\pi} |q(t)[\Psi_s(t) - T_n(t)]|\, dt \geqslant E_m[\Psi_s(t)\cdot q(t)]_L \geqslant$$

$$\geqslant E_m[\Psi_s(t)]_L - E_m[\Psi_s(t)(1-q(t))]_L. \tag{52}$$

Учитывая, что, в силу (16),

$$\Psi_s(t) = O\left(\frac{1}{t^{1-s}}\right), \quad \Psi_s'(t) = O\left(\frac{1}{t^{2-s}}\right),$$

находим:

$$|[\Psi_s(t)(1-q(t))]'| = \left|\left[\Psi_s(t)\left(1-\cos^{2l}\frac{t}{2}\right)\right]'\right| = \left|\Psi_s'(t)\left(1-\cos^{2l}\frac{t}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + l\Psi_s(t)\cos^{2l-1}\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\right| \leqslant \left|\frac{K_1}{t^{2-s}}lt^2 + l\frac{K_2}{t^{1-s}}\cdot\frac{t}{2}\right| < Kl \leqslant Kn^\rho,$$

где K, K_1 и K_2 — постоянные; отсюда

$$E_m[\Psi_s(t)(1-q(t))]_L = O\left(\frac{n^\rho}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^s n^{\frac{1-s}{2}}}\right) = o\left(\frac{1}{n^s}\right)$$

или, вследствие (52), $E_{n,\,q(t)}[\Psi_s(t)]_L \geqslant E_m[\Psi_s(t)]_L - o\left(\frac{1}{n}\right)$. Так как $\left(\frac{n}{m}\right)^s \geqslant \left(\frac{n}{n+n^\rho}\right)^s > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$, то, в силу теоремы 2,

$$E_{n,\,q(t)}[\Psi_s(t)]_L \geqslant \frac{4K_s \cdot \sin\frac{s\pi}{2}}{n^s}\left(\frac{n}{m}\right)^s - o\left(\frac{1}{n^s}\right) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)E_n[\Psi_s(t)]_L$$

или

$$\min_{T_n}\left\{\int\limits_{-\pi}^{-\frac{1}{n^\alpha}} + \int\limits_{\frac{1}{n^\alpha}}^{\pi} + \int\limits_{-\frac{1}{n^\alpha}}^{\frac{1}{n^\alpha}} q(t)\,|\Psi_s(t) - T_n(t)|\,dt\right\} > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)E_n[\Psi_s(t)]_L. \tag{53}$$

Если теперь совершенно произвольный тригонометрический полином n-го порядка $\overline{T}_n(t)$ удовлетворяет условиям леммы, т. е. если

$$\int\limits_{-\pi}^{-\frac{1}{n^\alpha}} + \int\limits_{\frac{1}{n^\alpha}}^{\pi} |\overline{T}_n(t)|\,dt \leqslant n^h$$

(такие полиномы мы будем обозначать с чертой наверху), то тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{-\frac{1}{n^\alpha}} + \int\limits_{\frac{1}{n^\alpha}}^{\pi} q(t)\,|\Psi_s(t) - \overline{T}_n(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\frac{1}{n^\alpha} \leqslant |t| \leqslant \pi}\left(1 - \sin^2\frac{t}{2}\right)^l \left\{\int\limits_{-\pi}^{\frac{1}{n^\alpha}} + \int\limits_{\frac{1}{n^\alpha}}^{\pi} |\Psi_s(\xi) - \overline{T}_n(\xi)|\,d\xi\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \left[1 - \left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n^\alpha}\right)^2\right]^{n^\rho - 1}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\Psi_s(\xi)|\,d\xi + n^h\right] = o\,\{E_n[\Psi_s(t)]_L\}. \tag{54}$$

Сравнивая (53) и (54), мы видим, что при любом $\overline{T}_n(t)$

$$\int_{-\frac{1}{n^\alpha}}^{\frac{1}{n^\alpha}} q(t)\,|\Psi_s(t)-\overline{T}_n(t)|\,dt > \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) E_n[\Psi_s(t)]_L -$$

$$-\max_{\overline{T}_n}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{1}{n^\alpha}} + \int_{\frac{1}{n^\alpha}}^{\pi} q(t)\,|\Psi_s(t)-\overline{T}_n(t)|\,dt > (1-\varepsilon)\, E_n[\Psi_s(t)]_L,\right.$$

и так как $0 \leqslant q(t) \leqslant 1$, то тем более

$$E_n\left[\Psi_s(t);\ -\frac{1}{n^\alpha},\ \frac{1}{n^\alpha};\ n^h\right]_L = \min_{\overline{T}_n}\int_{-\frac{1}{n^\alpha}}^{\frac{1}{n^\alpha}} |\Psi_s(t)-\overline{T}_n(t)|\,dt > (1-\varepsilon)\, E_n[\Psi_s(t)]_L,$$

и лемма 2 полностью доказана.

Поступило
26. VI. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Favard J., Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques ou presque-périodiques, Matematisk Tidskrift, København, B, H. 4 (1936), 81—94.
[2] Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynômes trigonométriques, Bull. de Sci. Math., LXI (1937) 209—224, 243—256.
[3] Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций, Доклады Ак. Наук СССР, XV (1937), 107—111.
[4] Никольский С. М., Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 10 (1946), 207—256.
[5] Дзядык В. К., О наилучшем приближении в среднем периодических функций с особенностями, Доклады Ак. Наук СССР, LXXVII (1951), 949—952.
[6] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.— Л., 1939.
[7] Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall, Berichte der math.-phys. Kl. Akademie d. Wiss. zu Leipzig, XC (1938), 103—134.
[8] Zygmund A., Smooth functions, Duke mathem. j., v. 12, N 1 (1945), 47—76.
[9] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М.— Л., 1934.
[10] Фихтенгольц Г. М., Курс интегрального и дифференциального исчисления, М.— Л., 1948.
[11] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.— Л., 1944.
[12] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении $|x-c|^p$, Доклады Ак. Наук СССР, XVIII (1938), 379—384.
[13] Никольский С. М., О наилучшем приближении многочленами в среднем функции $|a-x|^s$, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 11 (1947), 139—180.
[14] Никольский С. М., О наилучшем приближении многочленами в среднем функций с особенностями вида $|a-x|^s$, Доклады Ак. Наук СССР, LX (1947), 195—198.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17(1953), 163—180

Л. И. КАМЫНИН

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. I

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе устанавливается различие теорем единственности для уравнения теплопроводности и соответствующей ему системы конечно-разностных дифференциальных уравнений.

Введение

Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей приводит к необходимости изучения, наряду с дифференциальными операторами, также и конечно-разностных операторов. Однако эти операторы далеко не эквивалентны, их свойства во многом оказываются различными, что иногда приводит к принципиальным трудностям при применении метода конечных разностей.

В статье различие дифференциального и соответствующего конечно-разностного операторов показывается на примере изучения одной классической задачи математической физики решения уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

для бесконечной области изменения $x\,(-\infty < x < +\infty)$ с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Методом конечных разностей эту задачу можно свести к решению бесконечной системы конечно-разностных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u^{(h)}(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{h^2}\left(u^{(h)}(x+h, t) - 2u^{(h)}(x, t) + u^{(h)}(x-h, t)\right) \tag{2}$$
$$(x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots)$$

с начальным условием

$$u^{(h)}(x, 0) = \varphi(x). \tag{2*}$$

В статье показывается, что для единственности решения системы (2) требуется более сильное ограничение на рост в зависимости от x по сравнению с теоремой единственности А. Н. Тихонова ([1]) для уравнения теплопроводности (1). Согласно теореме А. Н. Тихонова, решение (1) единственно в классе функций, удовлетворяющих оценке

$$\max_{0<t<T} u(x, t)\, e^{-Cx^2} \to 0 \text{ при } |x| \to \infty.$$

Единственность решения системы (2) обеспечена в классе функций, подчиненных условию

$$|u^{(h)}(x,t)| \leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|x|}{h}\right]!, \qquad (3)$$

где $x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots$; $0 \leqslant t \leqslant T$, A и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ — постоянные, однако в классе функций с оценкой роста

$$|u^{(h)}(x,t)| \leqslant A\left[(1+\varepsilon)\frac{|x|}{h}\right]!$$

единственность нарушается.

Таким образом, условие единственности решения системы (2) существенно суживается по сравнению с условием единственности уравнения теплопроводности (1). В связи с этим естественно возникает вопрос о сходимости конечно-разностного процесса для уравнения (1). Вопрос о сходимости будет рассмотрен в следующей статье автора.

В работе доказывается также единственность решения системы

$$\frac{\partial u^{(h)}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{h^{2r}}\sum_{k=0}^{2r}(-1)^k C_{2r}{}^k u^{(h)}(x+(k-r)h, t), \qquad (4)$$

где $x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots$; $u^{(h)}(x,0) = \varphi(x)$; $r > 0$ — целое число,

$$0 \leqslant t \leqslant T \quad \text{при } r \text{ нечетном},$$

$$0 \geqslant t \geqslant -T \quad \text{при } r \text{ четном},$$

в классе функций с оценкой

$$|u^{(h)}(x,t)| \leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|x|}{rh}\right]! \quad (|t| \leqslant T)$$

и показывается, что в классе функций с оценкой

$$|u^{(h)}(x,t)| \leqslant A\left[(1+\varepsilon)\frac{|x|}{rh}\right]! \quad (|t| \leqslant T)$$

единственность уже не наблюдается. Система (4) есть конечно-разностный аналог параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^{2r} u}{\partial x^{2r}} \quad (-\infty < x < +\infty) \qquad (5)$$

с начальными данными: $u(x,0) = \varphi(x)$.

Для системы (4) строится эффективное решение

$$u^{(h)}(nh,t) = \frac{\varphi(nh)}{\pi}\int_0^{\pi}\exp\left\{\left(-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{x}{2}\right)^r t\right\}dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(\varphi(nh+kh)+\varphi(nh-kh))\int_0^{\pi}\cos kx \exp\left\{\left(-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{x}{2}\right)^r t\right\}dx \qquad (6)$$

$$(n = \ldots, 2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

если $r = 1$, то $\frac{1}{\pi}\int_{\text{п}}^{\pi}\cos nx \exp\left(-\frac{4t}{h^2}\sin^2\frac{x}{2}\right)dx = e^{-\frac{2t}{h^2}} I_n\left(\frac{2t}{h^2}\right)$, где $I_n(z)$ есть функция Бесселя от мнимого аргумента; это решение системы (2) указано автору С. Л. Соболевым), причем ряд справа сходится, если

$$|\varphi(x)| \leqslant A\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\frac{|x|}{rh}\right]!$$

Результаты настоящей статьи содержатся в работе ([3]).

§ 1. Теорема существования и единственности для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{du_n}{dt} = f_n(t; u_{n-r}, \ldots, u_{n+r}) \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

где $r \geqslant 1$ — целое постоянное число.

ТЕОРЕМА. *Пусть дана система дифференциальных уравнений* (7), *правые части которых удовлетворяют условиям:*

1°. $f_n(t; u_{n-r}, \ldots, u_{n+r})$ *определены при любых* u_m *и* $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$.

2°. $f_n(t, u_{n-r}, \ldots, u_{n+r})$ *измеримы по* t *для фиксированных* u_m, *причем*

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f_n(t; 0, \ldots, 0)|\, dt \leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|n|}{r}\right]!,$$

где A *и* ε $(0 < \varepsilon \leqslant 1)$ — *постоянные.*

3°. $f_n(t; u_{n-r}, \ldots, u_{n+r})$ *удовлетворяют условию Липшица:*

$$|f_n(t; u''_{n-r}, \ldots, u''_{n+r}) - f_n(t; u_{n-r}, \ldots, u'_{n+r})| \leqslant K \sum_{\alpha=n-r}^{n+r} |u''_\alpha - u'_\alpha|$$

для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$, *причем* K — *постоянная. Тогда система* (7) *имеет по меньшей мере одно решение* $u_m(t)$ $(m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots,)$, *удовлетворяющее начальным данным*

$$u_m(t_0) = u_m{}^0 \quad (m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

если только

$$|u_m{}^0| \leqslant B\left[(1-\varepsilon)\frac{|m|}{r}\right]!,$$

где B — *постоянная.*

Всякое решение системы (7), *удовлетворяющее условиям*

$$u_m(t_0) = u_m{}^0 \quad (m = \ldots, -2, 1, 0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$|u_m(t)| \leqslant C\left[(1-\varepsilon)\frac{|m|}{r}\right]!$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ (C — *постоянная*) *единственно.*

Доказательство. Заметим, что если в $f_n(t; u_{n-r}, \ldots, u_{n+r})$ вместо u_m подставить любые суммируемые функции $\varphi_m(t)$, то $f_n(t; \varphi_{n-r}(t), \ldots, \varphi_{n+r}(t))$ будет суммируемой при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$. Действительно, ввиду условия 3° теоремы, $f_n(t; \varphi_{n-r}(t), \ldots, \varphi_{n+r}(t))$ будет измеримой по t [см. (²), стр. 556] и, кроме того, для нее выполнено неравенство:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f_n(t; \varphi_{n-r}(t), \ldots, \varphi_{n+r}(t))|\, dt \leqslant \int_{t_0}^{t_0+T} |f_n(t; 0, \ldots, 0)\, dt +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_0+T} f_n(t; \varphi_{n-r}(t), \ldots, \varphi_{n+r}(t)) - f_n(t)\, 0, \ldots, 0)|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|n|}{r}\right]! + K \sum_{\alpha=n-r}^{n+r} \int_{t_0}^{t_0+T} |\varphi_\alpha(t)|\, dt.$$

Ввиду этого систему (7) можно заменить системой интегральных уравнений

$$u_n(t) = u_n^0 + \int_{t_0}^{t} f_n(\tau; u_{n-r}(\tau), \ldots, u_{n+r}(\tau)\, d\tau$$
$$(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots). \qquad (8)$$

Будем искать решение (8) методом последовательных приближений, беря за нулевое приближение функции $u_n^0(t) \equiv u_n^0$. Тогда

$$|u_n^{(1)}(t) - u_n^0| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f_n(\tau; u_{n-r}^0, \ldots, u_{n+r}^0)|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |f_n(\tau; 0, \ldots, 0)|\, d\tau + \int_{t_0}^{t} |f_n(\tau; u_{n-r}^0, \ldots, u_{n+r}^0) - f_n(\tau; 0, \ldots, 0)|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|n|}{r}\right]! + K \sum_{\alpha=n-r}^{n+r} \int_{t_0}^{t} |u_\alpha^0|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|n|}{r}\right]! + (2r+1)KBT\left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r}+1\right)\right]! \leqslant$$
$$\leqslant M\left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r}+1\right)\right]!,$$

причем

$$u_n^{(1)}(t)| \leqslant |u_n^0| + |u_n^{(1)}(t) - u_n^0| \leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|n|}{r}\right]! +$$
$$+ M\left[(1-\varepsilon\left(\frac{|n|}{r}+1\right)\right]!$$

В силу 2° и 3°, $f_n(t; u_{n-r}^{(1)}(t), \ldots, u_{n+r}^{(1)}(t))$ суммируема при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$:

$$|u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |f_n(\tau; u_{n-r}^{(1)}(\tau), \ldots, u_{n+r}^{(1)}(\tau)) - f(\tau; u_{n-r}^0, \ldots, u_{n+r}^0)|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant K \sum_{\alpha=n-r}^{n+r} \int_{t_0}^{t} |u_\alpha^{(1)}(\tau) - u_\alpha^0|\, d\tau \leqslant LM\left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r}+2\right)\right]!\,(t-t_0),$$

где $L = (2r+1)KB$, причем

$$|u_n^{(2)}(t)| \leqslant |u_n^0| + |u_n^{(1)}(t) - u_n^0| + |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|n|}{r}\right]! + M\left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r}+1\right)\right]! + \frac{MLT\left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r}+2\right)\right]!}{1!},$$

т. е. $f_n(t; u_{n-r}^{(2)}(t), \ldots, u_{n+r}^{(2)}(t))$ суммируема при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$.

Методом полной математической индукции легко показать, что имеют место оценки

$$|u_n^{(l)}(t) - u_n^{(l-1)}(t)| \leqslant ML^{l-1}\left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r}+l\right)\right]!\,\frac{(t-t_0)^{l-1}}{(l-1)!}$$

и

$$|u_n^{(l)}(t)| \leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|n|}{r}\right]! + M\sum_{k=0}^{l-1} \frac{(LT)^k\left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r}+k+1\right)\right]!}{k!},$$

откуда следует суммируемость $f_n(t; u_{n-r}^{(l)}(t), \ldots, u_{n+r}^{(l)}(t))$ при любом l и $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$, причем ряды

$$u_n^0 + \sum_{l=0}^{+\infty} | u_n^{(l+1)}(t) - u_n^{(l)}(t) | \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) \tag{9_n}$$

мажорируются абсолютно сходящимися рядами

$$M \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{L^l (t-t_0)^l \left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r} + l + 1\right)\right]!}{l!}; \tag{10_n}$$

но

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{L^l (t-t_0)^l \left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r} + l + 1\right)\right]!}{l!} \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{l=0}^{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{|n|}{r}+1\right)\right]} \frac{L^l (t-t_0)^l \left[(1-\varepsilon)\left(\frac{n}{r} + l + 1\right)\right]!}{l!} +$$

$$+ M \sum_{l=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{|n|}{r}+1\right)\right]+1}^{+\infty} \frac{L^l (t-t_0)^l}{\left[\varepsilon l - (1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r}+1\right)\right]^*!} \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{l=0}^{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{|n|}{r}+1\right)\right]} \frac{L^l (t-t_0)^l L \left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r} + l + 1\right)\right]!}{l!} +$$

$$+ M \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^* \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(L(t-t_0))^{\frac{m}{\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{|n|}{r}+1\right)}}{m!},$$

где $[a]^*$ означает наименьшее из целых чисел, не меньших a, и

$$m = \left[\varepsilon l - (1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r} + 1\right)\right]^*,$$

причем, если

$$m = \left[\varepsilon l - (1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r} + 1\right)\right]^* =$$

$$= \left[\varepsilon (l+1) - (1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r} + 1\right)\right]^* = \ldots = \left[\varepsilon (l+s) - (1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r} + 1\right)\right]^*,$$

но

$$\left[\varepsilon (l-1) - (1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r} + 1\right)\right]^* < m < \left[\varepsilon (l+s+1) - (1-\varepsilon)\left(\frac{n}{r} + 1\right)\right]^*,$$

то

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \leqslant s \leqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^*.$$

Ясно, что ряды (9_n) сходятся равномерно на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ к непрерывным функциям $U_n(t)$ $(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,)$, и можно для любого $\eta > 0$ выбрать столь большое $N(\eta, n)$, что для данного n будет выполняться неравенство

$$|U_n(t) - u_n^{(l)}(t)| < \eta \quad \text{при } l > N(\eta, n). \tag{11}$$

Для функции $U_n(t)$ имеет место оценка:

$$|U_n(t)| \leqslant M \sum_{l=0}^{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{|n|}{r}+1\right)\right]} \frac{(LT)^l \left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r}+l+1\right)\right]!}{l!} +$$

$$+ M\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^* \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(LT)^{\frac{m}{\varepsilon}+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{|n|}{r}+1\right)}}{m!} \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{l=0}^{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{|n|}{r}+1\right)\right]} \frac{(LT)^l \left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r}+l+1\right)\right]}{l!} +$$

$$+ M\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^* (LT)^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{|n|}{r}+1\right)} \exp (LT)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \qquad (12_n)$$

откуда следует суммируемость $f_n(t; U_{n-r}(t), \ldots, U_{n+r}(t))$.

Полученная система функций $U_n(t)$ $(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ является решением системы (8), удовлетворяющим начальным условиям:

$$U_n(t_0) = u_n^0 \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots).$$

Действительно,

$$U_n(t_0) = \lim_{l \to +\infty} u_n^{(l)}(t_0) = u_n^0 \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

$$u_n^{(l)}(t) = u_n^0 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \{f_n(\tau; u_{n-1}^{(l-1)}(\tau), \ldots, u_{n+r}^{(l-1)}(\tau)) - f_n(\tau; U_{n-r}(\tau), \ldots, U_{n+r}(\tau))\}\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} f_n(\tau; U_{n-r}(\tau), \ldots, U_{n+r}(\tau))\, d\tau. \qquad (13_n)$$

В силу условия 3° и (11), для любого $\eta > 0$ и данного n можно найти числа N и δ такие, что как только $l > N$, то

$$|u_m^{(l-1)}(t) - U_m(t)| < \delta \quad (m = n-r, \ldots, n+r)$$

и

$$|f_n(\tau; U_{n-r}(\tau), \ldots, U_{n+r}(\tau)) - f_n(\tau; u_{n-r}^{(l-1)}(\tau), \ldots, u_{n+r}^{(l-1)}(\tau))| < \frac{\eta}{T},$$

откуда

$$\lim_{l \to +\infty} \int_{t_0}^{t} \{f_n(\tau; u_{n-r}^{(l-1)}(\tau), \ldots, u_{n+r}^{(l-1)}(\tau)) - f_n(\tau; U_{n-r}(\tau), \ldots, U_{n+r}(\tau))\}\, d\tau = 0.$$

Переходя в (13_n) к пределу при $l \to +\infty$, получаем:

$$U_n(t) = u_n^0 + \int_{t_0}^{t} f_n(\tau; U_{n-r}(\tau), \ldots, U_{n+r}(\tau))\, d\tau,$$

чем доказано существование решения (8). Докажем его единственность. Пусть $v_n(t)$ — любое решение (7), удовлетворяющее условиям:

$$v_n(t_0) = u_n^0 \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

$$|v_n(t)| \leqslant C\left[(1-\varepsilon)\frac{|n|}{r}\right]! \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T.$$

Тогда легко установить оценку:

$$|u_n^{(l)}(t) - v_n(t)| \leqslant M \frac{((2r+1)KC)^l \left[(1-\varepsilon)\left(\frac{|n|}{r}+l+1\right)\right]!}{l!}(t-t_0)^l,$$

где $u_n^{(l)}(t)$ — l-е последовательное приближение, построенное в первой части теоремы. Но $|t-t_0| \leqslant T$ и при достаточно большом l

$$l > (1-\varepsilon)\left(\frac{|m|}{r}+l\right),$$

поэтому

$$\lim_{l \to +\infty} u_n^{(l)}(t) = v_n(t),$$

откуда

$$v_n(t) \equiv U_n(t) \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots).$$

§ 2. Теорема существования и единственности решения бесконечной системы конечно-разностных дифференциальных уравнений, соответствующих уравнению параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^{2r} u}{\partial x^{2r}}. \tag{5}$$

Рассмотрим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_{nh}(t)}{dt} = \frac{1}{h^{2r}} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k u_{nh+(k-r)h}(t). \tag{4'}$$

Положим $u_{nh}(t) \equiv u^{(h)}(x, t)$, где $x = nh = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots$. Тогда систему (4′) можно записать в виде

$$\frac{\partial u^{(h)}(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{h^{2r}} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k u^{(h)}(x+(k-r)h, t) \tag{4}$$
$$(x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots).$$

Очевидно, при $h \to 0$ уравнение (4) переходит в уравнение (5).

ТЕОРЕМА. 1°. *Уравнение* (4) *имеет по меньшей мере одно решение* $u^{(h)}(x, t)$ (*r — целое число*; $x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots$; $0 \leqslant t \leqslant T$ *при r четном*, $0 \geqslant t \geqslant -T$ *при r нечетном*), *удовлетворяющее начальному условию*

$$u^{(h)}(x, 0) = \varphi(x) \quad (x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots),$$

если только

$$|\varphi(x)| \leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|x|}{rh}\right]!,$$

где $A > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ — постоянные.

2°. *Если решение уравнения* (4) $v^{(h)}(x, t)$ ($x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots$) *удовлетворяет условиям*

$$v^{(h)}(x, 0) = \varphi(x)$$

и

$$|v^{(h)}(x, t)| \leqslant B\left[(1-\varepsilon)\frac{|x|}{rh}\right]! \quad \text{при } |t| \leqslant T, \tag{14}$$

то оно единственно.

3°. *Однако для любого* $\varepsilon > 0$ *существует решение уравнения* (4) $w^{(h)}(x, t) \not\equiv 0$, *удовлетворяющее условиям:*

$$w^{(h)}(x, 0) = 0, \quad (x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots)$$

и

$$|w^{(h)}(x, t)| \leqslant C\left[(1+\varepsilon)\frac{|x|}{rh}\right]! \quad \textit{при } |t| \leqslant T.$$

Доказательство. Рассмотрим вместо уравнения (4) систему (4′) и перейдем к системе интегральных уравнений

$$u_{nh}(t) = \varphi(nh) +$$

$$+ \int_0^t f(u_{(n-r)h}(\tau), \ldots, u_{(n+r)h}(\tau))\, d\tau \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$f(u_{(n-r)h}, \ldots, u_{(n+r)h}) = \frac{1}{h^{2r}} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k u_{nh+(k-r)h}.$$

Очевидно, f удовлетворяет условию Липшица с константой $K = \frac{C_{2r}^r}{h^{2r}}$ и первые два утверждения теоремы § 2 есть следствия теоремы § 1.

Покажем справедливость третьего утверждения.

Функции $w_{nh}(t)$, заданные равенствами

$$\left.\begin{aligned} w_{nh}(t) &= \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-1}{r}\right]} h^{2r\nu+1} \prod_{l=-r\nu}^{r\nu} \frac{n+l}{r\nu+l+1} F^{(\nu)}(t) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \\ w_0(t) &\equiv 0, \\ w_{-nh}(t) &= -w_{nh}(t), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $F(t)$ — произвольная функция, имеющая производные любого порядка, являются решением системы (4). Действительно, вводя обозначения

$$P_{2r\nu+1}(n) = \prod_{l=-r\nu}^{r\nu} \frac{n+l}{r\nu+l+1}$$

и

$$\Delta^{2r} P_{2r\nu+1}(n) = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k P_{2r\nu+1}(n+k-r),$$

заключаем, что

$$\Delta^{2r} P_{2r\nu+1}(n) = P_{2r(\nu-1)+1}(n).$$

Поэтому

$$\frac{dw_{nh}(t)}{dt} = \operatorname{sign} n \cdot \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{|n|-1}{r}\right]} h^{2r\nu+1} P_{2r\nu+1}(|n|) F^{(\nu+1)}(t),$$

$$\frac{1}{h^{2r}} \Delta^{2r} w_{nh}(t) = \operatorname{sign} n \Bigg(\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{|n|-1}{r}\right]} h^{2r(\nu-1)+1} \Delta^{2r} P_{2r\nu+1}(|n|) F^{(\nu)}(t) +$$

$$+ h^{2r\left[\frac{|n|-1}{r}\right]+1} \Delta^{2r} P_{2r\left(\left[\frac{|n|-1}{r}\right]+1\right)+1}(|n|) \cdot F^{\left(\left[\frac{|n|-1}{r}\right]+1\right)}(t)\Bigg) =$$

$$= \operatorname{sign} n \left(\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{|n|-1}{r}\right]} h^{2r\nu+1} P_{2r\nu+1}(|n|)\, F^{(\nu+1)}(t) \right).$$

Итак,

$$\frac{dw_{nh}(t)}{dt} = \frac{1}{h^{2r}} \Delta^{2r} w_{nh}(t) \text{ для } |n| = r,\ r+1, \ldots .$$

Докажем, что и для $|n| < r$

$$\frac{dw_{nh}(t)}{dt} = \frac{1}{h^{2r}} \Delta^{2r} w_{nh}(t).$$

Для этого отметим равенства:

$$w_{nh}(t) = nhF(t),$$

если $|n| = 0, 1, 2, \ldots, r$;

$$w_{nh}(t) = nhF(t) + \operatorname{sign} n \cdot \frac{h^{2r+1}}{(2r+1)!} \prod_{l=-r}^{r} (|n| + l)\, F'(t),$$

если $r + 1 \leqslant |n| \leqslant 2r$. Отсюда

$$w_{(r-l)h}(t) = h(r-l)\,F(t) \text{ для } 0 < l \leqslant r,$$

$$\frac{dw_{(r-l)h}(t)}{dt} = h(r-l)\,F'(t),$$

$$\Delta^{2r} w_{(r-l)h}(t) = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k w_{(k-l)h}(t) =$$

$$= \left(-\sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k C_{2r}^k (l-k) + \sum_{k=l}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k-l) \right) \cdot h \cdot F(t) +$$

$$+ \sum_{k=r+l+1}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k \frac{(k-l-r)(k-l-r+1)\ldots(k-l+r)}{(2r+1)!} h^{2r+1} F'(t).$$

Покажем, что

$$-\sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k C_{2r}^k (l-k) + \sum_{k=l+1}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k-l) = 0. \qquad (16)$$

Действительно, дифференцируя по t обе части тождества

$$t^{-l}(t-1)^{2r} = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k t^{k-l}$$

и полагая $t = 1$, получим равенство (16).

Покажем, что

$$\sum_{=r+l+1}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k (k-\ l-r)(k-l-\ \ +1\ \ldots(\ -l+r) = (r-l)(2r+1)!. \qquad (17)$$

Для этого продифференцируем $(2r+1)$ раз по t обе части тождества

$$t^{r-l}(t-1)^{2r}=\sum_{k=0}^{2r}(-1)^k C_{2r}^k t^{k+r-l}.$$

Тогда получим:

$$\sum_{s=0}^{r-l} C_{2r+1}^s \frac{d^s(t^{r-l})}{dt^s}\cdot\frac{d^{2r+1-s}}{dt^{2r+1-s}}((t-1)^{2r})=$$
$$=\sum_{k=r+l+1}^{2r}(-1)^k C_{2r}^k (k+r-l)\dots(k-r-l)\cdot t^{k-r-l-1}.$$

Полагая $t=1$, найдем (17). Таким образом,

$$\frac{\Delta^{2r} w_{(r-l)h}(t)}{h^{2r}}=h(r-l)F'(t)=\frac{dw_{(r-l)h}(t)}{dt}\quad \text{для } 0<l\leqslant r.$$

Аналогично показывается, что

$$\frac{\Delta^{2r} w_{(l-r)h}(t)}{h^{2r}}=-h(r-l)F'(t)\quad \text{для } 0<l\leqslant r.$$

Если выбрать функцию $F(t)$ такой, что

1) $F^{(\nu)}(t)|_{t=0}=0, \quad \nu=0,1,2,\dots;$

2) $F(t)\not\equiv 0;$

3) $|F^{(\nu)}(t)|\leqslant[(1+\varepsilon_1)\nu]!$ $(0<\varepsilon_1<2r-1)$ при $|t|\leqslant T$,

то $w_{nh}(t)$ будут удовлетворять условиям:

$$w_{nh}(0)=0\quad (n=\dots,-2,-1,0,1,2,\dots),\quad w_{nh}(t)\not\equiv 0,$$

причем

$$|w_{nh}(t)|\leqslant\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{|n|-1}{r}\right]}\prod_{l=-\nu r}^{\nu r}\frac{|n|h+lh}{r\nu+l+1}[(1+\varepsilon_1)\nu]!=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{|n|-1}{r}\right]}\frac{(|n|h)((|n|h)^2-h^2)\dots((|n|h)^2-(\nu rh)^2)}{(2r\nu+1)!}[(1+\varepsilon_1)\nu]!\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{|n|-1}{r}\right]}\frac{(|n|h)^{2r\nu+1}[(1+\varepsilon_1)\nu]!}{(2r\nu+1)!},$$

т. е.

$$|w_{nh}(t)|\leqslant\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{r}\left(\frac{|x|}{h}-1\right)\right]}\frac{|x|^{2r\nu+1}}{(2r\nu+1)!}[(1+\varepsilon_1)\nu]!$$
$$(x=\dots,-2h,-h,0,h,2h,\dots).$$

Указанный выше выбор $F(t)$ возможен [см. ([1])]. Оценка

$$\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{r}\left(\frac{|x|}{h}-1\right)\right]}\frac{|x|^{2r\nu+1}}{(2r\nu+1)!}[(1+\varepsilon_1)\nu]!\leqslant\left[(1+\varepsilon_1)\frac{1}{r}\left(\frac{|x|}{h}-1\right)\right]!\,e^{|x|}\leqslant\left[(1+\varepsilon)\frac{|x|}{rh}\right]!,$$

где $\varepsilon>\varepsilon_1>0$, завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^{2r} u}{\partial x_i^{2r}}$$

в бесконечной области изменения x_i методом конечных разностей приводит к бесконечной системе уравнений

$$\frac{du_{m_1 \ldots m_q}}{dt} = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k u_{m_1 \ldots m_{i-1} m_i - k + r m_{i+1} \ldots m_q}$$
$$(m_i = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots; \quad i = 1, 2, \ldots, q). \tag{18}$$

Тогда следствием теоремы § 2 является утверждение:

Если $u_{m_1 \ldots m_q}(t)$ есть решение системы (18), *удовлетворяющее нулевым начальным данным и условию*

$$|u_{m_1 \ldots m_q}(t)| = O\left(\left[(1-\varepsilon) \cdot \sum_{i=1}^{q} \frac{|m_i|}{r}\right]!\right) \text{ при } |t| \leqslant T,$$

то $u_{m_1 \ldots m_q}(t) \equiv 0$.

Действительно, правая часть (18) есть функция, удовлетворяющая условию Липшица с постоянной $K = C_{2r}^r$.

Переходя от (18) к системе интегральных уравнений

$$u_{m_1 \ldots m_q}(t) = u^0_{m_1 \ldots m_q} + \int_0^t \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=0}^{2r} C_{2r}^k u_{m_1 \ldots m_{i-1} m_i - k + r m_{i+1} \ldots m_q}(\tau)\, d\tau$$

и беря за нулевое приближение числа

$$u^0_{m_1 \ldots m_q} = O\left(\left[(1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{q} \frac{|m_i|}{r}\right]\right)!,$$

получим для l-го приближения оценку

$$\left| u^{(l)}_{m_1 \ldots m_q}(t) - u^{(l-1)}_{m_1 \ldots m_q} \right| \leqslant \frac{((2r+1)\, qK)^l \left[(1-\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{q} \frac{|m_i|}{r} + l\right)\right]!\, t^l}{l!}.$$

Дальнейшее доказательство единственности проводится аналогично приведенному в теореме § 1.

Рассматривая, наряду с (18), системы

$$\frac{du^j_m}{dt} = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k u^j_{m+k-r}$$
$$(m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots; \; j = 1, 2, \ldots, q), \tag{18$_j$}$$

мы видим, что если $u^j_m(t)$ есть решение (18_j), то

$$u_{m_1 \ldots m_q}(t) = \prod_{j=1}^{p} u^j_{m_j}(t)$$

есть решение системы (18).

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно построить ненулевое решение системы (18) с нулевыми начальными данными такое, что

$$|u_{m_1 \ldots m_q}(t)| = O\left(\left[(1 + \varepsilon)\frac{|m_i|}{r}\right]!\right) \text{ при } |t| \leqslant T.$$

Замечание 2. Если $u^{(h)}(x, t)$ — построенное в теореме решение уравнения (4), удовлетворяющее неравенству

$$|u^{(h)}(x, t)| \leqslant A \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{r}\left(\frac{|x|}{h} - 1\right)\right]} \frac{|x|^{2r\nu+1}}{(2r\nu+1)!}[(1-\varepsilon)\nu]!,$$

и если $\lim\limits_{h \to 0} u^{(h)}(x, t) = u(x, t)$ есть решение уравнения (5), то для этого решения в пределе сохраняется оценка

$$|u(x, t)| \leqslant A \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2r\nu+1}}{(2r\nu+1)!}[(1-\varepsilon)\nu]! \leqslant A_1 \exp\left\{|x|^{\frac{2r}{2r-1+\varepsilon}}\right\};$$

при $r = 1$, ввиду оценки $|u(x, t)| \leqslant A_1 \exp\left\{|x|^{\frac{2}{1+\varepsilon}}\right\}$, $u(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы единственности А. Н. Тихонова [см. ([1])].

Замечание 3. Для каждого фиксированного h и любого $\varepsilon > 0$ можно построить решение $w^{(h)}(x, t)$ уравнения (4), нарушающее единственность, причем

$$|w^{(h)}(x, t)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{r}\left(\frac{|x|}{h} - 1\right)\right]} \frac{|x|^{2r\nu+1}}{(2r\nu+1)!}[(1+\varepsilon)\nu]! \leqslant A\left[(1+\varepsilon_1)\frac{|x|}{rh}\right]!,$$

где $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$.

Замечая, что $w^{(h)}(x, t)$ мажорируется абсолютно сходящимся рядом, заключаем, что

$$\lim_{h \to 0} w^{(h)}(x, t) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{x^{2r\nu+1}}{(2r\nu+1)!} F^{(\nu)}(t)$$

есть решение уравнения (5), не равное тождественно нулю, принимающее нулевые начальные данные при $t = 0$ и удовлетворяющее оценке

$$|w(x, t)| \leqslant B \exp\left\{|x|^{\frac{2r}{2r-1-\varepsilon}}\right\}.$$

При $r = 1$ получаем пример А. Н. Тихонова [см. ([1])] с оценкой

$$|w(x, t)| \leqslant B \exp\left\{|x|^{\frac{2}{1-\varepsilon}}\right\} \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Замечание 4. Из теоремы § 2 следует, что единственность решения системы (2) обеспечена в классе функций, подчиненных условию

$$u^{(h)}(x, t)| \leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|x|}{h}\right]! \quad (x = \ldots, -2h, -h, 0, 2h, \ldots, 0 \leqslant t \leqslant T),$$

однако в классе функций с оценкой роста $|u^{(h)}(x, t)| \leqslant A\left[(1+\varepsilon)\frac{|x|}{h}\right]!$ единственность нарушается.

Таким образом, область единственности решения системы (2) существенно у́же области единственности уравнения теплопроводности (1). Это различие теорем единственности для уравнения теплопроводности (1) и соответствующей системы конечно-разностных дифференциальных уравнений (2) не дает возможности применять метод конечных разностей для решения уравнения теплопроводности (1), если $\varphi(x)$ в начальном условии

$$u(x,\ 0)=\varphi(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

есть функция, которая, хотя и обеспечивает единственность решения (1), но допускает неединственность при решении соответствующей конечно-разностной системы (2).

В качестве такой функции можно взять

$$\varphi(x)=O(e^{|x|^{2-\varepsilon}});$$

тогда для любого h можно построить решение $w^{(h)}(x,\ t)$, нарушающее единственность, с оценкой

$$|w^{(h)}(x,\ t)|\leqslant A\left[\frac{(1-\varepsilon)}{h}|x|\right]!,$$

но

$$\left[\frac{(1+\varepsilon)|x|}{h}\right]!<e^{|x|^{2-\varepsilon}}$$

для достаточно больших $|x|$.

Замечание 5. В силу доказанной теоремы единственности для системы (18) при решении уравнения теплопроводности на q-мерной плоскости ($q\geqslant 2$) методом конечных разностей существенное значение для единственности решения соответствующей системы (18) имеет выбор направления осей сетки. Так, при повороте сетки на угол ψ без изменения первоначальных узлов сетки соответствующая уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

система

$$\frac{du_{mn}}{dt}=u_{m+1n}-2u_{mn}+u_{m-1n}+u_{mn+1}-2u_{mn}+u_{mn-1}\tag{19}$$

$$(m,\ n=\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

при $\operatorname{tg}\psi=\frac{1}{2}$ примет вид:

$$\frac{du_{mn}}{dt}=\frac{1}{5}(u_{m+2n+1}-2u_{mn}+u_{m-2n-1}+u_{m-1n+2}-2u_{mn}+u_{m+1n-2})$$

$$(m,\ n=\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots),\tag{20}$$

и вместо условия

$$|u_{mn}(t)|=O([(1-\varepsilon)\ (|m|+|n|)]!)$$

для единственности решения системы (20) потребуется условие

$$|u_{mn}(t)|=O\left(\left[(1-\varepsilon)\frac{|m|+|n|}{2}\right]!\right)\quad(|t|\leqslant T).$$

Ввиду указанной анизотропии, оси сеток удобно выбирать либо параллельными координатным осям, либо наклоненными к ним под углом 45°.

§ 3. Построение эффективного решения конечно-разностной системы дифференциальных уравнений (4)

Решение системы уравнений (4), как будет показано ниже, можно искать в виде

$$u_{nh}(t) = \frac{\varphi(nh)}{\pi}\int_0^\pi \exp\left\{\left(-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{z}{2}\right)^r t\right\} dz +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(\varphi(nh+kh)+\varphi(nh-kh))\int_0^\pi \cos kz \exp\left\{\left(-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{z}{2}\right)^r t\right\} dz \quad (6)$$

$$(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots).$$

ТЕОРЕМА. *Формула* (6) *дает решение системы уравнений* (4), *удовлетворяющее начальным данным*

$$u_{nh}(0) = \varphi(nh),$$

если $\varphi(nh)$ *удовлетворяет условию*

$$|\varphi(nh)| \leqslant L\left[(1-\varepsilon)\frac{|n|}{r}\right]!,$$

где $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$ *и* $L > 0$ — *постоянные. Всякое решение* $v_{nh}(t)$ *системы* (4), *удовлетворяющее тем же начальным данным, совпадает с указанным решением, если только*

$$|v_{nh}(t)| = O\left(\left[(1-\varepsilon_1)\frac{|n|}{r}\right]!\right) \quad (0 < \varepsilon_1 < 1, \quad |t| \leqslant T).$$

Доказательство. Как легко проверить непосредственным вычислением, выражение

$$u_{nh}^{(k)}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n-k)z\cdot\exp\left\{\left(-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{z}{2}\right)^r t\right\} dz$$

есть решение системы (4), удовлетворяющее начальным данным

$$u_{nh}^{(k)}(0) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

откуда следует, что (6) есть формальное решение системы (4).

Для того чтобы доказать, что (6) есть решение системы (4), нужно показать, во-первых, что ряд в правой части (6) равномерно сходится на любом отрезке $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$ и, во-вторых, что ряд, полученный формальным почленным дифференцированием (6) по t, также сходится равномерно на любом отрезке $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$.

Предварительно оценим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos nz\cdot\exp\left\{\left(-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{z}{2}\right)^r t\right\} dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\exp\left\{(-1)^r\frac{t}{h^{2r}}C_{2r}^r\right\}\int_0^\pi \cos nz\cdot\exp\left\{\frac{2t}{h^{2r}}\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha+r}C_{2r}^{r-\alpha}\cos\alpha z\right\} dz.$$

Интегрируя по частям $\left[\frac{n}{r}\right]$ раз интеграл правой части равенства, получим:

$$\int_0^\pi \cos nz \cdot \exp\left\{\frac{2t}{h^{2r}} \sum_{\alpha=1}^{r} (-1)^{\alpha+r} C_{2r}^{r-\alpha} \cos \alpha z\right\} dz =$$

$$= \frac{\left(\frac{t}{h^{2r}}\right)}{n} \sum_{\alpha_1=1}^{r} \alpha_1 (-1)^{\alpha_1+r} C_{2r}^{r-\alpha_1} \int_0^\pi (\cos(n-\alpha_1) z - \cos(n+\alpha_1) z) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{2t}{h^{2r}} \sum_{\alpha_2=1}^{r} (-1)^{\alpha_2+r} C_{2r}^{r-\alpha_2} \cos \alpha_2 z\right\} dz =$$

$$= \frac{\left(\frac{t}{h^{2r}}\right)^2}{n} \sum_{\alpha_1=1}^{r} \alpha_1 (-1)^{\alpha_1+r} C_{2r}^{r-\alpha_1} \sum_{\alpha_2=1}^{r} \alpha_2 (-1)^{\alpha_2+r} C_{2r}^{r-\alpha_2} \int_0^\pi \left\{\frac{1}{n-\alpha_1} \cos(n-\alpha_1-\alpha_2) z -\right.$$

$$- \frac{1}{n-\alpha_1} \cos(n-\alpha_1+\alpha_2) z - \frac{1}{n+\alpha_1} \cos(n+\alpha_1-\alpha_2) z +$$

$$\left. + \frac{1}{n+\alpha_1} \cos(n+\alpha_1+\alpha_2) z\right\} \cdot \exp\left\{\frac{2t}{h^{2r}} \sum_{\alpha_3=1}^{r} (-1)^{\alpha_3+r} C_{2r}^{r-\alpha_3} \cos \alpha_3 z\right\} dz =$$

$$= \frac{\left(\frac{t}{h^{2r}}\right)^{\left[\frac{n}{r}\right]}}{n} \prod_{i=1}^{\left[\frac{n}{r}\right]} \sum_{\alpha_i=1}^{r} \alpha_i (-1)^{\alpha_i+r} C_{2r}^{r-\alpha_i} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\pi \sum_{j=1}^{2^{\left[\frac{n}{r}\right]}} \frac{\gamma_j \cos\left(n+\beta_1+\ldots+\beta_{\left[\frac{n}{r}\right]}\right) z}{(n+\beta_1)(n+\beta_1+\beta_2)\ldots\left(n+\beta_1+\ldots+\beta_{\left[\frac{n}{r}\right]}\right)} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{2t}{h^{2r}} \sum_{\alpha=1}^{r} (-1)^{\alpha+r} C_{2r}^{r-\alpha} \cos \alpha z\right\} dz,$$

где γ_j может принимать значения ± 1, а $\beta_j = \pm \alpha_j$.

Оценивая это выражение, найдем:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nz \cdot \exp\left\{\left(-\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{z}{2}\right)^r t\right\} dz \right| \leqslant \frac{\left(2rC_{2r}^r \frac{t}{h^{2r}}\right)^{\left[\frac{n}{r}\right]}}{\left[\frac{n}{r}\right]!} \exp\left\{(2r+1) C_{2r}^r \frac{t}{h^{2r}}\right\}.$$

Без ограничения общности дальнейшее доказательство можно вести для случая $r=1$, $h=1$; тогда

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nz \exp\left\{-4t \sin^2 \frac{z}{2}\right\} dz \right| \leqslant \frac{(4t)^n}{n!} e^{6t}. \tag{21}$$

Ряд (6) примет вид:

$$u_n(t) = \frac{\varphi(n)}{\pi} \int_0^\pi \exp\left\{-4t \sin^2 \frac{z}{2}\right\} dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi(n+k) + \varphi(n-k)) \int_0^\pi \cos kz \cdot e^{-4t \sin^2 \frac{z}{2}} dz.$$

Пусть $n>0$; тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(n+k)\int_0^{\pi} \cos kz\cdot \exp\left\{-4t\sin^2\frac{z}{2}\right\} dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n\right]^*} \varphi(n+k)\int_0^{\pi} \cos kz\cdot e^{-4t\sin^2\frac{z}{2}} dz +$$

$$+ \sum_{k=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n\right]^*+1}^{+\infty} \varphi(n+k)\int_0^{\pi} \cos kz\cdot \exp\left\{-4t\sin^2\frac{z}{2}\right\} dz =$$

$$= D_{nk}(t) + \sum_{k=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n\right]^*+1}^{+\infty} \varphi(n+k)\int_0^{\pi} \cos kz\cdot \exp\left\{-4t\sin^2\frac{z}{2}\right\} dz;$$

очевидно, $D_{nk}(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция от t.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]n]^*+1}^{+\infty} \varphi(n+k)\int_0^{\pi} \cos kz\cdot e^{-4t\sin^2\frac{z}{2}} dz. \tag{22}$$

Ввиду (21), ряд (22) мажорируется рядом

$$Le^{6t} \sum_{k=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n\right]^*+1} \frac{[(1-\varepsilon)(n+k)]!\,(4t)^k}{k!} \leqslant Le^{6t}\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^* t^{\frac{(1-\varepsilon)n}{\varepsilon}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(4t)^{\frac{m}{\varepsilon}}}{m!}, \tag{23}$$

а поэтому сходится равномерно на любом отрезке $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$.

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(n-k)\int_0^{\pi} \cos kz\cdot e^{-4t\sin_2\frac{z}{2}} dz; \tag{24}$$

совершенно аналогично приходим к выводу, что ряд (24) мажорируется рядом

$$Le^{6t} t^{-\frac{(1-\varepsilon)n}{\varepsilon}} \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^* \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(4t)^{\frac{m}{\varepsilon}}}{m!}$$

и поэтому сходится равномерно на отрезке $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$. Для $n \leqslant 0$ оценки получаются аналогично, следовательно, ряд (6) сходится равномерно на любом конечном отрезке $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$.

Пусть

$$w_k(t) = (\varphi(n+k) + \varphi(n-k))\,\sigma_k(t),$$

где $\sigma_k(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos kz\cdot e^{-4t\sin^2\frac{z}{2}} dz,$

$$w_k'(t) = (\varphi(n+k) + \varphi(n-k))\,(\sigma_{k+1}(t) - 2\sigma_k(t) + \sigma_{k-1}(t)).$$

Ряд (6) после формального дифференцирования почленно по t переходит в ряд

$$w_0'(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} w_k'(t) = 2\varphi(n)(\sigma_1(t) - \sigma_0(t)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi(n+k) + \varphi(n-k))(\sigma_{k+1}(t) - 2\sigma_k(t) + \sigma_{k-1}(t))$$

или

$$2\varphi(n)\sigma_1(t) - 2\varphi(n)\sigma_0(t) + \sum_{k=2}^{+\infty} (\varphi(n+k-1) + \varphi(n-k-1))\sigma_k(t) -$$

$$-2\sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi(n+k) + \varphi(n-k))\sigma_k(t) + \sum_{k=0}^{+\infty} (\varphi(n+k+1) + \varphi(n-k-1))\sigma_k(t).$$

Доказательство равномерной сходимости по t этого ряда на любом отрезке $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$ проводится аналогично доказательству равномерной сходимости рядов (22) и (24).

Поэтому дифференцирование ряда (6) законно и (6) действительно есть решение системы (4), удовлетворяющее начальным данным

$$u_n(0) = \varphi(n) \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots).$$

Докажем, что всякое решение $v_n(t)$ системы (4), удовлетворяющее начальным данным $v_n(0) = \varphi(n)$, совпадает с указанным выше решением, если только

$$|v_n(t)| = O([(1-\varepsilon_1)|n|]!) \quad (\varepsilon_1 >)0.$$

Если показать, что $|u_n(t)| = O([(1-\varepsilon_1)|n|]!)$ при $|t| \leqslant T$, то, в силу ранее доказанной теоремы единственности,

$$u_n(t) \equiv v_n(t) \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots).$$

Итак, оценим $|u_n(t)|$. $u_n(t)$ мажорируется при $n > 0$ функцией:

$$\frac{1}{\pi}\left(\varphi(n)\sigma_0(t) + |D_{nk}(t)| + Le^{6t}\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^* e^{t^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left((4t)^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n} + (4t)^{-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n}\right)\right),$$

но

$$|\varphi(n)\sigma_0(t)| \leqslant Le^{6t}[(1-\varepsilon]n]!,$$

$$|D_{nk}(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n\right]^*} |\varphi(n+k)\sigma_k(t)| \leqslant$$

$$\leqslant L \sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n\right]^*} \frac{[(1-\varepsilon)(n+k)]!\,(4t)^k e^{6t}}{k!} \leqslant Le^{6t}\left[(1-\varepsilon)\frac{n}{\varepsilon}\right]^*! e^{6t},$$

откуда

$$|u_n(t)| \leqslant \frac{L}{\pi}e^{6t}\left([(1-\varepsilon)n]! + \left[(1-\varepsilon)\frac{n}{\varepsilon}\right]^*! e^{4t} + \frac{1}{\varepsilon}\right]^* e^{t^{\frac{1}{\varepsilon}}}\left((4t)^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n} + (4t)^{-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n}\right)\Bigg).$$

Очевидно,

$$|u_n(t)| = O([(1-\varepsilon_1)n]!),$$

если $1-\varepsilon_1 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Для $n \leqslant 0$ оценка получается аналогично, поэтому окончательно имеем:

$$|u_n(t)| = O([(1-\varepsilon_1)|n|]!).$$

Замечание. Для $r=1$ построенное решение (как указано автору С. Л. Соболевым) имеет вид:

$$u_{nh}(t) = \varphi(nh)\, e^{-\frac{2t}{h^2}} I_0\left(\frac{2t}{h^2}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi(nh+kh) + \varphi(nh-kh))\, e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right), \quad (6')$$

где $I_n(z)$ есть функция Бесселя от мнимого аргумента.

Полагая $nh = x$ и $kh = \xi$, получим:

$$u^{(h)}(x;t) \equiv u_{nh}(t) = \varphi(x)\, e^{-\frac{2t}{h^2}} I_0\left(\frac{2t}{h^2}\right) + \\ + \sum_{\substack{\xi=kh \\ k=1,2,\ldots}}^{+\infty} (\varphi(x+\xi) + \varphi(x-\xi))\, e^{-\frac{2t}{h^2}} I_{\frac{\xi}{h}}\left(\frac{2t}{h^2}\right),$$

причем $\varphi(x)$ должна удовлетворять условию:

$$|\varphi(x)| \leqslant L\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\frac{|x|}{h}\right]! \quad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right).$$

Поступило
17.III.1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихонов А. Н., Теоремы единственности для уравнения теплопроводности, Матем. сборн., 42 (1935), 199—216.

[2] Тихонов А. Н., О бесконечных системах дифференциальных уравнений, Матем. сборн., 41 (1934), 551—560.

[3] Камынин Л. И., Различие теорем единственности для уравнения теплопроводности и систем конечно-разностных дифференциальных уравнений, Доклады Ак. Наук СССР, LXXXII (1952), 13—16.



А Колмогоров

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 181–188

К ПЯТИДЕСЯТИЛЕТИЮ АНДРЕЯ НИКОЛАЕВИЧА КОЛМОГОРОВА

25 апреля 1953 года исполнилось 50 лет со дня рождения выдающегося советского математика — академика Андрея Николаевича Колмогорова.

Характерными чертами математического творчества Андрея Николаевича являются его исключительная разносторонность и сосредоточение усилий на решении актуальных проблем. Работы Андрея Николаевича по теории вероятностей, теории функций и топологии оказали значительное влияние на последующее развитие этих разделов математики.

А. Н. Колмогоров поступил в Московский университет в 1920 г. и сразу же включился в научную работу. Интересы Андрея Николаевича в эти годы концентрируются в основном вокруг нескольких трудных вопросов теории множеств и теории функций. Уже первая работа Андрея Николаевича «Об операциях над множествами» (1922 г., опубликована в 1928 г.), содержащая определение широкого класса операций над множествами (δs-операций) и устанавливающая некоторые общие свойства этих операций, внесла ценный вклад в развитие общей теории операций над множествами.

К 1922—1926 гг. относятся работы Андрея Николаевича по теории тригонометрических рядов и рядов по другим ортогональным системам.

В 1922 г. Андрей Николаевич построил пример суммируемой функции с расходящимся почти всюду рядом Фурье, который вместе с доказанным им признаком сходимости ряда Фурье, для которого ряд $\sum (a_n^2 + b_n^2) \ln n$ сходится, и до сих пор является одним из самых сильных результатов в этой области.

Из более поздних работ Андрея Николаевича по теории функций отметим работу «Исследования понятия интеграла» (1929 г.). В этой работе Андрей Николаевич построил весьма общий процесс интегрирования, содержащий в качестве частных случаев известные ранее процессы интегрирования.

Работы Андрея Николаевича по теории приближения функций содержат существенно новые постановки вопроса. Укажем на одну из них, касающуюся равномерных оценок приближения для классов функций. В 1935 г. А. Н. нашел выражение главного члена n-го остатка ряда Фурье для класса функций, r-я производная которых ограничена.

Из работ Андрея Николаевича в области функционального анализа отметим возникшие в связи с теорией случайных процессов работы об однопараметрических группах операторов в гильбертовом пространстве и найденное им условие компактности в L_p.

В топологии Андрей Николаевич создал теорию набла-гомологий, ставшую необходимой составной частью топологического аппарата.

Среди других математических дисциплин теория вероятностей в наибольшей степени носит на себе отпечаток влияния Андрея Николаевича.

Перенесение идей московской теоретико-множественной школы в теорию вероятностей позволило Андрею Николаевичу (а также А. Я. Хинчину) совершенно изменить ее облик, сблизив с другими направлениями современной математики, одновременно расширив возможности приложения теории вероятностей к технике и естествознанию. Невозможно в короткой заметке сколько-нибудь полно отразить исключительное значение работ Андрея Николаевича по теории вероятностей. Отметим лишь, что отчетливое понимание математического содержания теоретико-вероятностных понятий ведет свое начало от книги Андрея Николаевича «Основные понятия теории вероятностей» (1933 г.), а также, что Андрей Николаевич является создателем теории случайных процессов.

Андрей Николаевич постоянно проявляет интерес к методологии математики и связанным с математикой философским проблемам. Этот интерес находит свое отражение как в рассчитанных на специалистов-математиков работах по математической логике и основаниям математики, так и в статьях, рассчитанных на широкий круг читателей.

Творческой работе Андрея Николаевича всегда сопутствовала плодотворная научно-педагогическая деятельность. С 1931 г. Андрей Николаевич — профессор МГУ, а в настоящее время — директор Института математики и механики МГУ.

В 1939 г. Андрей Николаевич избран действительным членом Академии наук СССР, он руководит отделом теории вероятностей и математической статистики в Математическом институте им. В. А. Стеклова.

Работая в Академии наук и Московском государственном университете, Андрей Николаевич много внимания уделяет воспитанию научных кадров. Среди его многочисленных учеников имеются широко известные ученые.

Кроме того, Андрей Николаевич принимает активное участие в редактировании журналов, являясь членом главной редакции БСЭ, редактором математического отдела «Докладов АН СССР» и редактором журнала «Успехи математических наук».

Советское правительство высоко оценило большие заслуги А. Н. Колмогорова как ученого и общественного деятеля, присудив ему Сталинскую премию (1940 г.) и наградив двумя орденами Ленина, орденом Трудового Красного Знамени и медалями.

СПИСОК ТРУДОВ А. Н. КОЛМОГОРОВА

1923

1. Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue (*Bull. de l'Acad. Polonaise*, Cracovie, sér. A, 83—86).
2. Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout (*Fund. Math.*, t. 4, 324—328).

1924

3. Sur la convergence des séries de Fourier [*Comptes rendus*, Paris, t. 178, 303—306 (совместно с Г. А. Селиверстовым)].
4. Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier (*Fundam. Math.*, t. 5, 96—97).

1925

5. О принципе tertium non datur (*Матем. сб.*, т. 32, № 4, 646—667).
6. Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden [*Матем. сб.*, т. 32, № 4, 668—677 (совместно с А. Хинчиным)].
7. La définition axiomatique de l'intégrale (*Comptes rendus*, Paris, t. 180, 110—111).
8. Sur la possibilité de la définition générale de la dérivée de l'intégrale et de la sommation des séries divergentes (*Comptes rendus*, Paris, t. 180, 362—364).
9. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier (*Fundam. Math.*, t. 7, 24—29).
10. Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout (*Comptes rendus*, Paris, t. 183, 1327—1328).

1926

11. Sur la convergence des séries de Fourier [*Atti d. R. Accad. Lincei*, t. 3, 307—310 (совместно с Г. Селиверстовым)].

1927

12. Sur la loi des grands nombres (*Comptes rendus*, Paris, t. 185, 917—919).
13. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales [*Math. Ztschr.*, Bd. 26, 432—441 (совместно с Д. Меньшовым)].

1928

14. Об операциях над множествами (*Матем. сб.*, т. 35, № 3—4, 415—422).
15. Sur une formule limite de M. A. Khintchine (*Comptes rendus*, Paris, t. 186, 824—825).
16. Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen (*Math. Ann.*, Bd. 99, 309—319).
17. Sur un procédé d'intégration de M. Denjoy (*Fundam. Math.*, t. 11, 27—28).

1929

18. Общая теория меры и исчисление вероятностей (*Сборник работ математичского раздела*, М., изд. Комм. акад., секция естественных и точных наук, т. 1, 8—21).
19. Современные споры о природе математики (*Научн. слово*, № 6, 41—54).
20. Über das Gesetz des iterierten Logarithmus (*Math. Ann.*, Bd. 101, 126—135).
21. Bemerkungen zu meiner Arbeit «Über die Summen zufälliger Grössen» (*Math. Ann.*, Bd. 102, 484—488).
22. Sur la loi des grands nombres (*Atti d. R. Accad. Lincei*, t. 9, 470—474).
23. Sur la loi forte des grands nombres (*Comptes rendus*, Paris, t. 191, 910—912).
24. Untersuchungen über den Integralbegriff (*Math. Ann.*, Bd. 103, 654—696).

1930

25. Zur topologisch-gruppentheoretischen Begründung der Geometrie (*Nachr. Ges. Wiss.*, Göttingen, Fachgruppe 1 (Mathematik), Nr. 8, 208—210).
26. Sur la notion de la moyenne (*Atti d. R. Accad. Lincei*, t. 12, 388—391).
27. Метод медианы в теории ошибок (*Матем. сб.*, т. 38, № 3—4, 47—50).
28. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Math. Ann.*, Bd. 104, 415—458).

1931

29. Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel (*Nachr. Ges. Wiss.*, Göttingen, H. 1, 60—63).
30. Eine Verallgemeinerung des Laplace-Liapounoffschen Satzes (*Известия Ак. Наук СССР*, ОМЕН, №7, 959—962).
31. Sur le problème d'attente (*Матем. сб.*, т. 38, 101—106).
32. Теория функций действительного переменного (В кн. «Математика в СССР за 15 лет». М.—Л., ГТТИ, 37—48).

1932

33. Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo (Un problema di Bruno de Finetti) (*Atti d. R. Accad. Lincei*, t. 15, 805—808).

34. Ancora sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo (*Atti d. R. Accad. Lincei*, t. 15, 866—869).
35. Beiträge zur Masstheorie (*Math. Ann.*, Bd. 107, 351—366).
36. Zur Deutung der intuitionischen Logik (*Math. Ztschr.*, Bd. 35, 58—65).
37. Zur Begründung der projektiven Geometrie (*Ann. of Math.*, v. 33, N 1, 175—176).
38. Введение в теорию функций действительного переменного [М.—Л., ГТТИ (совместно с П. С. Александровым)].
39. Введение в теорию функций действительного переменного [Изд. 2 стереот., М.—Л., ГТТИ (совместно с П. С. Александровым)].

1933

40. Grundbegiffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Berlin).
41. Über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (*Известия Ак. Наук СССР*, ОМЕН, №3, 366—372).
42. Zur Berechnung der mittleren Brownschen Fläche [*Phys. Ztschr. Sovjet*, Bd. 4, 1—13 (совместно с М. А. Леонтовичем)].
43. К вопросу о пригодности найденных статистическим путем формул прогноза (*Ж. геофиз.*, т. 3, № 1, 78—82).
44. Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse (*Math. Ann.*, Bd. 108, 149—160).
45. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione (*Giornale Ist. Ital. Attuari*, t. 4, 83—91).
46. О предельных теоремах теории вероятностей (*Известия Ак. Наук СССР*, ОМЕН, № 3, 366—372).

1934

47. О сходимости рядов по ортогональным полиномам (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 1, 291—294).
48. О точках разрыва функций двух переменных [*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 4, 105—106 (совместно с И. Верченко)].
49. Продолжение исследований о точках разрыва функций двух переменных [*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 4, 361—362 (совместно с И. Верченко)].
50. Quelques remarques sur l'approximation des fonctions continues (*Матем. сб.*, 41, № 1, 99—103).
51. О некоторых новых течениях в теории вероятностей [*Труды II Всес. съезда математиков в Ленинграде* 24—30 *июня* 1934 *г.*», Л., Изд. АН СССР(тезисы доклада)].
52. Современная математика (*Фронт науки и техн.*, № 5—6, 25—28).
53. Институт математики и механики Моск. гос. университета (*Фронт науки и техн.*, № 5—6, 75—78).
54. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) (*Ann. of Math.*, v. 35, 116—117).
55. Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes (*Studia math.*, t. 5, 29—33).

1935

56. О некоторых современных течениях в теории вероятностей. (*Труды II Всесоюзн. съезда математиков в Ленинграде 24—30 июня 1934 г.*, Л., Изд. АН СССР, т. 1, 349—358).
57. Уклонения от формул Харди при частичной изоляции (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 3, 129—132).
58. La transformation de Laplace dans les espaces linéaires (*Comptes rendus*, Paris, t. 200, 1717—1718).
59. Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen (*Ann. of Math.*, v. 36, 521—526).
60. Zur Theorie der Markoffschen Ketten (*Math. Ann.*, Bd. 112, 155—160).

1936

61. Основные понятия теории вероятностей, М.—Л.,
62. Уравнение (*БСЭ*, т. 56, 163—165).
63. Современная математика (Сборник статей по философии математики, М., Учпедгиз 7—13).

64. Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie (*Матем. сб.*, т. 1, № 1, 97—102).
65. Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen (*Матем. сб.*, т. 1, № 4, 607—610).
66. Homologierung des Komplexes und des lokal-bikompakten Raumes (*Матем. сб.*, т. 1, № 5, 701—706).
67. К условию А. И. Плеснера для закона больших чисел (*Матем. сб.*, т. 1, № 6, 847—849).
68. Les groupes de Betti des espaces localement bicompacts (*Comptes rendus*, Paris, t. 202, 1144—1147).
69. Propriétés des groupes de Betti des espaces localement bicompacts (*Comptes rendus*, Paris, t. 202, 1325—1327).
70. Les groupes de Betti des espaces métriques (*Comptes rendus*, Paris, t. 202, 1558—1560).
71. Cycles relatifs. Théorème de dualité de M. Alexander (*Comptes rendus*, Paris, t. 202, 1641—1643).
72. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse (*Ann. of Math.*, v. 37, 107—110).
73. Endliche Überdeckungen topologischer Räume [*Fundam. Math.*, t. 26, 267—271 (совместно с П. С. Александровым)].
74. Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza (*Giornale Ist. Ital. Attuari*, t. 7, 74—80).

1937

75. Исследования уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме [*Бюлл. МГУ* (А), Математика и механика, т. 1, в. 6 (совместно с И. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым)].
76. Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний (*Бюлл. МГУ* (А), Математика и механика, т. 1, в. 3).
77. К статистической теории кристаллизации металлов (*Известия Ак. Наук СССР, серия математ.*, т. 1, 355—359).
78. Кососимметричные величины и топологические инварианты [*Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике*, ГТТИ, М.—Л., 342—347 (под ред. проф. В. Ф. Кагана)].
79. Ein fereinfachter Beweis des Birkgoff-Khintchineschen Ergodensatzes (*Матем. сб.*, т. 2, № 2, 367—368).
80. Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze (*Math. Ann.*, Bd. 113, 766—772).
81. Über offene Abbildungen (*Ann. of Math.*, v. 38, 36—38).
82. Хаусдорф Ф., Теория множеств [М.—Л., ГТТИ (ред. и дополнения) (совместно с П. С. Александровым)].

1938

83. Введение в теорию функций действительного переменного [М.—Л., ГТТИ, Изд. 3-е перераб. (совместно с П. С. Александровым)].
84. Марков Андрей Андреевич (*БСЭ*, т. 38, 152—153).
85. Математика (*БСЭ*, т. 38, 359—402).
86. Математическая индукция (*БСЭ*, т. 38, 405—408).
87. Многомерное пространство (*БСЭ*, т. 39, 577—578).
88. Теория вероятностей и ее применения («*Математика и естествознание в СССР*», М.—Л., Изд. АН СССР, 51—61).
89. Об отделе информации в первом выпуске «Успехов математических наук» (*Успехи мат. наук*, вып. 4, 326—327).
90. Одно замечание по поводу оснований геометрии (К вопросу о необходимости нового перевода «Оснований геометрии» Д. Гильберта) (*Успехи мат. наук*, вып. 4. 347—348).

91. От редакции (*Успехи мат. наук*, вып. 5, 3—4).
92. Об аналитических методах в теории вероятностей (*Успехи мат. наук*, вып. 4, 5—41).
93. Упрощенное доказательство эргодической теории Биркгофа-Хинчина (*Успехи мат. наук*, вып. 4, 52—56).
94. Несколько проблем теории функций действительного переменного [*Успехи мат. наук*, вып. 4, 232—234 (совместно с Г. М. Фихтенгольцем и И. М. Гельфандом)].
95. К решению одной биологической задачи (*Известия НИИ мат. и мех. Томск. ун-та*, 2, вып. 1, 1—12).
96. Une généralisation de l'inégalité de M. J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successive d'une fonction (*Comptes rendus*, Paris, t. 207, 764—765).
97. Лебег А., Об измерении величин [М., Учпедгиз (ред. предисловия)].

1939

98. Алгебра, ч. 1 [М., Учпедгиз (совместно с П. С. Александровым)].
99. Ориентация (*БСЭ*, т. 43, 342—344).
100. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах [*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 22, 11—15 (совместно с И. М. Гельфандом)].
101. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале (*Уч. зап. МГУ*. вып. 30, Математика, кн. 3, 3—16).
102. Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires (*Comptes rendus* Paris, t. 208, 2043—2045).

1940

103. Поверхность (*БСЭ*, т. 45, 746—748).
104. Кривые в гильбертовском пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 26, 6—9).
105. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовском пространстве (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 26, 115—118).
106. К шестидесятилетию Сергея Натановича Бернштейна [*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 4, 249—260 (совместно с В. Л. Гончаровым)].
107. Валерий Иванович Гливенко (1897—1940) (*Успехи мат. наук*, вып. 8, 379—383, некролог).
108. Романовский В. И., Математическая статистика (*Успехи мат. наук*, вып. 7, 327—329, рецензия).

1941

109. Вступ до теорії функцій дійсного змінного [«Радшкола», Київ (совместно с П. С. Александровым)].
110. Стационарные последовательности в гильбертовском пространстве (*Бюлл. МГУ*, Математика, 2, вып. 6).
111. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 5, 3—14).
112. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 30, 299—303).
113. Точки локальной топологичности счетно-кратных открытых отображений компактов (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 30, 477—479).
114. О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 31, 99—101).
115. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой язкой жидкости (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 31, 538—541).
116. Рассеяние энергии при локально-изотропной турбулентности (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 32, 19—21).
117. Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях [*Математика в школе*, № 2, 1—12 (совместно с П. С. Александровым)].
118. Иррациональные числа [*Математика в школе*, № 3, 1—15 совместно с П. С. Александровым)].

119. Confidence limits for an unknown distribution function (*Ann. of Math. Statistics*, v. 12, N 4, 461—463).

1942

120. Определение центра рассеивания и меры точности по ограниченному числу наблюдений (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 6, 3—32).
121. Николай Иванович Лобачевский. К 150-летию со дня рождения, [М.—Л., ГТТИ (совместно с П. С. Александровым)].
122. Великий русский ученый-новатор. К 150-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского (*газ. «Известия»* 2.XI, № 259).

1943

123. Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности системы стрельбы [*«Сборник статей по теории стрельбы»*, Л.—М., изд. АН СССР, т. 1, 7—25 (см. также *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*, т. 12)].
124. Искусственное рассеивание в случае поражения одним попаданием и рассеивания в одном измерении (*«Сборник статей по теории стрельбы»*, Л.—М., изд. АН СССР, т. 1, 26—45).

1946

125. К вопросу о законе сопротивления при турбулентном течении в гладких трубах (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 52, 669—671).
126. К обоснованию метода наименьших квадратов (*Успехи матем. наук*, т. 1, вып. 1, 57—70).
127. К обоснованию теории вещественных чисел (*Успехи мат. наук*. т. 1, вып. 1, 217—219).
128. Ньютон и современное математическое мышление (В кн. *«Московский университет — памяти Исаака Ньютона.* 1643—1943», М., МГУ, 27—43).
129. Дискуссия по статье члена-корреспондента АН СССР М. А. Великанова «Перенос взвешенных насосов турбулентным потоком» (*Известия Ак. Наук СССР*, ОТН, № 5, 781—784).
130. Советские физики и математики (к присуждению Сталинских премий) (*газ. «Известия»*, 3/1, № 2[illegible]

1947

131. Развитие математики в СССР (*БСЭ*, том СССР, 1318—1323).
132. Средние величины (*БСЭ*, т. 52, 508—509).
133. Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов, [*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.*, т. 11, 561—568 (совместно с А. А. Петровым и Ю. М. Смирновым)].
134. Ветвящиеся случайные процессы [*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 56, 7—10 (совместно с Н. А. Дмитриевым)].
135. Вычисление финальных вероятностей для ветвящихся случайных процессов [*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 56, 783—786 (совместно с Б. А. Севастьяновым)].
136. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром (*«Юбилейный сборник, посвященный тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции»*, ч. 1, М.—Л., изд. АН СССР, 242—252).
137. Роль русской науки в развитии теории вероятностей [В кн. *«Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры»*, т. 1, кн. 1, М., МГУ, 53—64 (см. также *Уч. зап. МГУ*, вып. 91)].

1948

138. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром (*«Общее собрание Академии Наук СССР, посвященное тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции»*, М.—Л., изд. АН СССР, 465—472).
139. Теория вероятностей [*«Математика СССР за тридцать лет, 1917—1947»*, М.—Л., ГТТИ, 701—727 (совместно с Б. В. Гнеденко)].
140. О двух теоремах относительно вероятностей [В кн. «Чебышев П. Л., Полное собрание сочинений, т. 3, Математический анализ, М.—Л., изд. АН СССР, 404—409. (комментарии)].

141. Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции (*Успехи мат. наук*, т. 3, вып. 1, 216—221).
142. Евгений Евгеньевич Слуцкий (*Успехи мат. наук*, т. 3, вып. 4, 143—151, некролог).
143. Крамер Г., Математические методы статистики, (М., ИЛ., ред. предисловия).

1949

144. Полные булевские алгебры с мерой (*VI Zjazd Matematyków Polskich* (Warszawa, 22—30).
145. О дроблении капель в турбулентном потоке (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 66, 825—838).
146. Решение одной задачи из теории вероятностей, связанной с вопросом о механизме слоеобразования (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 65, 793—796).
147. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 13, 281—300).
148. Реальный смысл результатов дисперсионного анализа (*Труды Второго Всесоюзного совещания по математической статистике.* 27 сентября — 2 октября 1948 г., изд. Ак. наук Уз. ССР, 240—268).
149. О суммах случайного числа случайных слагаемых [*Успехи мат. наук*, т. 4, вып. 4, 168—172 (совместно с Ю. В. Прохоровым)].
150. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин [М.—Л., ГТТИ (совместно с Б. В. Гнеденко)].
151. Аксиома (*БСЭ*, т. 1, 613—616).

1950

152. Несмещенные оценки (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 14, 303—326).
153. К вопросу об определении коэффициента температуропроводности почвы (*Известия Ак. Наук СССР, сер. географическая и геофизическая*, т. XIV, 97—98).
154. Алгебра в средней школе (*БСЭ*, т. 2, 61—62).
155. Алгоритм (*БСЭ*, т. 2, 65).
156. Алгоритм Эвклида (*БСЭ*, т. 2, 65—67).
157. Бесконечно малые (*БСЭ*, т. 5, 67—71).
158. Бесконечность (в математике) (*БСЭ*, т. 5, 73—74).

1951

159. Обобщение формулы Пуассона на случай выборки из конечной совокупности (*Успехи мат. наук*, т. 6, вып. 3, 133—134).
160. Иван Георгиевич Петровский (*Успехи мат. наук*, т. 6, вып. 3, 161—164).
161. Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю (Л., изд. Всесоюзн. общества по распространению политич. и научн. знаний, 1—24).
162. Független Valószinüségi valiozók összegeinek natáreloszlásai [Budapest (совместно с Б. В. Гнеденко) (венгерский перевод)].
163. Величина (*БСЭ*, т. 7, 340—341).
164. Выборочный метод (*БСЭ*, т. 9, 417—418).

1952

165. К вопросу о сопротивлении и профиле скоростей при турбулентном течении в трубах (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 84, 29—30).
166. Д. Гильберт (*БСЭ*, т. 11, 370—371).
167. Дифференциал (*БСЭ*, т. 14, 497).
168. Дифференциальные уравнения [*БСЭ*, т. 14, 520—526 (совместно с Б. П. Демидовичем)].
169. О профессии математика (в помощь поступающим в вузы) (М., Изд. Советская Наука).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 189—248

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. И. ГРАЕВ

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННОЙ УНИМОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ (ОСНОВНЫЕ НЕВЫРОЖДЕННЫЕ СЕРИИ)

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе дается описание основных невырожденных серий унитарных представлений группы вещественных унимодулярных матриц произвольного порядка и доказывается неприводимость полученных представлений.

Введение

1. В работе ([1]) были рассмотрены все неприводимые унитарные представления классических комплексных групп. Эти представления задавались там как представления в пространствах функций на тех или иных многообразиях, на которых действует группа.

Рассмотрение представлений вещественных полупростых групп выявляет по сравнению с комплексными группами ряд новых особенностей. Это отчетливо видно уже при сравнении представлений группы комплексных унимодулярных матриц второго порядка, рассмотренных в работе ([2]), с представлениями группы вещественных унимодулярных матриц второго порядка, рассмотренными в работе ([5]). Поясним имеющееся здесь различие на основных сериях представлений этих групп.

Представление основной серии группы комплексных матриц второго порядка задается следующим образом. Мы рассматриваем пространство функций $f(z)$ от комплексного переменного $z = x + iy$ с интегрируемым квадратом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^2\, dx\, dy < +\infty.$$

Представление основной серии задается целым числом m и числом ρ и состоит в том, что каждой матрице $g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ ставится в соответствие преобразование, переводящее любую функцию $f(z)$ в функцию

$$T_g f(z) = f\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right) |\beta z+\delta|^{m+\rho-2} (\beta z+\delta)^{-m}.$$

Группа вещественных матриц имеет две основные серии представлений. В первой из них рассматриваются функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом на вещественной оси:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx < +\infty.$$

Представление задается вещественным числом ρ и состоит в том, что каждой вещественной матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ставится в соответствие преобразование

$$T_g f(x) = f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right) |\beta x + \delta|^{i\rho - 1}$$

или преобразование

$$T_g f(x) = f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right) |\beta x + \delta|^{i\rho - 1} \cdot \operatorname{sign}(\beta x + \delta).$$

Эта серия представлений является наиболее естественным аналогом описанной выше серии представлений комплексной группы.

Однако имеется еще одна основная серия представлений вещественной группы. Представление этой серии задается целым положительным числом m. Оно реализуется в пространстве функций $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, аналитических в полуплоскости $y > 0$, для которых сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\infty} |f(z)|^2 y^{m-2} \, dy \, dx.$$

Представление состоит в том, что каждой вещественной матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ставится в соответствие преобразование

$$T_g f(z) = f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) (\beta z + \delta)^{-m}.$$

Другая часть этой серии может быть построена в пространстве функций, аналитических в полуплоскости $y < 0$.*

Естественно поставить вопрос о представлениях вещественных простых групп. В частности, возникает вопрос о причине появления серий, задаваемых на аналитических функциях, о причине возникновения нескольких серий вместо одной и т. д.

---

* Отметим, что эта серия может быть также задана как представление на вещественной оси, поскольку аналитическая в полуплоскости функция $f(z)$ вполне определяется своими граничными значениями $f(x)$. При этом скалярное произведение будет задаваться уже не формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\infty} f_1(z) \overline{f_2(z)} \, y^{m-2} \, dy \, dx,$$

а формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1 - x_2|^{m-2} f_1(x_1) \overline{f_2(x_2)} \, dx_1 \, dx_2.$$

Однако здесь приходится рассматривать не все функции, а лишь граничные к аналитическим из верхней или соответственно из нижней полуплоскости.

В этой работе мы рассматриваем представления вещественной унимодулярной группы любого порядка. Здесь уже выступают все характерные черты представлений вещественных групп. В публикуемой работе мы рассматриваем лишь основные серии представлений вещественной унимодулярной группы. Другие серии представлений этой группы, а также характеры представлений, теорема Планшереля и другие вопросы будут рассмотрены впоследствии *.

2. Выясним, как именно конструируются представления основных невырожденных серий вещественной унимодулярной группы.

Напомним сперва, что представления группы $\mathfrak{G}$ комплексных унимодулярных матриц n-го порядка строились в ([1]) в пространстве функций $f(z)$, определенных на элементах z многообразия правых классов смежности группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K комплексных треугольных матриц. Конечно, подгруппа K и любая сопряженная с ней подгруппа $g_0^{-1}Kg_0$ приводят к одному и тому же многообразию и, следовательно, к одним и тем же представлениям.

Перейдем теперь к группе G вещественных унимодулярных матриц. Здесь нам придется уже делать различие между подгруппой K треугольных матриц и сопряженными с ней подгруппами $K^{g_0} = g_0^{-1}Kg_0$ комплексной группы $\mathfrak{G}$, так как пересечения этих подгрупп с вещественной группой G могут быть различными. При этом подгруппы K^{g_0}, имеющие существенно различные пересечения с G**, могут приводить к различным сериям представлений групп G вещественных матриц.

Представления, отвечающие заданной подгруппе $K^{g_0} = g_0^{-1}Kg_0$, строятся в пространстве функций, определенных на элементах многообразия правых классов смежности вещественной группы G по ее пересечению $G \cap K^{g_0}$ с подгруппой K^{g_0}. Однако это пространство состоит, вообще говоря, не из всех функций, а лишь из функций, аналитических по некоторым из переменных.

Весьма интересно появление здесь аналитических функций; оно объясняется следующей причиной.

Пусть сперва $\mathfrak{G}$ — комплексная группа и K — ее подгруппа. Пространство функций, постоянных на правых классах смежности группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K, можно задать еще и тем условием, что эти функции постоянны при бесконечно малых сдвигах, отвечающих умножению элементов группы $\mathfrak{G}$ слева на инфинитезимальные элементы из K. Так как бесконечно малые сдвиги задаются операторами Ли, то эти функции удовлетворяют уравнениям $X_i f = 0$, где X_i — операторы Ли, отвечающие инфинитезимальным элементам из K.

Перейдем теперь к вещественной группе. Будем рассматривать функции $f(g)$ на группе G вещественных матриц. Пусть K_B — подгруппа вещественных треугольных матриц и $K^{g_0} = g_0^{-1}K_B g_0$ — некоторая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ комплексных матриц, сопряженная с K_B. Предположим

---

* Конструкция представлений для общего случая полупростой вещественной группы Ли была намечена в работе авторов ([3]).

** Т. е. эти пересечения не являются сопряженными в G подгруппами.

сперва, что матрица g_0, при помощи которой определена подгруппа K^{g_0}, вещественна. Тогда K^{g_0} является подгруппой вещественной группы G. Потребуем, как и в случае комплексной группы, чтобы функции $f(g)$ были постоянны при бесконечно малых сдвигах, отвечающих умножению элементов группы G слева на инфинитезимальные элементы из K^{g_0}. Это требование выразится, как и в случае комплексной группы, в форме некоторой системы линейных дифференциальных уравнений $X_i f = 0$, которой должны удовлетворять функции $f(g)$. Коэффициенты этих уравнений будут аналитически выражаться через элементы матриц g_0. Вследствие этого, мы можем формально написать операторы Ли X_i также и для того случая, когда матрица g_0 уже не является вещественной, и потребовать, чтобы функции $f(g)$ удовлетворяли соответствующей системе дифференциальных уравнений $X_i f = 0$.

В случае, когда матрица g_0 вещественна, получаемая система дифференциальных уравнений является, как и в случае комплексной унимодулярной группы, гиперболической. Ее характеристиками будут как раз правые классы смежности вещественной группы G по подгруппе K^{g_0}. Уравнения $X_i f = 0$ означают поэтому, что функции $f(g)$ постоянны на классах смежности G по K^{g_0}. Если же матрица g_0 комплексна, то соответствующая система дифференциальных уравнений для функций $f(g)$ уже не будет гиперболической *. Ее решениями оказываются в этом случае функции, постоянные на правых классах смежности группы G по ее пересечению $G \cap g_0^{-1} K g_0$ с подгруппой $g_0^{-1} K g_0$, где K — группа комплексных треугольных матриц, и, кроме того, аналитические по некоторым из параметров группы G. Таким образом, постоянство по некоторым из параметров группы заменяется при переходе от комплексной группы к вещественной требованием аналитичности.

Представления группы G вещественных матриц реализуются, в силу сказанного выше, в пространствах функций, определенных на многообразии классов смежности группы G по ее пересечению с какой-нибудь из подгрупп $g_0^{-1} K g_0$, сопряженных с группой K комплексных треугольных матриц. Получаемые таким образом все возможные многообразия можно описать также иным способом. Напомним сначала, каким образом это делалось в работе ([1]) для случая комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$. В этой работе была введена в рассмотрение подгруппа Z треугольных матриц, имеющих над главной диагональю нули, а по главной диагонали единицы, т. е. группа таких матриц $z = \| z_{pq} \|$, что $z_{pp} = 1$ и $z_{pq} = 0$ при $p < q$ $(p,\ q = 1, \ldots, n)$. Было доказано, что почти всякую матрицу g комплексной группы $\mathfrak{G}$ можно однозначно представить в виде $g = kz$, где k — треугольная матрица из K, а z — матрица из Z. В соответствии с этим, многообразие правых классов

---

* Действительно, характеристиками системы в этом случае должны были быть классы смежности группы G по ее пересечению с подгруппой $g_0^{-1} K g_0$. Так как это пересечение отчасти мнимо, то и некоторые из характеристик мнимы. Заметим, что указанная ниже аналитичность функций по некоторым из параметров и заменяет собой постоянство на классах смежности по «мнимой подгруппе» группы G.

смежности комплексной группы $\mathfrak{G}$ по ее подгруппе K можно (с точностью до многообразия низшей размерности) отождествить с многообразием элементов группы Z. Преобразование многообразия Z матрицей g комплексной группы $\mathfrak{G}$ сводится тогда к тому, что элемент z этого многообразия переводится в такой элемент z_1, что $zg = kz_1$, где k — матрица из подгруппы K.

Многообразие Z не транзитивно относительно преобразований элементами группы G вещественных матриц, а потому должно распадаться на некоторое число транзитивных многообразий. Рассмотрим какое-нибудь из этих транзитивных многообразий в Z. Пусть z — какая-нибудь точка этого многообразия. Тогда стационарной подгруппой для z будет пересечение $G \cap z^{-1}Kz$ группы G с подгруппой $z^{-1}Kz$. Поэтому рассматриваемое многообразие можно отождествить с многообразием классов смежности группы G по подгруппе $G \cap z^{-1}Kz$. Обратно, почти все элементы комплексной группы $\mathfrak{G}$ можно представить в виде $g = kz$, где $k \in K$, $z \in Z$, а потому почти всякая подгруппа, сопряженная подгруппе K треугольных матриц, имеет вид $z^{-1}Kz$. Следовательно, всякое многообразие классов смежности группы G вещественных матриц по ее пересечению с подгруппой, сопряженной группе K, можно отождествить с некоторым многообразием в Z, транзитивным относительно преобразований элементами группы G. Таким образом, *представления группы G вещественных матриц можно реализовать в пространствах функций, задаваемых на том или ином многообразии в Z, транзитивном относительно преобразований элементами группы G.*

В этой работе мы приводим лишь те транзитивные многообразия в Z, которые нужны для получения основных невырожденных серий представлений вещественной группы G.

3. Опишем найденные в работе представления группы G вещественных унимодулярных матриц.

Начнем с описания тех транзитивных относительно вещественной группы G многообразий в Z, которые приводят к нужным сериям.

Рассмотрим совокупность таких матриц z из Z, которые можно представить в виде произведения $z = \dot{z}x$ двух матриц $\dot{z} = \|\dot{z}_{pq}\|$ и $x = \|x_{pq}\|$ из Z следующего вида. Элементы $\dot{z}_{12}, \dot{z}_{34}, \ldots, \dot{z}_{2m-1,2m}$ матрицы $\dot{z}$ — комплексные числа, мнимые части которых отличны от нуля (m — фиксированное число); остальные же элементы этой матрицы, лежащие под главной диагональю, равны нулю. Матрица x — вещественная матрица, причем $x_{12} = x_{34} = \cdots = x_{2m-1,2m} = 0$. Оказывается, что если $2m$ меньше, чем порядок n рассматриваемых матриц, то описанная совокупность элементов z образует многообразие Z_m, транзитивное относительно преобразований элементами вещественной группы G. При $2m = n$ эта совокупность распадается на два транзитивных многообразия Z_m^+ и Z_m^-. Первое из них состоит из таких матриц $z = \dot{z}x$, для которых произведение $\prod_{p=1}^{m} \operatorname{Im} \dot{z}_{2p-1,2p}$ мнимых частей элементов $\dot{z}_{2p-1,2p}$ матрицы $\dot{z}$ больше нуля; второе же состоит из таких матриц, для которых это произведение меньше нуля.

В качестве параметров, определяющих элемент $z = \dot{z}x$ многообразия Z_m, мы примем комплексные элементы $z_1 = \dot{z}_{12}$, $z_2 = \dot{z}_{34}, \ldots, z_m = \dot{z}_{2m-1, 2m}$ матрицы $\dot{z}$ и вещественные элементы x_{pq} матрицы x.

При $m < \frac{n}{2}$ представление реализуется в пространстве функций $f(z) = f(z_1, \ldots, z_m, x)$, определенных на Z_m, от m комплексных переменных $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2, \ldots, z_m = z_m + iy_m$ и $\frac{n(n-1)}{2} - m$ вещественных переменных x_{pq}. Мы требуем, чтобы эти функции были относительно каждого комплексного переменного z_p аналитичны отдельно в верхней и отдельно в нижней полуплоскости. (При этом не предполагается, что эти функции продолжаются через вещественную ось.) Далее, мы требуем, чтобы для этих функций при заданных целых положительных числах $n_1, n_2, \ldots, n_m$ сходился интеграл

$$\int |f(z)|^2 \prod_{p=1}^{m} |y_p|^{n_p - 2} \prod_{p=1}^{m} dx_p\, dy_p \cdot d\mu(x).$$

($d\mu(x)$ обозначает произведение дифференциалов dx_{pq} элементов матрицы x.)

Представление состоит в том, что каждой вещественной матрице g n-го порядка ставится в соответствие преобразование, переводящее функцию $f(z) = f(z_1, \ldots, z_m, x)$ в функцию

$$T_g f(z) = f(z\overline{g})\, \alpha(z, g). \tag{1}$$

Здесь $z\overline{g}$ обозначает преобразование z при помощи матрицы g. Функция $\alpha(z, g)$, характеризующая представление, определяется заданием m целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$, $m + \tau - 1$ вещественных чисел $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m+\tau-1}$ $(\tau = n - 2m)$, а также заданием $\tau - 1$ индексов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\tau-1}$, принимающих значение 0 или 1.

Опишем функцию $\alpha(z, g)$, отвечающую заданным числам n_p, ρ_q и ε_r $(p = 1, \ldots, m;\ q = 1, \ldots, m + \tau - 1;\ r = 1, \ldots, \tau - 1)$. Для этого рассмотрим вещественную матрицу x, входящую в разложение $z = \dot{z}x$ матрицы z. Можно показать, что матрица xg может быть однозначно представлена в виде $xg = kx_1$. Здесь x_1 есть матрица того же вида, что и матрица x, а матрица k имеет следующий вид:

$$k = \begin{pmatrix}
\alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\
\gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\
k_{31} & k_{32} & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\
k_{41} & k_{42} & \gamma_2 & \delta_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
k_{2m-1,1} & k_{2m-1,2} & k_{2m-1,3} & k_{2m-1,4} & \cdots & \alpha_m & \beta_m & 0 & \cdots 0 \\
k_{2m,1} & k_{2m,2} & k_{2m,3} & k_{2m,4} & \cdots & \gamma_m & \delta_m & 0 & \cdots 0 \\
k_{2m+1,1} & k_{2m+1,2} & k_{2m+1,3} & k_{2m+1,4} & \cdots & k_{2m+1,2m-1} & k_{2m+1,2m} & \lambda_1 & \cdots 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & k_{n4} & \cdots & k_{n,2m-1} & k_{n,2m} & k_{n,2m+1} & \cdots \lambda_\tau
\end{pmatrix}$$

Введем обозначения:

$$\Lambda_p = \begin{cases} \begin{vmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ \gamma_p & \delta_p \end{vmatrix} & \text{при } p \leqslant m, \\ \lambda_{p-m} & \text{при } p = m+1, m+2, \ldots, m+\tau \end{cases}$$

($\tau = n - 2m$). Оказывается, что тогда функцию $\alpha(z, g)$ можно представить следующей формулой:

$$\alpha(z, g) = \prod_{p=1}^{m} \left(\frac{\beta_p z_p + \delta_p}{\sqrt{|\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p|}} \right)^{-n_p} \prod_{p=1}^{m+\tau-1} |\Lambda_p|^{i\rho_p} \cdot \prod_{p=m+1}^{m+\tau-1} (\operatorname{sign} \Lambda_p)^{\varepsilon_p} \cdot$$

$$\cdot \left\{ |\Lambda_2|^{r_1+r_2} |\Lambda_3|^{r_1+2r_2+r_3} \ldots |\Lambda_{m+\tau}|^{r_1+2r_2+\ldots+2r_{m+\tau-1}+r_{m+\tau}} \right\}^{-1/2}. \qquad (2)$$

(Здесь принято $r_1 = \ldots = r_m = 2$, $r_{m+1} = \ldots = r_{m+\tau} = 1$.)

Таким образом, при $m < \frac{n}{2}$ представление реализуется в описанном выше пространстве функций. Оно задается m целыми положительными числами $n_1, n_2, \ldots, n_m$, $m + \tau - 1$ вещественными числами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m+\tau-1}$, а также $\tau - 1$ индексами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\tau-1}$, принимающими значение 0 или 1. Оператор представления T_g задается формулами (1) и (2).

При $m = \frac{n}{2}$ представление реализуется в пространстве функций описанного вида, определенных не на всем многообразии Z_m, а лишь на одной из его частей, Z_m^+ или Z_m^-. Представление задается m целыми положительными числами $n_1, n_2, \ldots, n_m$ и $m - 1$ вещественными числами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m-1}$. Оператор представления определяется в соответствии с формулами (1) и (2).

Полагая $m = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, мы получаем $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ различных основных невырожденных серий представлений вещественной группы G *.

4. Не следует думать, что описанными здесь сериями исчерпываются все серии унитарных представлений группы G вещественных матриц. Описание всех остальных серий будет дано в дальнейшем. Мы укажем здесь лишь в качестве примера еще одну серию унитарных представлений, которая существует для групп матриц четного порядка. Представления этой серии замечательны тем, что они определяются в простран-

* Отметим, что число m равно числу пар комплексно сопряженных собственных значений у матриц стационарной подгруппы для фиксированного элемента многообразия Z_m.

Вопрос об эквивалентности этих представлений будет, как обычно, автоматически вытекать из формул для характеров, которые будут приведены впоследствии. Эти же формулы для характеров проливают свет и на существование различных серий. Грубо говоря, существование $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ различных серий связано с тем, что в группе вещественных матриц имеется $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ различных типов классов сопряженных элементов. При этом характер представления серии, определяемой числом m, равен тождественно нулю на матрицах, имеющих более чем m пар комплексных собственных значений.

стве чисто аналитических функций (т. е. функций, аналитических по всем параметрам).

Для простоты будем рассматривать группу G вещественных матриц четвертого порядка.

Оказывается, что многообразие Z комплексных матриц, на котором действует группа G, распадается на два транзитивных относительно G многообразия Z^+ и Z^-, имеющих ту же размерность, что и само Z, и на граничное к ним многообразие низшей размерности. Наши представления реализуются как раз в пространстве функций, задаваемых на одном из многообразий Z^+ и Z^-.

При подходящем выборе параметров многообразия Z^+ и Z^- можно рассматривать как многообразия пар (z', z'') точек трехмерного комплексного пространства $\mathfrak{W}$, $z'(z_1', z_2', z_3')$ и $z''(z_1'', z_2'', z_3'')$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\Delta(z', z'') = \begin{vmatrix} z_1' & z_2' & z_3' & 1 \\ z_1'' & z_2'' & z_3'' & 1 \\ \bar{z}_1' & \bar{z}_2' & \bar{z}_3' & 1 \\ \bar{z}_1'' & \bar{z}_2'' & \bar{z}_3'' & 1 \end{vmatrix} > 0$$

или, соответственно, неравенству $\Delta(z', z'') < 0$.

Действие группы G в трехмерном пространстве $\mathfrak{W}$ сводится к тому, что матрица $g = \| g_{pq} \|$ переводит точку $z(z_1, z_2, z_3)$ этого пространства в точку $z\bar{g}$ с координатами

$$\hat{z}_i = \frac{z_1 g_{1i} + z_2 g_{2i} + z_3 g_{3i} + g_{4i}}{z_1 g_{14} + z_2 g_{24} + z_3 g_{34} + g_{44}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Представление рассматриваемой серии строится в пространстве функций $f(z', z'')$ шести комплексных переменных z_i' и z_j'' $(i, j = 1, 2, 3)$, определенных на одном из описанных многообразий. Мы требуем, чтобы эти функции были на рассматриваемом многообразии аналитичны по всем переменным z_i' и z_j''. Далее, мы требуем, чтобы для этих функций при заданном целом положительном m сходился интеграл

$$\int |f(z', z'')|^2 \cdot |\Delta(z', z'')|^{m-4} dz_1' \, dz_2' \, dz_3' \, dz_1'' \, dz_2'' \, dz_3''.$$

(Здесь через dz обозначается произведение $dx\,dy$, если $z = x + iy$.)

Представление задается целым положительным числом m и состоит в том, что каждой матрице $g = \| g_{pq} \|$ четвертого порядка ставится в соответствие преобразование, переводящее функцию $f(z', z'')$ в функцию

$$T_g f(z', z'') = \\ = f(z'\bar{g}, z''\bar{g}) \left[(z_1' g_{14} + z_2' g_{24} + z_3' g_{34} + g_{44}) \cdot (z_1'' g_{14} + z_2'' g_{24} + z_3'' g_{34} + g_{44}) \right]^{-m}.$$

Описанная серия представляет интерес в связи с автоморфными формами многих переменных.

5. Переходим к краткому описанию содержания отдельных параграфов данной статьи.

§ 1—3 носят подготовительный характер. В этих параграфах изучаются некоторые из подгрупп группы $\mathfrak{G}$ комплексных матриц и группы G вещественных матриц. Изучение этих подгрупп оказывается необходимым для описания представлений основных невырожденных серий группы G.

§ 4 содержит описание некоторых многообразий в подгруппе Z комплексных треугольных матриц, транзитивных относительно группы G. При помощи этих многообразий в дальнейшем строятся представления основных серий вещественной группы G.

В § 5 мы доказываем, что пространства функций, на которых реализуются представления основных серий, состоят из функций, аналитических по некоторым из параметров группы G.

Наконец, в § 6 дается построение всех основных невырожденных серий унитарных представлений вещественной группы G.

§ 7 посвящен доказательству неприводимости найденных представлений. В основе этого доказательства лежит та же идея, что и для случая группы комплексных матриц [см. ([1])], однако ее проведение связано с некоторыми дополнительными, специфическими для случая группы вещественных матриц трудностями.

§ 1. Некоторые подгруппы групп $\mathfrak{G}$ и G

Аналитическое описание представлений основных серий связано с рассмотрением некоторых подгрупп комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$ и вещественной унимодулярной группы G.

В дальнейшем мы будем изображать все матрицы как клеточные. Зададимся целым числом $m \leqslant \frac{n}{2}$ и положим $r_1 = \ldots = r_m = 2$, $r_{m+1} = \ldots = r_{m+\tau} = 1$ $(\tau = n - 2m)$. Матрицы g из $\mathfrak{G}$ или из G будем записывать в виде

$$g = \| g_{pq} \| \quad (p, q = 1, \ldots, m + \tau), \tag{1.1}$$

где g_{pq} обозначает матрицу, состоящую из r_p строк и r_q столбцов. В соответствии с такой записью рассмотрим некоторые подгруппы.

1. Подгруппы $\hat{K}'_{m,\tau}$ и $\hat{K}_{m,\tau}$. Подгруппа $\hat{K}'_{m,\tau}$ состоит из матриц $k' = \| k'_{pq} \|$ комплексной группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию

$$k'_{pq} = 0 \quad \text{при} \quad p > q. \tag{1.2}$$

Подгруппа $\hat{K}_{m,\tau}$ состоит из *вещественных* матриц $k = \| k_{pq} \|$, удовлетворяющих условию (1.2).

2. Подгруппы $Z'_{m,\tau}$ и $Z_{m,\tau}$. Подгруппа $Z'_{m,\tau}$ состоит из матриц $\zeta' = \| \zeta'_{pq} \|$ комплексной группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условиям

$$\zeta'_{pq} = 0 \ \text{при} \ p > q \ \text{и} \ \zeta'_{pp} \text{— единичные матрицы.} \tag{1.3}$$

Подгруппа $Z_{m,\tau}$ состоит из *вещественных* матриц $\zeta = \| \zeta_{pq} \|$, удовлетворяющих условиям (1.3).

3. Подгруппы $D'_{m,\tau}$ и $D_{m,\tau}$. Подгруппа $D'_{m,\tau}$ состоит из матриц $d' = \| d'_{pq} \|$ комплексной группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию

$$d'_{pq} = 0 \quad \text{при} \quad p \neq q. \tag{1.4}$$

Подгруппа $D_{m,\tau}$ состоит из *вещественных* матриц $d = \| d_{pq} \|$, удовлетворяющих условию (1.4).

Матрицы d подгруппы $D'_{m,\tau}$ и, соответственно, подгруппы $D_{m,\tau}$ будем для краткости записывать строчкой

$$d = [d_1, d_2, \ldots, d_{m+\tau}], \tag{1.5}$$

где $d_p = d_{pp}$ $(p = 1, \ldots, m+\tau)$.

4. Подгруппы $\hat{D}'_{m,\tau}$ и $\hat{D}_{m,\tau}$. Подгруппа $\hat{D}'_{m,\tau}$ состоит из матриц

$$\hat{d}' = [\hat{d}'_1, \hat{d}'_2, \ldots, \hat{d}'_{m,\tau}]$$

группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию

$$|\det \hat{d}'_p| = 1 \quad (p = 1, 2, \ldots, m+\tau). \tag{1.6}$$

Подгруппа $\hat{D}_{m,\tau}$ состоит из *вещественных* матриц, удовлетворяющих условию (1.6).

5. Подгруппа $\dot{D}_{m,\tau}$. Подгруппа $\dot{D}_{m,\tau}$ состоит из вещественных матриц

$$\dot{d} = [\dot{d}_1, \dot{d}_2, , \ldots, \dot{d}_{m+\tau}],$$

удовлетворяющих условиям:

$$d_{m+1} = \ldots = d_{m+\tau-1} = 1, \quad |d_{m+\tau}| = 1,$$

и матрицы $\dot{d}_p$ $(p \leqslant m)$ имеют вид

$$\dot{d}_p = \begin{pmatrix} h_{11}^{(p)} & 0 \\ h_{21}^{(p)} & h_{22}^{(p)} \end{pmatrix}, \text{ причем } |\det \dot{d}_p| = 1 \text{ и } h_{22}^{(p)} > 0. \tag{1.7}$$

Легко видеть, что правоинвариантная мера в подгруппе $\dot{D}_{m,\tau}$ определяется по формуле

$$d\mu_r(\dot{d}) = d\mu_r(\dot{d}_1)\, d\mu_r(\dot{d}_2) \ldots d\mu_r(\dot{d}_m), \tag{1.8}$$

где $d\mu_r(\dot{d}_p)$ $(p = 1, \ldots, m)$ — правоинвариантные меры в группах матриц $\dot{d}_p$ второго порядка. Эти меры, в свою очередь, выражаются формулами

$$d\mu_r(\dot{d}_p) = dh_{21}^{(p)}\, dh_{22}^{(p)} \tag{1.9}$$

[см. ([2])].

Введем в рассмотрение элемент

$$\dot{z}_0 = [v_1^0, v_2^0, \ldots, v_m^0, 1, \ldots, 1] \tag{1.10}$$

подгруппы треугольных матриц Z, где

$$v_1^0 = v_2^0 = \ldots = v_m^0 = v^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Пусть элементом $\dot{d}$ подгруппы $\dot{D}_{m,\tau}$ элемент $\dot{z}_0$ преобразуется в

$$\dot{z} = \dot{z}_0 \overline{\dot{d}}. \tag{1.12}$$

Очевидно, что

$$\dot{z} = [v_1, v_2, \ldots, v_m, 1, \ldots, 1], \tag{1.13}$$

где

$$v_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_p & 1 \end{pmatrix}, \quad z_p = x_p + iy_p \quad (p = 1, \ldots, m). \tag{1.14}$$

Из равенства (1.12) следует:

$$v_0 \overline{\dot{d}_p} = v_p,$$

в силу чего

$$z_p = \frac{h_{11}^{(p)} i + h_{21}^{(p)}}{h_{22}^{(p)}} = \pm \frac{1}{(h_{22}^{(p)})^2} i + \frac{h_{21}^{(p)}}{h_{22}^{(p)}},$$

т. е.

$$x_p = \frac{h_{21}^{(p)}}{h_{22}^{(p)}}, \quad y_p = \pm \frac{1}{(h_{22}^{(p)})^2}.$$

Отсюда

$$dx_p = \frac{1}{h_{22}^{(p)}} dh_{21}^{(p)} - \frac{h_{21}^{(p)}}{(h_{22}^{(p)})^2} dh_{22}^{(p)},$$

$$dy_p = \mp \frac{2}{(h_{22}^{(p)})^3} dh_{22}^{(p)}.$$

Следовательно,

$$dx_p dy_p = 2 \frac{1}{(h_{22}^{(p)})^4} dh_{21}^{(p)} dh_{22}^{(p)} = 2 \,|\operatorname{Im} z_p|^2 dh_{21}^{(p)} dh_{22}^{(p)}.$$

В силу (1.9), мы получаем

$$d\mu_r(\dot{d}_p) = \frac{1}{2(\operatorname{Im} z_p)^2} dx_p dy_p. \tag{1.15}$$

Таким образом, в параметрах x_p, y_p $(p = 1, 2, \ldots, m)$ правоинвариантная мера в группе $\dot{D}_{m,\tau}$ определяется по формуле

$$d\mu_r(\dot{d}) = \frac{1}{2^m} \prod_{p=1}^{\infty} (\operatorname{Im} z_p)^{-2} \cdot dx_1 dy_1 \ldots dx_p dy_p. \tag{1.16}$$

6. Подгруппа $U_{m,\tau}$. Подгруппа $U_{m,\tau}$ состоит из вещественных матриц

$$u = [u_1, u_2, \ldots, u_m, 1, \ldots, 1],$$

где u_p — ортогональная матрица:

$$u_p = \begin{pmatrix} u_1^{(p)} & -u_2^{(p)} \\ u_2^{(p)} & u_1^{(p)} \end{pmatrix}, \quad (u_1^{(p)})^2 + (u_2^{(p)})^2 = 1. \qquad (1.17)$$

7. Подгруппа $C_{m,\tau}$. Подгруппа $C_{m,\tau}$ состоит из вещественных матриц

$$c = [c_1, c_2, \ldots, c_{m+\tau}],$$

удовлетворяющих условию: при $p \leqslant m$ c_p — диагональные матрицы вида

$$c_p = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_p} \end{pmatrix}, \quad \lambda_p > 0. \qquad (1.18)$$

8. Подгруппы $X_{m,\tau}$ и $\hat{Z}_{m,\tau}$. Подгруппа $X_{m,\tau}$ состоит из вещественных матриц $x = \| x_{pq} \|$, удовлетворяющих условию:

$$x_{pq} = 0 \quad \text{при } p < q \text{ и } x_{pp} \text{ — единичные матрицы.} \qquad (1.19)$$

Легко видеть, что группа $X_{m,\tau}$ обладает двусторонне-инвариантной мерой:

$$d\mu(x) = \prod_{p>q} d\mu(x_{pq}), \qquad (1.20)$$

где $d\mu(x_{pq})$ — произведение дифференциалов всех элементов матрицы x_{pq} [ср. ([1]), формула (11.18)].

Подгруппа $\hat{Z}_{m,\tau}$ состоит из комплексных матриц $\hat{z} = \| z_{pq} \|$, удовлетворяющих условию (1.19).

Индекс τ в обозначениях подгрупп мы будем в дальнейшем, как правило, опускать.

§ 2. Канонические разложения

1. Разложение элементов групп $\mathfrak{G}$ и G. Согласно ([1]), почти всякая матрица g комплексной группы $\mathfrak{G}$ может быть представлена, и притом единственным образом, в виде

$$g = \hat{k}'\hat{z}, \qquad (2.1)$$

где $\hat{k}' \in \hat{K}'_m$, $\hat{z} \in \hat{Z}_m$. Исключение составляют лишь матрицы, у которых хотя бы один из миноров $g_{r_1+r_2+\ldots+r_p+1}$ равен нулю.

Напомним, что через g_p обозначается минор вида

$$g_p = \begin{vmatrix} g_{pp} & \cdots & g_{pn} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{np} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}.$$

То же самое справедливо и в отношении вещественных матриц $g \in G$. Именно, почти всякая вещественная матрица группы G может быть представлена, и притом единственным способом, в виде

$$g = \hat{k}x, \tag{2.1'}$$

где $\hat{k} \in \hat{K}_m$, $x \in X_m$.

В работе ([1]) были получены также аналитические выражения элементов матриц k и x в формуле (2.1) или (2.1′) через элементы матрицы g, которые мы сейчас и приведем.

Будем обозначать через $\begin{pmatrix} p_1 \, p_2 \dots p_m \\ q_1 \, q_2 \dots q_m \end{pmatrix}$ минор матрицы g, составленный из элементов с номерами строк $p_1, p_2, \dots, p_m$ и столбцов $q_1, q_2, \dots q_m$, а через g_m, как и выше, — минор

$$\begin{pmatrix} m & m+1 \dots n \\ m & m+1 \dots n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\hat{k} = \| k_{pq} \|$ и $x = \| x_{pq} \|$. Тогда элементы $k_{pq}^{(\lambda, \mu)}$ матриц k_{pq} можно найти по формулам

$$k_{pq}^{(\lambda, \mu)} = \frac{1}{g_{r_1 + \dots + r_q + 1}} \begin{pmatrix} r_1 + \dots + r_{p-1} + \lambda, \; r_1 + \dots + r_q + 1, \; r_1 + \dots + r_q + 2, \dots, n \\ r_1 + \dots + r_{q-1} + \mu, \; r_1 + \dots + r_q + 1, \; r_1 + \dots + r_q + 2, \dots, n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Определитель Λ_p матрицы k_{pp} выражается равенством

$$\Lambda_p = \frac{g_{r_1 + \dots + r_{p-1} + 1}}{g_{r_1 + \dots + r_p + 1}}, \tag{2.3}$$

а матрицы x_{pq} находятся из выражений

$$x_{pq} = h_{pp}^{-1} h_{pq}, \tag{2.4}$$

где элементы $h_{pq}^{(\lambda, \mu)}$ матриц h_{pq} определяются формулами

$$h_{pq}^{(\lambda, \mu)} = \frac{1}{g_{r_1 + \dots + r_p + 1}} \begin{pmatrix} r_1 + \dots + r_{p-1} + \lambda, \; r_1 + \dots + r_p + 1, \; r_1 + \dots + r_p + 2, \dots, n \\ r_1 + \dots + r_{q-1} + \mu, \; r_1 + \dots + r_p + 1, \; r_1 + \dots + r_p + 2, \dots, n \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

[Ср. ([1]), формулы (12.16), (12.13), (12.14) и (12.15).]

2. Разложение элементов групп $\hat{K}'_m$ и $\hat{K}_m$. Любой элемент $k' = \| k'_{pq} \|$ группы $\hat{K}'_m$ может быть представлен, и притом единственным способом, в виде

$$k' = \zeta' d', \tag{2.6}$$

где $\zeta' \in Z'_m$, $d' \in D'_m$. Элементы матрицы d',

$$d' = [d'_1, d'_2, \dots, d'_{m+\tau}],$$

определяются из формул

$$d'_p = k'_{pp} \quad (p = 1, \ldots, m+\tau). \tag{2.7}$$

Точно так же любой элемент k вещественной группы $\hat{K}_m$ может быть представлен, и притом единственным способом, в виде

$$k = \zeta d, \tag{2.8}$$

где $\zeta \in Z_m$, $d \in D_m$.

В свою очередь, любой элемент d' группы D'_m может быть представлен в виде

$$d' = c\hat{d}', \tag{2.9}$$

где $c \in C_m$, $\hat{d} \in \hat{D}'_m$. Это представление будет единственным, если потребовать дополнительно, чтобы матрица

$$c = [c_1, c_2, \ldots, c_{m+\tau}]$$

удовлетворяла условию:

$$c_p > 0 \quad \text{при} \quad p > m. \tag{2.10}$$

Аналогично, любой элемент d вещественной группы D_m можно представить в виде

$$d = c\hat{d}, \tag{2.11}$$

где $c \in C_m$, $\hat{d} \in \hat{D}_m$. Легко проверить, что такое представление единственно, если потребовать дополнительно, чтобы матрица

$$\hat{d} = [\hat{d}_1, \hat{d}_2, \ldots, \hat{d}_{m+\tau}]$$

удовлетворяла условию:

$$\hat{d}_{m+1} = \ldots = \hat{d}_{m+\tau-1} = 1. \tag{2.12}$$

Согласно ([2]), любая вещественная матрица g_2 второго порядка с детерминантом ± 1 может быть представлена в виде

$$g_2 = u_2 h_2, \tag{2.13}$$

где u_2 — ортогональная матрица, а h_2 — треугольная матрица вида

$$h_2 = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Такое представление будет единственным, если предполагать дополнительно, что $h_{22} > 0$.

Отсюда непосредственно следует, что элементы $\hat{d}$ группы $\hat{D}_m$, удовлетворяющие условию (2.12), можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$\hat{d} = u\dot{d}, \tag{2.14}$$

где $u \in U_m$, $\dot{d} \in \dot{D}_m$.

Таким образом, элементы k группы $\hat{K}_m$ можно представить, и притом единственным способом, в виде

$$k = \zeta c u \dot{d}, \tag{2.15}$$

где $\zeta \in Z_m$, $c \in C_m$, $u \in U_m$ и $\dot{d} \in \dot{D}_m$.

В силу (2.1′) и (2.15), почти все элементы g группы G можно представить, и притом единственным способом, в виде

$$g = \zeta c u \dot{d} x, \tag{2.16}$$

где $\zeta \in Z_m$, $c \in C_m$, $u \in U_m$, $\dot{d} \in D_m$ и $x \in X_m$.

§ 3. Подгруппы $S_{m,\tau}$ и $H_{m,\tau}$. Некоторые интегральные соотношения

Особую роль в дальнейшем будут играть подгруппы $S_{m,\tau}$ и $H_{m,\tau}$ (или, короче, S_m и H_m) вещественной группы G_n, которые мы теперь и рассмотрим.

1. Подгруппа S_m. Рассмотрим в группе G совокупность всех матриц s вида

$$s = \zeta c u \quad (\zeta \in Z_m, c \in C_m, u \in U_m). \tag{3.1}$$

Непосредственно видно, что эти матрицы образуют подгруппу группы G, которую мы и будем обозначать через S_m.

В силу (3.1), элементы $s = \| s_{pq} \|$ группы S_m удовлетворяют условиям:

$$\left. \begin{array}{l} s_{pq} = 0 \text{ при } p > q; \\ \text{при } p \leqslant m \ s_{pp} \text{ — ортогональная матрица, умноженная на скаляр;} \\ \text{при } p > m \ s_{pp} \text{ — произвольное число.} \end{array} \right\} \tag{3.2}$$

Найдем выражение для меры в группе S_m. Положим для краткости

$$\det s_{pp} = \Lambda_p, \quad p = 1, \ldots, m + \tau. \tag{3.3}$$

Тогда

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \ldots \Lambda_{m+\tau} = 1. \tag{3.4}$$

Положим, далее, если $m > 0$,

$$\tilde{s}_{11} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}} s_{11}. \tag{3.5}$$

$\tilde{s}_{11}$ представляет собой ортогональную матрицу (если $m = 0$, то полагаем $\tilde{s}_{11} = 1$). За параметры в s мы примем параметры, определяющие матрицы $\tilde{s}_{11}$ и s_{pq} $(p < q, \ q > 1)$.

Рассмотрим левый сдвиг $s' = s^0 s$ при помощи матрицы $s^0 = \| s^0_{pq} \|$. Он сводится к преобразованию

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{s}'_{11} = \tilde{s}^0_{11} \tilde{s}_{11}, \ s'_{12} = s^0_{11} s_{12} + s^0_{12} s_{22}, \ldots, \quad s'_{1, m+\tau} = \\ \qquad = s^0_{11} s_{1,m+\tau} + \cdots + s^0_{1,m+\tau} s_{m+\tau, m+\tau}, \\ s'_{22} = s^0_{22} s_{22}, \ s'_{23} = s^0_{22} s_{23} + s^0_{23} s_{33}, \ \ldots, \ s'_{2, m+\tau} = \\ \qquad = s^0_{22} s_{2, m+\tau} + \cdots + s^0_{2,m+\tau} s_{m+\tau, m+\tau} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s'_{m+1, m+\tau} = s^0_{m+\tau, m+\tau} s_{m+\tau, m+\tau}. \end{array} \right\} \tag{3.6}$$

Определитель этого преобразования есть

$$\Delta_l^0 = (\Lambda_1^0)^{r_2+r_3+\cdots+r_{m+\tau}} (\Lambda_2^0)^{r_2+r_3+\cdots+r_{m+\tau}} (\Lambda_3^0)^{r_3+\cdots+r_{m+\tau}} (\Lambda_{m+\tau}^0)^{r_{m+\tau}} = \\ = (\Lambda_3^0)^{-r_2} (\Lambda_4^0)^{-r_2-r_3} \ldots (\Lambda_{m+\tau}^0)^{-r_2-r_3-\cdots-r_{m+\tau-1}}.$$

Поэтому левоинвариантная мера в S_m определяется по формуле

$$d\mu_l(s) = \frac{1}{|\Delta_l|} d\mu(\tilde{s}_{11}) \cdot \prod_{p=2}^{m+\tau} d\mu(s_{pp}) \cdot \prod_{p<q} d\mu(s_{pq}). \tag{3.7}$$

Здесь $d\mu(\tilde{s}_{11})$ — инвариантная мера в группе ортогональных матриц $\tilde{s}_{11}$ (при $m=0$ этот множитель отсутствует), $d\mu(s_{pp})$ — инвариантные меры в группах матриц вида s_{pp}, $d\mu(s_{pq})$ — произведение дифференциалов всех элементов матриц s_{pq}. Совершенно аналогично мы найдем, что правоинвариантная мера в S_m определяется по формуле

$$d\mu_r(s) = \frac{1}{|\Delta_r|} d\mu(\tilde{s}_{11}) \cdot \prod_{p=2}^{m+\tau} d\mu(s_{pp}) \prod_{p<q} d\mu(s_{pq}), \tag{3.8}$$

где

$$\Delta_r = (\Lambda_2)^{r_1+r_1} (\Lambda_3)^{r_1+r_2+r_3} \ldots (\Lambda_{m+\tau})^{r_1+r_2+\cdots+r_{m+\tau}}.$$

Полагая

$$\beta(s) = \frac{d\mu_l(s)}{d\mu_r(s)}, \tag{3.9}$$

получим

$$\beta(s) = |\Lambda_2|^{r_1+r_2} |\Lambda_3|^{r_1+2r_2+r_3} \ldots |\Lambda_{m+\tau}|^{r_1+2r_2+\cdots+2r_{m+\tau-1}+r_{m+\tau}}. \tag{3.10}$$

2. Подгруппа H_m. Рассмотрим в группе G совокупность матриц h вида

$$h = \dot{d}x \quad (\dot{d} \in \dot{D}_m,\ x \in X_m). \tag{3.11}$$

Непосредственно видно, что эти матрицы образуют подгруппу группы G, которую мы и будем обозначать через H_m.

В силу (3.11), элементы $h = \| h_{pq} \|$ группы H_m удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } p<q \ h_{pq}=0; \text{ при } p \leqslant m \ h_{pp} \text{ — матрицы второго порядка вида} \\ h_{pp} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(p)} & 0 \\ h_{21}^{(p)} & h_{22}^{(p)} \end{pmatrix}, \text{ где } h_{22}^{(p)} > 0 \text{ и } \det h_{pp} = \pm 1; \\ \text{при } p = m+1, \ldots, m+\tau-1 \ h_{pp} = 1 \text{ и } h_{m+\tau, m+\tau} = \pm 1. \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

Рассуждая так же, как и в случае группы S_m, но учитывая, что $|\det h_{pp}| = 1$ $(p = 1, \ldots, m+\tau)$, мы получаем следующий результат:

Правоинвариантная мера в группе H_m определяется по формуле

$$d\mu_r(h) = \prod_{p=1}^{m} d\mu_r(h_{pp}) \prod_{p<q} d\mu(h_{pq}). \tag{3.13}$$

Здесь $d\mu_r(h_{pp})$ — правоинвариантные меры в группах матриц вида h_{pp}, $d\mu(h_{pq})$ — произведение дифференциалов всех элементов матрицы h_{pq}.

3. Разложение элементов группы G. Согласно (2.16), мы заключаем:

Почти все элементы группы G (за исключением многообразия низшей размерности) могут быть представлены, и притом единственным способом, в виде

$$g = sh, \tag{3.14}$$

где $s \in S_m$, $h \in H_m$.

4. Интегральное соотношение на группе H_m. Рассмотрим функцию $f(h)$, суммируемую на H_m. Так как всякий элемент $h \in H_m$ можно представить единственным образом в виде $h = \dot{d}x$, то $f(h) = f(\dot{d}x)$ является функцией от $\dot{d} \in \dot{D}_m$ и $x \in X_m$.

Мы получим здесь формулу, сводящую интегрирование по H_m к повторному интегрированию по $\dot{D}_m$ и X_m.

Связь между элементами матриц $h = \| h_{pq} \|$, $x = \| x_{pq} \|$ и $\dot{d} = [\dot{d}_1, \dot{d}_2, \ldots, \ldots, \dot{d}_{m+\tau}]$ выражается формулами

$$h_{pp} = \dot{d}_p, \quad h_{pq} = \dot{d}_p x_{pq} \text{ при } p > q.$$

Учитывая, что $|\det \dot{d}_p| = 1$, получаем

$$d\mu_r(h_{pp}) = d\mu_r(\dot{d}_p), \quad d\mu(h_{pq}) = d\mu(x_{pq})$$

(при фиксированном $\dot{d}_p$).

Принимая во внимание формулы (1.8), (1.20) и (3.13) для мер в рассматриваемых группах, имеем:

$$\int f(h)\, d\mu_r(h) = \int d\mu(x) \int f(\dot{d}x)\, d\mu_r(\dot{d}). \tag{3.15}$$

5. Интегральное соотношение на группе G. В группе G существует двусторонне-инвариантная мера $d\mu(g)$. Рассмотрим функцию $f(g)$, суммируемую на G. Так как почти всякий элемент $g \in G$ можно представить единственным образом в виде $g = sh$, то $f(g) = f(sh)$ является функцией от $s \in S_m$ и $h \in H_m$.

Мы получим здесь формулу, сводящую интегрирование по G к повторному интегрированию по S_m и H_m.

Поскольку равенство $g = sh$ устанавливает аналитическую зависимость между параметрами, через которые выражается мера в группе G, и соответствующими параметрами в S_m и H_m, то должна иметь место формула

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int d\mu_r(h) \int f(sh)\, \omega(s, h)\, d\mu_l(s), \tag{3.16}$$

где $\omega(s, h)$ — некоторая положительная функция переменных s и h.

Легко убедиться, однако, что функция $\omega(s, h)$ фактически является константой c, зависящей от нормировки мер $d\mu(g)$, $d\mu_l(s)$ и $d\mu_r(h)$.

В самом деле, в силу инвариантности меры $d\mu(g)$,

$$\int f(g)\,d\mu(g) = \int f(s_0 g)\,d\mu(g).$$

Отсюда, в силу (3.16) и левой инвариантности меры $d\mu_l(s)$, имеем:

$$\int d\mu_r(h) \int f(sh)\,\omega(s, h)\,d\mu_l(s) = \int d\mu_r(h) \int f(s_0 sh)\,\omega(s, h)\,d\mu_l(s) =$$

$$= \int d\mu_r(h) \int f(sh)\,\omega(s_0^{-1}s, h)\,d\mu_l(s).$$

Ввиду произвольности функции $f(sh)$, это означает, что

$$\omega(s, h) = \omega(s_0^{-1}s, h),$$

т. е. функция $\omega(s, h)$ не зависит от s. Аналогично, в силу инвариантности меры $d\mu(g)$ и *правой* инвариантности меры $d\mu_r(h)$, получим из формулы (3.16), что

$$\omega(s, h) = \omega(s, hh_0^{-1}),$$

т. е. функция $\omega(s, h)$ не зависит от h. Тем самым доказано, что $\omega(s, h)$ есть константа c, и, следовательно,

$$\int f(g)\,d\mu(g) = c \int d\mu_r(h) \int f(sh)\,d\mu_l(s). \tag{3.17}$$

6. Формула преобразования меры в H_m. Пользуясь формулой (3.17), мы найдем теперь, как преобразуется мера $d\mu_r(h)$ при преобразовании $h_1 = h\overline{g}$.

Покажем предварительно, что в группе S_m имеет место формула

$$\int f(ss_1)\,d\mu_l(s) = \beta^{-1}(s_1) \int f(s)\,d\mu_l(s). \tag{3.18}$$

В самом деле, переходя от левоинвариантной меры $d\mu_l(s)$ к правоинвариантной мере $d\mu_r(s)$ в соответствии с формулой (3.9), имеем:

$$\int f(ss_1)\,d\mu_l(s) = \int f(ss_1)\,\beta(s)\,d\mu_r(s) = \int f(s)\,\beta(ss_1^{-1})\,d\mu_r(s).$$

Но функция $\beta(s)$, определяемая формулой (3.10), обладает следующими свойствами:

$$\beta(s_1 s_2) = \beta(s_1)\,\beta(s_2), \quad \beta(s^{-1}) = \beta^{-1}(s). \tag{3.19}$$

Поэтому

$$\int f(s)\,\beta(ss_1^{-1})\,d\mu_r(s) =$$

$$= \int f(s)\,\beta^{-1}(s_1)\,\beta(s)\,d\mu_r(s) = \beta^{-1}(s_1) \int f(s_1)\,d\mu_l(s),$$

и равенство (3.18) тем самым доказано.

Подставляя в формулу (3.17) функцию вида $x(g) = f(h)\varphi(s)$, мы получим:

$$\int x(g)\,d\mu(g) = c\int f(h)\,d\mu_r(h)\int \varphi(s)\,d\mu_l(s). \tag{3.20}$$

Пусть g_0 — произвольный элемент из G. Положим

$$hg_0 = s_1h_1, \text{ следовательно, } h\overline{g_0} = h_1. \tag{3.21}$$

Тогда $gg_0 = shg_0 = ss_1h_1$ и $x(gg_0) = f(h\overline{g_0})\varphi(ss_1)$. В силу инвариантности меры $d\mu(g)$, имеем:

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \int x(gg_0)\,d\mu(g),$$

откуда, в силу (3.17) и (3.18),

$$\int f(h)\,d\mu_r(h)\int \varphi(s)\,d\mu_l(s) = \int f(h\overline{g_0})\,d\mu_r(h)\int \varphi(ss_1)\,d\mu_l(s) =$$
$$= \int f(h\overline{g_0})\,\beta^{-1}(s_1)\,d\mu_r(h)\int \varphi(s)\,d\mu_l(s).$$

Следовательно,

$$\int f(h)\,d\mu_r(h) = \int f(h\overline{g_0})\,\beta^{-1}(s_1)\,d\mu_r(h), \tag{3.22}$$

где элемент s_1 определяется из равенства

$$hg_0 = s_1h_1. \tag{3.23}$$

Переписывая равенство (3.22) в виде

$$\int f(h\overline{g_0})\,d\mu_r(h\overline{g_0}) = \int f(h\overline{g_0})\beta^{-1}(s_1)\,d\mu_r(h),$$

мы получаем искомую формулу преобразования меры в H_m:

$$\frac{d\mu_r(h\overline{g_0})}{d\mu_r(h)} = \beta^{-1}(s_1). \tag{3.24}$$

§ 4. Некоторые транзитивные многообразия в Z

Рассмотрим подгруппу Z комплексных треугольных матриц $z = \| z_{ij} \|$, где $z_{ii} = 1$ и $z_{ij} = 0$ при $i < j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Согласно ([1]), почти всякий элемент g комплексной группы $\mathfrak{G}$ можно представить, и притом единственным способом, в виде произведения $g = kz$, где $z \in Z$, а матрица k имеет нули под своей главной диагональю. Ввиду этого, каждый элемент g группы $\mathfrak{G}$ задает преобразование $z \to z_1 = \overline{zg}$ группы Z, где z_1 определяется из соотношения $zg = kz_1$.

В этом параграфе мы опишем некоторые многообразия в подгруппе Z, транзитивные относительно преобразований Z элементами вещественной группы G.

1. Многообразия $\dot{Z}_{m,\tau}$, $\dot{Z}^{+}_{m,\tau}$ и $\dot{Z}^{-}_{m,\tau}$. Обозначим через $\dot{Z}_{m,\tau}$ совокупность матриц $\dot{z}$ из $D'_{m,\tau}$ вида

$$\dot{z} = [v_1, v_2, \ldots, v_m, 1, \ldots, 1], \tag{4.1}$$

где v_p — матрицы второго порядка вида

$$v_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_p & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} z_p \neq 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, m). \tag{4.2}$$

При $m = \frac{n}{2}$ мы введем также в рассмотрение совокупности $\dot{Z}^{+}_{m,0}$ и $\dot{Z}^{-}_{m,0}$. $\dot{Z}^{+}_{m,0}$ есть совокупность матриц $\dot{z}^{+}$ из $\dot{Z}_{m,0}$ вида

$$\dot{z}^{+} = [v_1, v_2, \ldots, v_m], \tag{4.1a}$$

где v_p — матрицы вида (4.2), удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 \ldots \operatorname{Im} z_m > 0. \tag{4.3}$$

Аналогично, $\dot{Z}^{-}_{m,0}$ есть совокупность матриц $\dot{z}^{-}$ из $\dot{Z}_{m,0}$ вида (4.1a), где v_p — матрицы второго порядка вида (4.2), удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 \ldots \operatorname{Im} z_m < 0. \tag{4.3a}$$

При $m \neq \frac{n}{2}$ элементы совокупности $\dot{Z}_{m,\tau}$ могут быть переведены друг в друга преобразованиями группы Z при помощи элементов $g \in G$. При $m = \frac{n}{2}$ это же утверждение справедливо в отношении совокупностей $\dot{Z}^{+}_{m,0}$ и $\dot{Z}^{-}_{m,0}$.

Доказательство. Если v_p и v'_p — две матрицы второго порядка вида (4.2), то, как известно, существует такая неособая вещественная матрица второго порядка g_p, что

$$v_p g_p = k_p v'_p, \tag{4.4}$$

где k_p — матрица вида

$$k_p = \begin{pmatrix} k_{11}^{(p)} & k_{12}^{(p)} \\ 0 & k_{22}^{(p)} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

т. е. $v_p \overline{g}_p = v'_p$. При этом, если числа z_p и z'_p принадлежат одной и той же полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ или $\operatorname{Im} z < 0$, то $\det g_p > 0$. В противном случае $\det g_p < 0$. Мы можем всегда считать, что $|\det g_p| = 1$. Отсюда легко усмотреть, что при $m \neq \frac{n}{2}$ матрица (4.1) преобразуется в матрицу

$$\dot{z}' = [v'_1, v'_2, \ldots, v'_m, 1, \ldots, 1]$$

при помощи вещественной унимодулярной матрицы $g \in D_{m,\tau}$ вида

$$g = [g_1, g_2, \ldots, g_m, c_{m+1}, \ldots, c_{m+\tau}], \tag{4.6}$$

где $c_{m+1}, \ldots, c_{m+\tau}$ — произвольные числа, удовлетворяющие условию

$$c_{m+1} \ldots c_{m+\tau} \cdot \det g_1 \det g_2 \ldots \det g_m = 1.$$

При $m = \frac{n}{2}$ соответствующая матрица g,

$$g = [g_1, \ g_2, \ldots, g_m], \tag{4.6a}$$

будет унимодулярной тогда и только тогда, когда знаки выражений

$$\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 \cdots \operatorname{Im} z_m$$

для матриц $\dot{z}$ и $\dot{z}'$ совпадают, т. е. тогда и только тогда, когда матрицы $\dot{z}$ и $\dot{z}'$ принадлежат одновременно $\dot{Z}^+_{m,0}$ или $\dot{Z}^-_{m,0}$.

Определение. При $m \neq \frac{n}{2}$ обозначим через $Z_{m,\tau}$ то многообразие в Z, транзитивное относительно преобразований элементами $g \in G$, которое содержит в себе многообразие $\dot{Z}_{m,\tau}$. При четном n обозначим через $Z^+_{n/2,\,0}$ и $Z^-_{n/2,0}$ транзитивные многообразия в Z, содержащие в себе соответственно многообразия $\dot{Z}^+_{n/2,\,0}$ и $\dot{Z}^-_{n/2,\,0}$.

2. Аналитическое описание многообразий $Z_{m,\tau}$, $Z^+_{n/2,\,0}$ и $Z^-_{n/2,\,0}$. *Всякую матрицу z из $Z_{m,\tau}\left(m \neq \frac{n}{2}\right)$ можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$z = \dot{z}x \quad (\dot{z} \in \dot{Z}_{m,\tau}, \ x \in X_{m,\tau}). \tag{4.7}$$

При $m = \frac{n}{2}$ всякую матрицу z^+ из $Z^+_{m,0}$ (z^- из $Z^-_{m,0}$) можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$z^+ = \dot{z}^+ x \quad (z^- = \dot{z}^- x), \tag{4.7a}$$

где $\dot{z}^+ \in \dot{Z}^+_{m,0}$ ($\dot{z}^- \in \dot{Z}^-_{m,0}$) и $x \in X_{m,0}$. Обратно, все матрицы, представимые указанными способами, принадлежат соответствующим транзитивным многообразиям *.

Доказательство. Остановимся на случае $m \neq \frac{n}{2}$. Прежде всего, матрицы вида $\dot{z}x$, где $\dot{z} \in \dot{Z}_m$ и $x \in X_m$, принадлежат многообразию Z_m. Это вытекает непосредственно из транзитивности многообразия Z_m и того очевидного факта, что элементы $\dot{z}$ и $\dot{z}x$ принадлежат одному и тому же транзитивному многообразию.

Обратно, зафиксируем в многообразии $\dot{Z}_m$ матрицу

$$z_0 = [v_1^0, \ldots, v_m^0, \ 1, \ldots, 1], \tag{4.8}$$

где v_p^0 — матрицы вида

$$v_p^0 = v_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad p = 1, \ldots, m. \tag{4.9}$$

* В обозначениях многообразий мы будем, как правило, индекс τ опускать.

Покажем, что любая матрица $z_0\bar{g}$, где $g \in G$ (если только таковая определена в Z), представима в виде $z_0\bar{g} = \dot{z}x$. Прежде всего, почти всякая матрица $g \in G$ может быть представлена в виде $g = \hat{k}x$, где $\hat{k} \in \hat{K}_m$, $x \in X_m$. Исключение представляют лишь те матрицы g, у которых хотя бы один из миноров $g_{\overline{r_1+\cdots+r_p+1}}$ (см. § 2) равен нулю. Поскольку, по предположению, матрица $z_0\bar{g}$ определена, миноры $(z_0g)_s$ матрицы z_0g $(s = 2, \ldots, n)$ должны быть отличны от нуля. Заметим, что матрица z_0g получается из матрицы g прибавлением к каждой строке с номером $2p$ $(p = 1, \ldots, m)$ предыдущей строки, помноженной на i. Отсюда следует, что

$$g_{r_1+\cdots+r_p+1} = (z_0g)_{r_1+\cdots+r_p+1},$$

а потому все миноры $g_{r_1+\cdots+r_p+1}$ отличны от нуля. Итак, матрица g представима в виде $g = \hat{k}x$.

Рассмотрим матрицу $\hat{k} = \| k_{pq} \|$. Матрицы k_{pp} $(p = 1, \ldots, m)$ — неособые, а потому матрицы $v_p^0 k_{pp}$ можно представить в виде

$$v_p^0 k_{pp} = k_p v_p,$$

где k_p и v_p — матрицы вида

$$k_p = \begin{pmatrix} k_{11}^{(p)} & k_{12}^{(p)} \\ 0 & k_{22}^{(p)} \end{pmatrix}, \quad v_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_p & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} z_p \neq 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что матрицу $z_0\hat{k}$ можно представить в виде $z_0\hat{k} = k\dot{z}$, где $k \in K$, $\dot{z} \in \dot{Z}_m$. Таким образом, $z_0g = k\dot{z}x$, т. е.

$$z_0\bar{g} = \dot{z}x.$$

Единственность представления вида $z = \dot{z}x$ вытекает непосредственно из того факта, что группа D'_m, содержащая в себе все многообразие $\dot{Z}_m$, имеет в пересечении с группой X_m лишь единичную матрицу.

Все приведенные рассуждения сохраняются и для многообразий Z_m^+ и Z_m^-. В случае многообразия Z_m нам следует исходить из элемента z_0 вида (4.8), где

$$v_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \text{ и } v_p^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (p = 2, \ldots, m). \tag{4.9a}$$

3. Описание многообразия Z_m при помощи подгруппы H_m. Согласно результатам § 3, всякий элемент $g \in G$, представимый в виде

$$g = \hat{k}x \quad (k \in \hat{K}_m,\ x \in X_m),$$

может быть также представлен, и притом единственным образом, в виде $g = sh$, где $s \in S_m$, $h \in H_m$. В свою очередь, всякий элемент $h \in H_m$ может быть представлен, и притом единственным способом, в виде $h = \dot{d}x$.

Будем исходить из фиксированного элемента z_0 многообразия Z_m, определяемого формулами (4.8) и (4.9).

Элементу h из H_m сопоставим элемент $z_0\overline{h}$ из Z_m:

$$h \to z_0\overline{h}. \tag{4.10}$$

Легко видеть, что формула (4.10) представляет собой взаимно однозначное отображение многообразия H_m на Z_m. В самом деле, если $h = \dot{d}x$, то, очевидно,

$$\dot{d}x \to (z_0\overline{\dot{d}})\,x. \tag{4.10a}$$

В то же время соответствие $\dot{d} \to z_0\overline{\dot{d}}$ представляет собой взаимно однозначное отображение подгруппы $\dot{D}_m$ на $\dot{Z}$ (ср. § 1, п. 5).

Покажем, что преобразования $h \to h\overline{g}$ группы H_m элементами g группы G:

$$h\overline{g} \text{ есть такой элемент } h_1 \text{ из } H_m, \text{ что } hg = sh_1, \tag{4.11}$$

совпадают с преобразованиями в Z_m. Иными словами, соответствующие друг другу элементы из H_m и Z_m переводятся любым $g \in G$ снова в соответствующие элементы.

Заметим, что единичному элементу e в H_m соответствует в Z_m элемент z_0. Наше утверждение будет полностью доказано, если мы покажем, что элементу $e\overline{g}$ из H_m соответствует элемент $z_0\overline{g}$ из Z_m, где g — произвольный элемент из G.

Пусть $g = sh$. Тогда, очевидно, $e\overline{g} = h$. С другой стороны,

$$\overline{z_0 g} = (z_0\overline{s})\,\overline{h}.$$

Но матрицу s можно представить в виде $s = \zeta c u$, где $\zeta \in Z_m$, $c \in C_m$, $u \in U_m$. Легко видеть, что $z_0\overline{\zeta} = z_0$, $z_0\overline{c} = z_0$ и $z_0\overline{u} = z_0$. Поэтому $z_0\overline{s} = z_0$, следовательно, $z_0\overline{g} = z_0\overline{h}$, и наше утверждение доказано.

Отметим, что S_m представляет собой стационарную подгруппу для элемента z_0.

При $m = \frac{n}{2}$ каждое из многообразий Z_m^+ и Z_m^- может быть описано аналогичным образом при помощи соответствующей подгруппы H_m.

Операторы представлений мы будем реализовать в пространствах функций $f(\dot{z}x) = f(z_1, \ldots, z_m, x)$ на определенных выше многообразиях Z_m.

§ 5. Аналитичность функций $f(z_1, \ldots, z_m, x)$

Согласно ([1]), представления комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$ строятся в пространстве функций, заданных в многообразии Z' правых классов смежности группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K комплексных треугольных матриц. Аналогичным образом они могут задаваться в пространстве классов смежности группы $\mathfrak{G}$ по любой подгруппе K_1, сопряженной с группой K.

В случае вещественной унимодулярной группы G приходится уже делать различие между подгруппой K треугольных матриц и сопряжен-

ными с ней подгруппами $K' = g_1^{-1} K g_1$ комплексной группы $\mathfrak{G}$. В самом деле, пересечения этих подгрупп с группой G вещественных матриц могут быть различными, а потому мы должны приходить к различным представлениям группы G вещественных матриц.

Представления, отвечающие заданной подгруппе $K' = g_1^{-1} K g_1$, строятся в пространстве функций на элементах многообразия правых классов смежности группы G по ее пересечению $G \cap K'$ с подгруппой K'. Однако это пространство должно состоять, вообще говоря, не из всех функций, а лишь из функций, аналитических по некоторым из переменных.

Объясним появление здесь аналитических функций. Вернемся сперва к комплексной группе $\mathfrak{G}$. Пространство функций, постоянных на правых классах смежности группы $\mathfrak{G}$ по ее подгруппе K, можно задать еще и тем условием, что эти функции постоянны при бесконечно малых сдвигах, отвечающих умножению элементов группы $\mathfrak{G}$ слева на инфинитезимальные элементы из K. Так как бесконечно малые сдвиги задаются операторами X_i, то эти функции удовлетворяют уравнениям

$$X_i f = 0, \tag{5.1}$$

где X_i — операторы Ли, отвечающие инфинитезимальным элементам из K.

Перейдем теперь к вещественной группе. Будем рассматривать функции $f(g)$ на группе G вещественных матриц. Пусть K_B — подгруппа вещественных треугольных матриц и $K' = g_1^{-1} K_B g_1$ — некоторая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ комплексных матриц, сопряженная с K_B. Предположим сперва, что матрица g_1, при помощи которой определена подгруппа K', вещественна. Тогда K' является подгруппой вещественной группы G. Потребуем, как и в случае комплексной группы, чтобы функции $f(g)$ были постоянны при бесконечно малых сдвигах, отвечающих умножению элементов группы G слева на инфинитезимальные элементы из K'. Это требование выразится, как и в случае комплексной группы, в форме некоторой системы линейных дифференциальных уравнений $X_i f = 0$, которой должны удовлетворять функции $f(g)$. Коэффициенты этих уравнений будут аналитически выражаться через элементы матрицы g_1. Вследствие этого мы можем формально написать операторы Ли также и в том случае, когда матрица g_1 уже не является вещественной, и потребовать, чтобы функции $f(g)$ удовлетворяли соответствующей системе дифференциальных уравнений $X_i f = 0$.

В случае, когда матрица g_1 вещественна, получаемая система дифференциальных уравнений является, как и в случае комплексной группы, гиперболической. Ее характеристиками будут как раз правые классы смежности вещественной группы G по подгруппе K'. Если же матрица g_1 комплексна, то соответствующая система уравнений для $f(g)$ уже не будет гиперболической. Решениями ее будут функции, постоянные на классах смежности группы G по соответствующей подгруппе (а именно, по подгруппе $G \cap g_1^{-1} K g_1$, где K — подгруппа комплексных треугольных матриц) и аналитические по некоторым из параметров группы. Тем самым, постоянство функций по некоторым параметрам группы заменяется при переходе от комплексной группы к вещественной требованием аналитичности.

В дальнейшем мы будем рассматривать подгруппу

$$K' = z_0^{-1} K_B z_0,$$

где z_0 — элемент многообразия Z_m, определенный формулами (4.8) и (4.9). В этом параграфе мы покажем, что решениями соответствующей системы дифференциальных уравнений будут функции, постоянные на правых классах смежности группы G по подгруппе $z_0^{-1} K z_0 \cap G$, где K — группа комплексных треугольных матриц, и аналитические по некоторым параметрам. Чтобы выделить эти параметры, мы заметим, что подгруппа $z_0^{-1} K z_0 \cap G$ является стационарной подгруппой для элемента z_0 многообразия Z_m. Поэтому многообразие правых классов смежности группы G по этой подгруппе можно отождествить с многообразием Z_m и задавать функции на этом последнем многообразии. Мы покажем здесь, что эти функции должны быть аналитичны как раз по каждому из комплексных параметров $z_1, z_2, \ldots, z_m$ многообразия $Z_{\overline{m}}$ (см. § 4).

Опишем сперва элементы группы K_B вещественных треугольных матриц. Поскольку эта группа является подгруппой группы $\hat{K}_m$ клеточных треугольных матриц, ее элементы, согласно § 2, могут быть представлены (и притом единственным образом) в виде

$$k = \zeta c \hat{d}, \tag{5.2}$$

где $\zeta \in Z_m$, $c = [c_1, c_2, \ldots, c_{m+\tau}] \in C_m$, [а матрица $\hat{d} = [\hat{d}_1, \hat{d}_2, \ldots, \hat{d}_{m+\tau}] \in \hat{D}_m$ и удовлетворяет условию (2.12):

$$\hat{d}_{m+1} = \cdots = \hat{d}_{m+\tau-1} = 1.$$

При этом матрицы $\hat{d}_p \, (p = 1, \ldots, m)$ имеют вид:

$$\hat{d}_p = \begin{pmatrix} k_{11}^{(p)} & k_{12}^{(p)} \\ 0 & k_{22}^{(p)} \end{pmatrix}, \quad |\det \hat{d}_p| = 1. \tag{5.3}$$

Установим, какой вид имеет матрица $z_0^{-1} k z_0$. Заметим, прежде всего что $z_0^{-1} \zeta z_0$ есть матрица, принадлежащая группе Z'_m комплексных клеточных треугольных матриц, и что $z_0^{-1} c z_0 = c$. Путем непосредственного подсчета мы устанавливаем, далее, что

$$z_0^{-1} \hat{d} z_0 = \overline{d} = [\overline{d}_1, \overline{d}_2, \ldots, \overline{d}_{m+\tau}], \tag{5.4}$$

где

$$\overline{d}_p = \begin{pmatrix} k_{11}^{(p)} + i k_{12}^{(p)} & k_{12}^{(p)} \\ k_{12}^{(p)} + i\,(k_{22}^{(p)} - k_{11}^{(p)}) & k_{22}^{(p)} - i k_{12}^{(p)} \end{pmatrix} \quad (p \leqslant m). \tag{5.5}$$

Ввиду этого мы заключаем:

Всякий элемент k' подгруппы K'' может быть представлен в виде

$$k' = \zeta' c \overline{d}, \tag{5.6}$$

где ζ' — элемент группы $z_0^{-1} Z_m z_0$, являющейся подгруппой группы Z'_m $c \in C_m$, а $\overline{d} \in D'_m$ и определяется формулами (5.4) и (5.5).

Согласно § 2, почти всякий элемент g вещественной группы G может быть представлен, и притом единственным образом, в виде

$$g = \zeta c \hat{d} x, \tag{5.7}$$

где $\zeta \in Z_m$, $c \in C_m$, $x \in X_m$, а $\hat{d} = [\hat{d}_1, \hat{d}_2, \ldots, \hat{d}_{m+\tau}] \in \hat{D}_m$ и удовлетворяет условию (2.12):

$$\hat{d}_{m+1} = \cdots = \hat{d}_{m+\tau-1} = 1.$$

Поэтому всякую функцию, заданную на группе G, мы можем рассматривать как функцию от $\zeta \in Z_m$, $c \in C_m$, $\hat{d} \in D_m$, $x \in X_m$ и писать:

$$f(g) = f(\zeta c \hat{d} x). \tag{5.8}$$

Чтобы составить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет функция $f(g)$, мы должны рассмотреть инфинитезимальные элементы подгрупп $z_0^{-1} Z_m z_0$, C_m и подгруппы $\overline{D}$ элементов $\overline{d}$, определяемых формулами (5.4) и (5.5). Легко видеть, однако, что система дифференциальных уравнений $X_i^{(Z)} f = 0$, отвечающая инфинитезимальным элементам из $z_0^{-1} Z_m z_0$, эквивалентна системе дифференциальных уравнений, отвечающей инфинитезимальным элементам из самой подгруппы Z_m. Поэтому решениями этой системы уравнений будут функции, постоянные в классах смежности группы G по Z_m. Вследствие этого, мы можем написать:

$$f(\zeta c \hat{d} x) = f(c \hat{d} x). \tag{5.9}$$

Аналогично, рассмотрение дифференциальных уравнений $X_i^{(C)} f = 0$, отвечающих инфинитезимальным элементам из C_m, показывает, что функции $f(c \hat{d} x)$ не зависят фактически и от $c \in C_m$, а потому

$$f(c \hat{d} x) = f(\hat{d} x). \tag{5.10}$$

Рассмотрим теперь инфинитезимальные элементы из $\overline{D}$ и составим отвечающую им систему дифференциальных уравнений для функций f.

Полагая в (5.5)

$$k_{11}^{(p)} = 1 + dt_1^{(p)}, \quad k_{12}^{(p)} = dt_2^{(p)},$$

мы получим инфинитезимальный элемент

$$\delta \overline{d} = [\delta \overline{d}_1, \delta \overline{d}_2, \ldots, \delta \overline{d}_m, 0, \ldots, 0], \tag{5.11}$$

где матрицы $\delta \overline{d}_p$ $(p = 1, \ldots, m)$ имеют вид

$$\delta \overline{d}_p = \begin{pmatrix} dt_1^{(p)} + i dt_2^{(p)} & dt_2^{(p)} \\ dt_2^{(p)} - 2i dt_1^{(p)} & -dt_1^{(p)} - i dt_2^{(p)} \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Пусть

$$\hat{d} = [\hat{d}_1, \hat{d}_2, \ldots, \hat{d}_{m+\tau}], \tag{5.13}$$

где

$$\hat{d}_p = \begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ \gamma_p & \delta_p \end{pmatrix} \quad (p \leqslant m). \tag{5.14}$$

Тогда

$$\delta \overline{d} \cdot \hat{d} = [\delta \overline{d}_1 \cdot \hat{d}_1, \delta \overline{d}_2 \cdot \hat{d}_2, \ldots, \delta \overline{d}_m \cdot \hat{d}_m, 0, \ldots, 0], \tag{5.15}$$

где

$$\delta \overline{d}_p \cdot \hat{d}_p =$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_p dt_1^{(p)} + (\gamma_p + i\alpha_p)\, dt_2^{(p)} & \beta_p dt_1^{(p)} + (\delta_p + i\beta_p)\, dt_2^{(p)} \\ -(\gamma_p + 2i\alpha_p)\, dt_1^{(p)} - i\,(\gamma_p + i\alpha_p)\, dt_2^{(p)} & -(\delta_p + 2i\beta_p)\, dt_1^{(p)} - i\,(\delta_p + i\beta_p)\, dt_2^{(p)} \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

Операторы Ли, отвечающие инфинитезимальным сдвигам $dt_1^{(p)}$ и $dt_2^{(p)}$, имеют поэтому следующий вид:

$$X_1^{(p)} f = \frac{\partial f}{\partial \alpha_p} \alpha_p + \frac{\partial f}{\partial \beta_p} \beta_p + \frac{\partial f}{\partial \gamma_p} (-\gamma_p - 2i\alpha_p) + \frac{\partial f}{\partial \delta_p} (-\delta_p - 2i\beta_p),$$

$$X_2^{(p)} f = \frac{\partial f}{\partial \alpha_p} (\gamma_p + i\alpha_p) + \frac{\partial f}{\partial \beta_p} (\delta_p + i\beta_p) - i \frac{\partial f}{\partial \gamma_p} (\gamma_p + i\alpha_p) - i \frac{\partial f}{\partial \delta_p} (\delta_p + i\beta_p).$$

Мы требуем, чтобы функции $f(\hat{dx})$ удовлетворяли дифференциальным уравнениям $X_1^{(p)} f = 0$ и $X_2^{(p)} f = 0$, т. е. чтобы имели место равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_p} \alpha_p + \frac{\partial f}{\partial \beta_p} \beta_p + \frac{\partial f}{\partial \gamma_p} (-\gamma_p - 2i\alpha_p) + \frac{\partial f}{\partial \delta_p} (-\delta_p - 2i\beta_p) = 0 \tag{5.17}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_p} (\gamma_p + i\alpha_p) + \frac{\partial f}{\partial \beta_p} (\delta_p + i\beta_p) - i \frac{\partial f}{\partial \gamma_p} (\gamma_p + i\alpha_p) - i \frac{\partial f}{\partial \delta_p} (\delta_p + i\beta_p) = 0, \tag{5.18}$$

где $p = 1, 2, \ldots, m$. Вычитая из уравнения (5.18) уравнение (5.17), умноженное на i, мы получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_p} \gamma_p + \frac{\partial f}{\partial \beta_p} \delta_p - \frac{\partial f}{\partial \gamma_p} \alpha_p - \frac{\partial f}{\partial \delta_p} \beta_p = 0. \tag{5.19}$$

Система уравнений характеристик для уравнения (5.19) имеет вид:

$$\frac{d\alpha_p}{\gamma_p} = \frac{d\beta_p}{\delta_p} = \frac{d\gamma_p}{-\alpha_p} = \frac{d\delta_p}{-\beta_p}. \tag{5.20}$$

Легко найти первые интегралы этой системы:

$$\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p = C_1, \quad \alpha_p \beta_p + \gamma_p \delta_p = C_2 \quad \text{и} \quad \beta_p^2 + \delta_p^2 = C_3. \tag{5.21}$$

Поскольку, кроме того, элементы α_p, β_p, γ_p, δ_p матрицы $\hat{d}_p$ удовлетворяют условию

$$\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p = \pm 1,$$

то, в силу уравнений (5.19), функции $f(\hat{d}x)$ являются функциями переменных

$$x_p = \frac{\alpha_p \beta_p + \gamma_p \delta_p}{\beta_p^2 + \delta_p^2}, \quad y_p = \frac{\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p}{\beta_p^2 + \delta_p^2} \tag{5.22}$$

и элементов матрицы x.

Выясним, что представляют собой переменные x_p и y_p. Положим для этого

$$z = z_0 \bar{\hat{d}}. \tag{5.23}$$

Тогда, как легко видеть,

$$z = [v_1, v_2, \ldots, v_m, 1, \ldots, 1] \in \dot{Z}_m, \tag{5.24}$$

где

$$v_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_p & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

причем

$$z_p = \frac{i\alpha_p + \gamma_p}{i\beta_p + \delta_p} = \frac{\alpha_p \beta_p + \gamma_p \delta_p}{\beta_p^2 + \delta_p^2} + i\,\frac{\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p}{\beta_p^2 + \delta_p^2} = x_p + iy_p. \tag{5.26}$$

Таким образом, числа $z_p = x_p + iy_p$ представляют собой параметры, отвечающие элементу $\hat{d}x$ в многообразии Z_m.

Представим, в соответствии с (2.14), элемент $\hat{d}$ в виде $\hat{d} = u\dot{d}$, где $u \in U_m$, $\dot{d} \in \dot{D}_m$. Поскольку $z_0 \bar{u} = z_0$, а потому $z_0 \hat{d} = z_0 \dot{d}$, функция $f(\hat{d}x) = f(u\dot{d}x)$ не зависит от u.

Мы заключаем:

Функции $f(g)$, определенные на G и удовлетворяющие дифференциальным уравнениям $X_i^{(Z)} f = 0$, $X_i^{(C)} f = 0$ и (5.19), являются функциями, постоянными на правых классах смежности группы G по группе S_m. Согласно результатам § 4, их можно рассматривать как функции

$$f(\dot{z}x) = f(z_1, z_2, \ldots, z_m, x),$$

определенные на многообразии Z_m.

Обратимся теперь к уравнениям (5.18). Мы покажем, что *из уравнений (5.18) вытекает аналитичность функций $f(z_1, z_2, \ldots, z_m, x)$ по каждому комплексному переменному z_p $(p = 1, \ldots, m)$ при фиксированных значениях остальных переменных.*

Для этого введем в рассмотрение операторы $\partial / \partial z$ и $\partial / \partial \bar{z}$. Если z — комплексное переменное $z = x + iy$, то, согласно определению,

$$\partial / \partial z = {}^1/_2(\partial / \partial x - i\partial / \partial y), \quad \partial / \partial \bar{z} = {}^1/_2(\partial / \partial x + i\partial / \partial y). \tag{5.27}$$

Если $f(z)$ — функция комплексного переменного z, то условием ее аналитичности будет

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{5.28}$$

Мы должны, таким образом, показать, что из уравнений (5.18) следует

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_p}=0 \quad (p=1, \ldots, m). \tag{5.29}$$

Умножая уравнение (5.18) на i и группируя его члены, мы можем переписать это уравнение в виде

$$\left(i \frac{\partial f}{\partial \alpha_p}+\frac{\partial f}{\partial \gamma_p}\right)(i\alpha_p+\gamma_p)+\left(i \frac{\partial f}{\partial \beta_p}+\frac{\partial f}{\partial \delta_p}\right)(i\beta_p+\delta_p)=0. \tag{5.30}$$

Если положить

$$i\alpha_p+\gamma_p=z_p', \quad i\beta_p+\delta_p=z_p'', \tag{5.31}$$

то уравнение (5.30) примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_p'} z_p'+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_p''} z_p''=0. \tag{5.32}$$

Нам остается показать, что левая часть этого уравнения пропорциональна $\partial f / \partial \bar{z}_p$. Но это вытекает непосредственно из следующего утверждения:

Если $f(z)$ — функция комплексного переменного $z=x+iy$ и $z=z_1/z_2$, $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, то

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} z_1+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_2} z_2=2i \frac{z_2}{\bar{z}_2} \cdot \operatorname{Im} z \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \tag{5.33}$$

Все рассуждения этого параграфа остаются в силе и при $m=\frac{n}{2}$. Для того чтобы придти к многообразию $Z_{n/2}^-$, мы должны лишь исходить из элемента z_0, определяемого формулами (4.8) и (4.9а).

Отметим, что при $m \neq \frac{n}{2}$ функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_m, x)$ определены относительно каждого z_p (при фиксированных значениях остальных переменных) как в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z_p>0$, так и в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z_p<0$. В силу только что доказанного, эти функции аналитичны в каждой из указанных полуплоскостей.

В случае $m=\frac{n}{2}$ функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_m, x)$ определены относительно каждого z_p (при фиксированных значениях остальных переменных) лишь в одной из полуплоскостей $\operatorname{Im} z_p>0$ и $\operatorname{Im} z_p<0$, определяемой в соответствии со знаком выражения

$$\operatorname{Im} z_1 \ldots \operatorname{Im} z_{p-1} \operatorname{Im} z_{p+1} \ldots \operatorname{Im} z_m.$$

В этой полуплоскости эти функции аналитичны относительно z_p.

§ 6. Описание представлений основных невырожденных серий

Представления основной невырожденной серии $d_{m,\tau}$ мы будем строить в пространстве $\mathfrak{H}_m$ функций $f(z_1, z_2, \ldots, z_m, x)$, задаваемых на многообразии Z_m и аналитичных, в соответствии с § 5, относительно параметров $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

В силу § 4, многообразие Z_m можно отождествить с группой H_m и писать

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_m, x) = f(h) \quad (h \in H_m).$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{H}_m$ будем задавать в виде

$$(f_1, f_2) = \int f_1(h) \overline{f_2(h)} \, \omega(h) \, d\mu_r(h), \tag{6.1}$$

где $\omega(h)$ — положительная функция от h, подлежащая в дальнейшем определению.

Представление состоит в том, что каждому элементу g группы G мы ставим в соответствие унитарный оператор T_g в пространстве $\mathfrak{H}_m$, задаваемый формулой

$$T_g f(h) = f(h\overline{g}) \, \alpha(h, g). \tag{6.2}$$

Здесь $\alpha(h, g)$ — фиксированная функция, задающая представление, которую мы будем в дальнейшем определять. $h\overline{g}$ обозначает, как обычно, тот элемент h_1 из H_m, в который преобразуется элемент h при помощи элемента g, т. е. $hg = s_1 h_1$, где $s_1 \in S_m$.

Условие $T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$ приводит нас, как и в (1), к функциональному уравнению для $\alpha(h, g)$:

$$\alpha(h, g_1 g_2) = \alpha(h\overline{g}_1, g_2) \, \alpha(h, g_1). \tag{6.3}$$

Положим

$$\alpha(e, g) = \alpha(g), \tag{6.4}$$

где e — единичный элемент группы G. Полагая в (6.3) $h = e$, $g_1 = h$, $g_2 = g$, получаем:

$$\alpha(hg) = \alpha(h, g) \, \alpha(h),$$

т. е.

$$\alpha(h, g) = \frac{\alpha(hg)}{\alpha(h)}. \tag{6.5}$$

Полагая в (6.3) $h = e$, $g_1 = s \in S_m$, $g_2 = g$ и помня, что $e\overline{s} = e$, получаем:

$$\alpha(sg) = \alpha(s) \, \alpha(g). \tag{6.6}$$

Найдем условие, которому должна удовлетворять функция $\alpha(h, g)$ для того, чтобы операторы представления T_g были унитарными, т. е. чтобы для любой функции $f(h)$ из $\mathfrak{H}_m$ имело место равенство

$$(T_g f, T_g f) = (f, f). \tag{6.7}$$

В соответствии с (6.1) и (6.2), это равенство можно переписать в виде

$$\int |\alpha(h, g)|^2 |f(h\bar{g})|^2 \omega(h)\, d\mu_r(h) = \int |f(h_1)|^2 \omega(h_1)\, d\mu_r(h_1).$$

Сделаем во втором интеграле замену переменной $h_1 = h\bar{g}$. В силу формулы (3.22), имеем:

$$\int |f(h_1)|^2 \omega(h_1)\, d\mu_r(h_1) = \int |f(h\bar{g})|^2 \omega(h\bar{g})\, \beta^{-1}(s_1)\, d\mu_r(h),$$

где элемент $s_1 \in S_m$ определяется из равенства

$$hg = s_1 h_1, \tag{6.8}$$

а функция $\beta(s)$ определяется формулами (3.10) и (3.3).

Таким образом,

$$\int |f(h\bar{g})|^2 |\alpha(h, g)|^2 \omega(h)\, d\mu_r(h) = \int |f(h\bar{g})|^2 \omega(h\bar{g})\, \beta^{-1}(s_1)\, d\mu_r(h).$$

Ввиду произвольности функции $f(h)$, мы получаем отсюда:

$$|\alpha(h, g)|^2 \omega(h) = \omega(h\bar{g})\, \beta^{-1}(s_1),$$

или

$$|\alpha(h, g)| = \beta^{-\frac{1}{2}}(s_1) \sqrt{\frac{\omega(h\bar{g})}{\omega(h)}}. \tag{6.9}$$

Условие (6.9) будет искомым условием унитарности операторов T_g.

Полагая в (6.9) $h = e$ и принимая, что

$$g = sh, \tag{6.10}$$

получаем

$$|\alpha(g)| = |\alpha(sh)| = \beta^{-\frac{1}{2}}(s) \sqrt{\frac{\omega(h)}{\omega(e)}}. \tag{6.11}$$

В силу формулы (6.6), это равенство можно переписать в виде

$$|\alpha(s)|\,|\alpha(h)| = \beta^{-\frac{1}{2}}(s) \sqrt{\frac{\omega(h)}{\omega(e)}}. \tag{6.12}$$

Отсюда

$$|\alpha(h)| = \sqrt{\frac{\omega(h)}{\omega(e)}} \tag{6.13}$$

и

$$|\alpha(s)| = \beta^{-\frac{1}{2}}(s). \tag{6.14}$$

Положим

$$\alpha(s) = \beta^{-\frac{1}{2}}(s)\, \chi(s). \tag{6.15}$$

В силу (6.14), имеем

$$|\chi(s)| = 1. \tag{6.16}$$

Кроме того, поскольку

$$\alpha(s_1s_2)=\alpha(s_1)\alpha(s_2) \text{ и } \beta(s_1s_2)=\beta(s_1)\beta(s_2) \quad (s_1, s_2 \in S_m),$$

мы имеем:

$$\chi(s_1s_2)=\chi(s_1)\chi(s_3) \quad (s_1, s_2 \in S_m). \tag{6.17}$$

Из (6.16) и (6.17) вытекает, что $\chi(s)$ есть характер группы S_m. Представим элемент s группы S_m в виде $s=\zeta cu$, где $\zeta \in Z_m$, $c \in C_m$, $u \in U_m$ (см. § 3). Тогда

$$\chi(s)=\chi(\zeta)\chi(cu).$$

Но для всех элементов ζ из Z_m $\chi(\zeta)=1$. Таким образом,

$$\chi(\zeta cu)=\chi(cu)=\chi(c)\chi(u). \tag{6.18}$$

Найдем теперь выражения для характеров $\chi(c)$ и $\chi(u)$. Элементы c группы C_m имеют вид

$$c=[c_1, c_2, \ldots, c_{m+\tau}], \tag{6.19}$$

где c_p при $p \leqslant m$ — матрицы второго порядка вида

$$c_p=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_p} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_p} \end{pmatrix}, \quad \lambda_p>0, \tag{6.20}$$

и $c_p=\lambda_p$ при $p=m+1, \ldots, m+\tau$. Отсюда вытекает, что при $m \neq \frac{n}{2}$ группа C_m изоморфна прямому произведению m мультипликативных групп положительных вещественных чисел и $\tau-1$ мультипликативных групп всех вещественных чисел. При $m=\frac{n}{2}$ группа C_m изоморфна прямому произведению мультипликативных групп положительных вещественных чисел. Следовательно, характеры на группе C_m имеют вид:

$$\chi(c)=|\lambda_1|^{i\rho_1}|\lambda_2|^{i\rho_2}\ldots|\lambda_{m+\tau-1}|^{i\rho_{m+\tau-1}}\left(\frac{\lambda_{m+1}}{|\lambda_{m+1}|}\right)^{\varepsilon_{m+1}}\ldots\left(\frac{\lambda_{m+\tau-1}}{|\lambda_{m\times\tau-1}|}\right)^{\varepsilon_{m+\tau-1}} \tag{6.21}$$

Здесь $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m+\tau-1}$ — произвольные вещественные числа, числа ε_p $(p=m+1, \ldots, m+\tau-1)$ равны 0 или 1 и в соответствии с этим множитель $(\lambda_p/|\lambda_p|)^{\varepsilon_p}$ равен 1 или $\operatorname{sign}\lambda_p$.

Элементы u группы U_m имеют вид:

$$u=[u_1, u_2, \ldots, u_m, 1, \ldots, 1], \tag{6.22}$$

где u_p — ортогональные матрицы второго порядка:

$$u_p=\begin{pmatrix} u_1^{(p)} & -u_2^{(p)} \\ u_2^{(p)} & u_1^{(p)} \end{pmatrix}, \quad (u_1^{(p)})^2+(u_2^{(p)})=1. \tag{6.23}$$

Отсюда вытекает, что группа U_m изоморфна прямому произведению m групп ортогональных матриц второго порядка. Следовательно, характеры на группе U_m имеют вид:

$$\chi(u) = (u_1^{(1)} + iu_2^{(1)})^{n_1} (u_1^{(2)} + iu_2^{(2)})^{n_2} \ldots (u_1^{(m)} + iu_2^{(m)})^{n_m}, \tag{6.24}$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — целые числа.

Вернемся к выражению для функции $\alpha(h, g)$. Положим

$$hg = s_1 h_1. \tag{6.8}$$

Тогда, в силу (6.5) и (6.6), имеем

$$\alpha(h, g) = \frac{\alpha(s_1 h_1)}{\alpha(h)} = \frac{\alpha(h_1)}{\alpha(h)} \alpha(s_1),$$

откуда, в силу (6.15),

$$\alpha(h, g) = \frac{\alpha(h_1)}{\alpha(h)} \beta^{-\frac{1}{2}}(s_1) \chi(s_1). \tag{6.25}$$

Найдем аналитическое выражение функции $\alpha(h, g)$ в параметрах многообразия Z_m.

Представим элемент h в виде

$$h = \dot{d} x, \tag{6.26}$$

где $\dot{d} \in \dot{D}_m$, $x \in X_m$. Почти всякий элемент xg можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$xg = \hat{k} x_1, \tag{6.27}$$

где $\hat{k} \in \hat{K}_m$, $x_1 \in X_m$.

Элементы матриц $\hat{k}$ и x_1 в формуле (6.27) представляют собой дробно-рациональные функции от элементов матрицы x. Их выражения могут быть найдены по формулам § 2, п. 1, где вместо матрицы g нужно брать матрицу $g_1 = xg$.

Пусть

$$\hat{k} = \| k_{pq} \|. \tag{6.28}$$

Положим

$$k_{pp} = \begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ \gamma_p & \delta_p \end{pmatrix} \quad (p = 1, \ldots, m) \tag{6.29}$$

и

$$\det k_{pp} = \Lambda_p \quad (p = 1, \ldots, m + \tau). \tag{6.30}$$

Величины α_p, β_p, γ_p, δ_p и Λ_p выражаются через элементы матрицы $g_1 = xg$ по формулам § 2, п. 1.

Обозначим через d матрицу

$$d = [d_1, d_2, \ldots, d_{m+\tau}], \quad \text{где } d_p = k_{pp}. \tag{6.31}$$

Тогда $\hat{k} = \zeta_1 d$, где $\zeta_1 = \hat{k}d^{-1} \in Z_m$.

Представим, далее, матрицу s_1 из (6.8) в виде

$$s_1 = \zeta c u \quad (\zeta \in Z_m,\ c \in C_m,\ u \in U_m), \tag{6.32}$$

где c имеет вид (6.19) — (6.20), а u имеет вид (6.22) — (6.23).

Наконец, элемент $h_1 = h\bar{g}$ представим в виде

$$h_1 = \dot{d}'x' \quad (\dot{d}' \in \dot{D}_m,\ x' \in X_m). \tag{6.33}$$

Из (6.8), (6.26) и (6.27) мы получаем:

$$\dot{d}\hat{k}x_1 = s_1 h_1,$$

откуда

$$\dot{d}\zeta_1 d x_1 = \zeta c u \dot{d}' x'$$

или

$$\zeta_2 \dot{d} d x_1 = \zeta c u \dot{d}' x', \tag{6.34}$$

где $\zeta_2 = \dot{d}\zeta_1 \dot{d}^{-1} \in Z_m$. В силу единственности разложения вида $g = \zeta d x$, где $\zeta \in Z_m$, $d \in D_m$, $x \in X_m$, мы находим из (6.34):

$$x' = x_1 \tag{6.35}$$

и

$$\dot{d}d = cu\dot{d}'. \tag{6.36}$$

Из равенства (6.36) вытекает, что

$$|\det c_p| = |\det d_p| = |\Lambda_p| \quad \text{при } p = 1, \ldots, m \tag{6.37}$$

и

$$c_p = d_p = \Lambda_p \quad \text{при } p = m+1, \ldots, m+\tau-1. \tag{6.37a}$$

В силу формулы (6.21) мы получаем поэтому

$$\chi(c) = |\Lambda_1|^{i\rho_1} |\Lambda_2|^{i\rho_2} \ldots |\Lambda_{m+\tau-1}|^{i\rho_{m+\tau-1}} \left(\frac{\Lambda_{m+1}}{|\Lambda_{m+1}|}\right)^{\varepsilon_{m+1}} \ldots \left(\frac{\Lambda_{m+\tau-1}}{|\Lambda_{m+\tau-1}|}\right)^{\varepsilon_{m+\tau-1}} \tag{6.38}$$

Рассмотрим элемент z_0 многообразия Z_m [см. формулы (4.8) и (4.9)]. Элементу $h = \dot{d}x$ отвечает в многообразии Z_m элемент $\dot{z}x$, а элементу $h = \dot{d}'x_1$ — элемент $\dot{z}'x_1$, где

$$\dot{z} = z_0 \bar{\dot{d}}, \quad \dot{z}' = z_0 \bar{\dot{d}}' \text{ — элементы из } \dot{Z}_m. \tag{6.39}$$

Положим

$$\dot{z} = [v_1, v_2, \ldots, v_m, 1, \ldots, 1], \quad \dot{z}' = [v_1', v_2', \ldots, v_m', 1, \ldots, 1], \tag{6.40}$$

где

$$v_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_p & 1 \end{pmatrix}, \quad v_p' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_p' & 1 \end{pmatrix}, \quad p = 1, \ldots, m, \tag{6.41}$$

и пусть

$$\dot{d} = [\dot{d}_1, \dot{d}_2, \ldots, d_{m+\tau}], \quad \dot{d}' = [\dot{d}_1', \dot{d}_2', \ldots, \dot{d}_{m+\tau}']. \tag{6.42}$$

Формулы (6.39) означают тогда, что

$$v_p = v_0\overline{\dot{d}_p}, \quad v_p' = v_0\overline{\dot{d}'_p},$$

т. е.

$$v_0\dot{d}_p = k_p v_p, \quad v_0\dot{d}'_p = k_p' v_p' \quad (p = 1, \ldots, m), \tag{6.43}$$

где $v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ и k_p, k_p' — треугольные матрицы вида

$$k_p = \begin{pmatrix} k_{11}^{(p)} & k_{12}^{(p)} \\ 0 & k_{22}^{(p)} \end{pmatrix}, \quad k_p' = \begin{pmatrix} k_{11}'^{(p)} & k_{12}'^{(p)} \\ 0 & k_{22}'^{(p)} \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

Непосредственный подсчет дает нам:

$$k_{22}^{(p)} = |\operatorname{Im} z_p|^{-\frac{1}{2}}, \quad k_{22}'^{(p)} = |\operatorname{Im} z_p'|^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.45}$$

Формула (6.36) означает, что

$$\dot{d}_p d_p = c_p u_p \dot{d}'_p \quad (p = 1, \ldots, m). \tag{6.46}$$

Отсюда следует, что

$$v_0\overline{\dot{d}_p d_p} = v_0\overline{c_p u_p \dot{d}'_p}.$$

В силу того факта, что $v_0\overline{c_p u_p} = v_0$, и в силу формул (6.43), имеем:

$$v_p \bar{d}_p = v_p'. \tag{6.47}$$

Формула (6.47) дает нам выражение z_p' через z_p и элементы α_p, β_p, γ_p, δ_p матрицы d_p:

$$z_p' = \frac{\alpha_p z_p + \gamma_p}{\beta_p z_p + \delta_p}. \tag{6.48}$$

С другой стороны, эта формула означает, что

$$v_p\, d_p = \widetilde{k}_p v_p', \tag{6.49}$$

где $\widetilde{k}_p$ — треугольная матрица вида

$$\widetilde{k}_p = \begin{pmatrix} \widetilde{k}_{11}^{(p)} & \widetilde{k}_{12}^{(p)} \\ 0 & \widetilde{k}_{22}^{(p)} \end{pmatrix}. \tag{6.50}$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\widetilde{k}_{22}^{(p)} = \beta_p z_p + \delta_p. \tag{6.51}$$

Умножая равенство (6.46) слева на v_0 и используя перестановочность v_0 с c, получаем:

$$v_0 \dot{d}_p d_p = c_p v_0 u_p \dot{d}'_p$$

или

$$v_0 \dot{d}_p d_p = c_p (v_0 u_p v_0^{-1})\, (v_0 \dot{d}'_p),$$

откуда, в силу (6.43),

$$k_p v_p d_p = c_p' (v_0 u_p v_0^{-1})\, k_p' v_p'.$$

Подставляя сюда вместо матрицы $v_p\, d_p$ ее выражение из (6.49) и сокращая затем на v_p', получаем:

$$k_p \widetilde{k}_p = c_p (v_0\, u_p v_0^{-1})\, k_p'. \tag{6.52}$$

Матрица $v_0 u_p v_0^{-1}$ есть треугольная матрица того же вида, что и матрицы k_p, k_p' и $\widetilde{k}_p$. Как легко проверить простым вычислением,

$$(v_0 u_p v_0^{-1})_{22} = u_1^{(p)} - i u_2^{(p)}.$$

Равенство (6.52) дает:

$$k_{22}^{(p)} \widetilde{k}_{22}^{(p)} = \sqrt{\lambda_p}\, (v_0 u_p v_0^{-1})_{22}\, k_{22}'^{(p)}$$

или, в соответствии с найденными выше значениями этих элементов,

$$|\operatorname{Im} z_p|^{-\frac{1}{2}} (\beta_p z_p + \delta_p) = \sqrt{|\Lambda_p|}\, (u_1^{(p)} - i u_2^{(p)})\, |\operatorname{Im} z_p'|^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда получаем:

$$u_1^{(p)} - i u_2^{(p)} = \left| \frac{\operatorname{Im} z_p}{\operatorname{Im} z_p'} \right|^{-\frac{1}{2}} |\Lambda_p|^{-\frac{1}{2}} (\beta_p z_p + \delta_p). \tag{6.53}$$

Формула (6.24) для характера $\chi(u)$ принимает поэтому вид:

$$\chi(u) = \prod_{p=1}^{m} \left| \frac{\operatorname{Im} z_p}{\operatorname{Im} z_p'} \right|^{n_p/2} \prod_{p=1}^{m} (\beta_p z_p + \delta_p)^{-n_p}\, |\Lambda_p|^{n_p/2}. \tag{6.54}$$

В соответствии с формулой (6.25) и принимая во внимание, что

$$\chi(s_1) = \chi(c)\,\chi(u),$$

где $\chi(c)$ и $\chi(u)$ выражаются формулами (6.38) и (6.54), мы получаем следующее выражение для функции $\alpha(h, g) = \alpha(\dot{z}x, g)$:

$$\alpha(\dot{z}x, g) = \frac{\alpha(\dot{z}' x_1)}{\alpha(\dot{z}x)} \prod_{p=1}^{m} \left| \frac{\operatorname{Im} z_p}{\operatorname{Im} z'_p} \right|^{n_p/2} \cdot \prod_{p=1}^{m} (\beta_p z_p + \delta_p)^{-n_p} |\Lambda_p|^{n_p/2} \cdot$$
$$\cdot \prod_{p=1}^{m+\tau-1} |\Lambda_p|^{i\rho_p} \cdot \prod_{p=m+1}^{m+\tau-1} \left(\frac{\Lambda_p}{|\Lambda_p|} \right)^{\varepsilon_p} \beta^{-\frac{1}{2}}(s_1), \tag{6.55}$$

где, в соответствии с (3.10),

$$\beta(s_1) = |\Lambda_2|^{r_1+r_2} |\Lambda_3|^{r_1+2r_2+r_3} \ldots |\Lambda_{m+\tau}|^{r_1+2r_2+\ldots+2r_{m+\tau-1}+r_{m+\tau}}. \tag{6.56}$$

Согласно § 5, функция $\alpha(\dot{z}x, g)$ должна быть аналитической функцией относительно $z_1, z_2, \ldots, z_m$, а потому выражение для $\alpha(\dot{z}x, g)$ не должно содержать множителя

$$\prod_{p=1}^{m} \left| \frac{\operatorname{Im} z_p}{\operatorname{Im} z'_p} \right|^{n_p/2}.$$

Поэтому мы полагаем

$$\alpha(\dot{z}x) = \prod_{p=1}^{m} |\operatorname{Im} z_p|^{n_p/2}. \tag{6.57}$$

Формула для $\alpha(\dot{z}x, g)$ примет тогда следующий окончательный вид:

$$\alpha(\dot{z}x, g) = \prod_{p=1}^{m} (\beta_p z_p + \delta_p)^{-n_p} |\Lambda_p|^{n_p/2} \prod_{p=1}^{m+\tau-1} |\Lambda_p|^{i\rho_p} \prod_{p=m+1}^{m+\tau-1} \left(\frac{\Lambda_p}{|\Lambda_p|} \right)^{\varepsilon_p} \beta^{-\frac{1}{2}}(s_1). \tag{6.58}$$

Остается определить *скалярное произведение* в пространстве $\mathfrak{H}_m$.

В силу формул (6.13) и (6.57), имеем:

$$\frac{\omega(h)}{\omega(\varepsilon)} = \prod_{p=1}^{m} |\operatorname{Im} z_p|^{n_p}$$

или

$$\omega(h) = c \prod_{p=1}^{m} |\operatorname{Im} z_p|^{n_p}, \tag{6.59}$$

и формула скалярного произведения принимает вид:

$$(f_1, f_2) = c \int f_1(h) \overline{f_2(h)} \prod_{p=1}^{m} |\operatorname{Im} z_p|^{n_p} d\mu_r(h). \tag{6.60}$$

Согласно формулам (3.15) и (1.16), выражение для правоинвариантной меры в параметрах многообразия Z_m имеет вид

$$d\mu_r(h) = \frac{1}{2^m} \prod_{p=1}^{m} (\operatorname{Im} z_p)^{-2} d\dot{z}\, d\mu(x),$$

где $d\dot{z} = dx_1\, dy_1 \ldots dx_m\, dy_m\, (z_p = x_p + iy_p)$. Поэтому, полагая

$$f(h) = f(z_1, z_2, \ldots, z_m, x)$$

и подбирая подходящий множитель, мы получим следующую окончательную формулу для скалярного произведения в пространстве $\mathfrak{H}_m$:

$$(f_1, f_2) = c \int f_1(z_1, \ldots, z_m, x) \overline{f_2(z_1, \ldots, z_m, x)} \prod_{p=1}^{m} |\operatorname{Im} z_p|^{n_p - 2} d\dot{z}\, d\mu(x), \tag{6.61}$$

где

$$\begin{gathered} z_p = x_p + iy_p \quad (p = 1, \ldots, m), \\ d\dot{z} = dx_1\, dy_1 \ldots dx_m\, dy_m. \end{gathered} \tag{6.62}$$

Как известно, вместо степенной функции $x^\lambda\, (x \geqslant 0)$ в анализе более естественно рассматривать функцию $x^\lambda / \Gamma(\lambda + 1)$. При $\lambda = -1$ эта функция превращается в дельта-функцию $\delta(x)$. В соответствии с этим мы примем в формуле (6.61)

$$\frac{1}{c} = \prod_{p=1}^{m} \Gamma(n_p - 1).$$

Формула для скалярного произведения в пространстве $\mathfrak{H}$ примет тогда вид:

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z_1, \ldots, z_m, x) \overline{f_2(z, \ldots, z_m, x)} \prod_{p=1}^{m} \frac{|\operatorname{Im} z_p|^{n_p - 2}}{\Gamma(n_p - 1)} d\dot{z}\, d\mu(x). \tag{6.61a}$$

Из соображений сходимости интеграла мы заключаем, что все числа n_p должны быть положительными. В случае, когда одно или несколько чисел n_p равны единице, соответствующие множители $|\operatorname{Im} z_p|^{n_p-2} / \Gamma(n_p - 1)$ в (6.61а) следует рассматривать как дельта-функции, или, что то же самое, рассматривать интеграл в (6.61) как предел при $n_p \to 1$.

Все проведенные выше рассуждения справедливы также при $m=\frac{n}{2}$ и приводят нас к сериям $d^{+}_{n/2}$ и $d^{-}_{n/2}$, реализуемым на функциях в многообразиях $Z^{+}_{n/2}$ и $Z^{-}_{n/2}$.

Сформулируем основной результат:

Основные невырожденные унитарные представления вещественной унимодулярной группы G n-го порядка распадаются при нечетном n на $\frac{n+1}{2}$ *серий* $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{\frac{n-1}{2}}$, *а при четном n — на* $\frac{n}{2}+2$ *серий* $d_0, d_1, \ldots, d_{n/2-1}, d^{+}_{n/2}, d^{-}_{n/2}$.

Представления каждой серии d_m *при* $m \neq \frac{n}{2}$ *определяются системой m целых положительных чисел* $n_1, n_2, \ldots, n_m$, *системой* $m+\tau-1$ *вещественных чисел* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m+\tau-1}$ $(2m+\tau=n)$ *и* $\tau-1$ *индексами* $\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+2}, \ldots, \varepsilon_{m+\tau-1}$, *которые могут принимать значение* 0 *или* 1.

Представление, отвечающее заданной системе чисел n_p, ρ_q *и* ε_s $(p=1, \ldots, m;\ q=1, \ldots, m+\tau-1;\ s=m+1, \ldots, m+\tau-1)$, *строится в пространстве функций* $f(\dot{z}x)=f(z_1, z_2, \ldots, z_m, x)$, *задаваемых на транзитивном многообразии* Z_m, *которые относительно каждого переменного* z_p *(при фиксированных значениях остальных переменных) определены и аналитичны отдельно в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z_p>0$ *и в нижней полуплоскости* $\operatorname{Im} z_p<0$.

Скалярное произведение в этом пространстве задается формулой (6.61):

$$(f_1, f_2)=\int f_1(z_1, \ldots, z_m, x)\,\overline{f_2(z_1, \ldots, z_m, x)}\,\cdot$$

$$\cdot \prod_{p=1}^{m} \frac{|\operatorname{Im} z_p|^{n_p-2}}{\Gamma(n_p-1)}\, d\mu(x)\cdot dx_1\, dy_1 \ldots dx_m\, dy_m,$$

где

$$z_p=x_p+iy \quad (p=1, \ldots, m).$$

Операторы представления T_g *задаются формулой*

$$T_g f(z_1, z_2, \ldots, z_m, x)=f(z'_1, z'_2, \ldots, z'_m, x_1)\,\alpha(\dot{z}x, g), \tag{6.63}$$

где

$$z'_p=\frac{\alpha_p z_p+\gamma_p}{\beta_p z_p+\delta_p} \quad (p=1, \ldots, m),$$

$$\alpha(\dot{z}x, g)=\prod_{p=1}^{m}(\beta_p z_p+\delta_p)^{-n_p}|\Lambda_p|^{n_p/2}\cdot \prod_{p=1}^{m+\tau-1}|\Lambda_p|^{i\rho_p}\prod_{p=m+1}^{m+\tau-1}\left(\frac{\Lambda_p}{|\Lambda_p|}\right)^{\varepsilon_p}\cdot$$

$$\cdot\{|\Lambda_2|^{r_1+r_2}|\Lambda_3|^{r_1+2r_2+r_3}\ldots|\Lambda_{m+\tau}|^{r_1+2r_2+\cdots+2r_{m+\tau-1}+r_{m+\tau}}\}^{-\frac{1}{2}} \tag{6.64}$$

$$(r_p=2 \text{ при } p\leqslant m \text{ и } 1 \text{ при } p>m),$$

или, что то же самое,

$$\alpha(\dot{z}x, g) = \prod_{p=1}^{m}\left[\frac{\beta_p z_p + \delta_p}{\sqrt{|\alpha_p\delta_p - \beta_p\gamma_p|}}\right]^{-n_p} \cdot \prod_{p=1}^{m+\tau-1} |\Lambda_p|^{i\rho_p} \cdot \prod_{p=m+1}^{m+\tau-1}\left(\frac{\Lambda_p}{|\Lambda_p|}\right)^{\varepsilon_p} \cdot$$

$$\cdot |\Lambda_1|^{n-\frac{3}{2}} |\Lambda_2|^{n-2-\frac{3}{2}} \ldots |\Lambda_m|^{\tau+\frac{1}{2}} |\Lambda_{m+1}|^{\tau-1} |\Lambda_{m+2}|^{\tau-2} \ldots |\Lambda_{m+\tau-1}|.$$

Здесь элементы матрицы x_1, *величины* α_p, β_p, γ_p, δ_p $(p = 1, \ldots, m)$, *а также* Λ_p $(p = 1, \ldots, m+\tau)$, *являются дробно-рациональными функциями элементов матрицы* x *и могут быть найдены по формулам, приведенным в* § 2, *п.* 1.

При $m = \frac{n}{2}$ *представления серий* d_m^+ *и* d_m^- *определяются системой* m *целых положительных чисел* $n_1, n_2, \ldots, n_m$ *и* $m-1$ *вещественных чисел* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m+\tau-1}$.

Представление каждой из этих серий, отвечающее системе чисел n_p *и* ρ_q $(p = 1, \ldots, m;\ q = 1, \ldots, m-1)$, *строится в пространстве функций*

$$f(zx) = f(z_1 z_2, \ldots, z_m, x),$$

заданных на транзитивном многообразии Z_m^+ *или, соответственно,* Z_m^-. *Эти функции относительно каждого переменного* z_p *(при фиксированных значениях остальных переменных) определены и аналитичны в верхней или нижней полуплоскости, выбор которой определяется знаком выражения*

$$\operatorname{Im} z_1 \ldots \operatorname{Im} z_{p-1} \operatorname{Im} z_{p+1} \ldots \operatorname{Im} z_m.$$

Скалярное произведение имеет такой же вид, как и при $m \neq \frac{n}{2}$.

Операторы представления T_g *задаются, подобно случаю* $m \neq \frac{n}{2}$, *формулой*

$$T_g f(z_1, z_2, \ldots, z_m, x) = f(z_1', z_2', \ldots, z_m', x_1)\, \alpha(\dot{z}x, g), \tag{6.65}$$

где

$$z_p' = \frac{\alpha_p z_p + \gamma_p}{\beta_p z_p + \delta_p} \quad (p = 1, \ldots, m),$$

$$\alpha(\dot{z}x, g) =$$

$$= \prod_{p=1}^{m} (\beta_p z_p + \delta_p)^{-n_p} |\Lambda_p|^{n_p/2} \prod_{p=1}^{m+\tau-1} |\Lambda_p|^{i\rho_p} \cdot |\Lambda_2|^{-2} |\Lambda_3|^{-4} \ldots |\Lambda_m|^{-(n-2)}, \tag{6.66}$$

или, что то же самое,

$$\alpha(\dot{z}x, g) =$$
$$= \prod_{p=1}^{m} \left[\frac{\beta_p z_p + \delta_p}{\sqrt{|\alpha_p\delta_p - \beta_p\gamma_p|}} \right]^{-n_p} \cdot \prod_{p=1}^{m-1} |\Lambda_p|^{i\rho_p} \cdot |\Lambda_1|^{n-2} |\Lambda_2|^{n-4} \cdots |\Lambda_{m-1}|^2.$$

§ 7. Неприводимость представлений основных невырожденных серий

1. В этом параграфе мы будем, наряду с группой G_n, рассматривать также группу $\widetilde{G}_n$ всех вещественных матриц n-го порядка с детерминантом ± 1.

Легко видеть, что при $\tau > 0$ формулы (6.63), (6.64) определяют, когда g пробегает группу $\widetilde{G}_n$, унитарное представление этой группы, реализуемое в том же функциональном пространстве, что и соответствующее представление группы G_n.

В случае $\tau = 0$ многообразия $Z^+_{n/2}$ и $Z^-_{n/2}$ не транзитивны относительно преобразований элементами группы $\widetilde{G}_n$. Однако их сумма

$$Z_{n/2} = Z^+_{n/2} + Z^-_{n/2}$$

является транзитивным многообразием. Рассмотрим представление группы $\widetilde{G}_n$, реализуемое в пространстве функций

$$f(\dot{z}x) = f(z_1, \ldots, z_m, x),$$

задаваемых на этом транзитивном многообразии $Z_{n/2}$, которые аналитичны относительно каждого переменного z_p, при фиксированных значениях остальных переменных, отдельно в верхней и в нижней полуплоскости. Скалярное произведение в этом пространстве зададим формулой (6.61):

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z_1, \ldots, z_m, x) \overline{f_2(z_1, \ldots, z_m, x)} \cdot$$
$$\cdot \prod_{p=1}^{m} \frac{|\operatorname{Im} z_p|^{n_p-2}}{\Gamma(n_p-1)} \, d\mu(x) \, dx_1 \, dy_1 \ldots dx_m \, dy_m,$$

где интеграл берется по всему многообразию $Z_{n/2}$. Операторы представления T_g зададим теми же формулами (6.65), (6.66), что и в случае группы G_n. Легко видеть, что описанное представление является унитарным.

Таким образом, мы получаем основные невырожденные серии унитарных представлений группы $\widetilde{G}_n$, которые, как и в случае группы G_n, будут в дальнейшем обозначаться соответственно через d_m $\left(m = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$.

Основным результатом этого параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Все представления основных невырожденных серий группы $\widetilde{G}_n$ вещественных матриц с детерминантом ± 1 неприводимы.*

При $m = \frac{n}{2}$ представление группы G_n вещественных матриц с детерминантом $+1$, определяемое представлением группы $\widetilde{G}_n$ из серии $d_{n/2}$, распадается на представления из серий $d^+_{n/2}$ и $d^-_{n/2}$ с теми же номерами n_p и ρ_q, что и исходное представление группы $\widetilde{G}_n$. Ввиду этого, из теоремы 1 непосредственно вытекает неприводимость представлений группы G_n из серий $d^+_{n/2}$ и $d^-_{n/2}$ (при четном n). Кроме того, поскольку при нечетном n группа $\widetilde{G}_n$ есть прямое произведение группы G_n на циклическую

группу второго порядка, из теоремы 1 следует также неприводимость представлений основных невырожденных серий группы G_n при нечетном n.

2. Вместо группы $\widetilde{G}_n$ введем в рассмотрение некоторую ее подгруппу и докажем, что даже представления этой подгруппы являются неприводимыми. На первый взгляд может показаться, что доказательство неприводимости представлений подгруппы группы $\widetilde{G}_n$ во всяком случае не проще, чем доказательство неприводимости представлений всей группы $\widetilde{G}_n$. Однако на самом деле при рассмотрении вместо группы $\widetilde{G}_n$ подходящей ее подгруппы оказывается возможным, как мы увидим ниже, провести доказательство неприводимости представлений индукцией по n.

В качестве такой подгруппы группы $\widetilde{G}_n$ мы возьмем при четном n подгруппу $\widetilde{\mathfrak{A}}_n$ всех матриц g, удовлетворяющих условию

$$g_{pn} = 0 \quad \text{для } p = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{*}$$

а также условию

$$g_{nn} > 0. \tag{**}$$

При нечетном n мы выберем подгруппу $\mathfrak{A}_n$ всех матриц с детерминантом $+1$, удовлетворяющих лишь условию (*).

Имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Если T_g — любое из представлений основных невырожденных серий группы $\widetilde{G}_n$, то при четном n T_g есть неприводимое представление подгруппы $\widetilde{\mathfrak{A}}_n$, а при нечетном n — неприводимое представление подгруппы $\mathfrak{A}_n$.*

Очевидно, что теорема 1 есть непосредственное следствие этой леммы.

3. Доказательство леммы 1 будем вести по индукции. Предположим, что утверждение леммы уже доказано для группы матриц $n-1$-го порядка, и докажем его для группы матриц n-го порядка.

В соответствии с тем, четно или нечетно число n, а также в соответствии с типом рассматриваемой серии представлений, мы рассмотрим отдельно несколько возможных случаев *.

Случай I. n — нечетное число. Представление группы G_n из серии $d_{m,\tau}$ $(2m + \tau = n)$ определяется m целыми положительными числами $n_1, n_2, \ldots, n_m$, $m + \tau - 1$ вещественными числами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m+\tau-1}$, а также, при $\tau > 1$, индексами $\varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_{m+\tau-1}$. Представление в этом случае реализуется в пространстве $\mathfrak{H}$ функций

$$f(z) = f(\dot{z}x) = f(z_1, \ldots, z_m, x),$$

задаваемых на многообразии $Z_{m,\tau}$ и аналитичных по каждому из переменных $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Норма в пространстве $\mathfrak{H}$ задается формулой

$$\|f\|^2 = \int |f(z_1, \ldots, z_m, x)|^2 \prod_{p=1}^{m} \frac{|\operatorname{Im} z_p|^{n_p - 2}}{\Gamma(n_p - 1)} \cdot$$

$$\cdot d\mu(x)\, dx_1\, dy_1 \ldots dx_m\, dy_m \quad (z_p = x_p + iy_p). \tag{7.1}$$

---

* Приводимое ниже доказательство для случаев I и II совпадает по существу с доказательством неприводимости представлений основной невырожденной серии комплексной унимодулярной группы [см. ([1])].

Операторы представления T_g задаются формулой

$$T_g f(z) = f(z\bar{g}) \left[\prod_{p=1}^{m} \frac{\beta_p z_p + \delta_p}{\sqrt{|\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p|}} \right]^{-n_p} \prod_{p=1}^{m+\tau-1} |\Lambda_p|^{i\rho_p} \cdot$$

$$\prod_{p=m+1}^{m+\tau-1} \left(\frac{\Lambda_p}{|\Lambda_p|} \right)^{\varepsilon_p} \cdot |\Lambda_p|^{n-\frac{3}{2}} |\Lambda_2|^{n-\frac{1}{2}} \cdots$$

$$\cdots |\Lambda_m|^{\tau+\frac{1}{2}} |\Lambda_{m+1}|^{\tau-1} |\Lambda_{m+2}|^{\tau-2} \cdots |\Lambda_{m+\tau-1}|. \tag{7.2}$$

Обозначим через z' матрицу $(n-1)$-го порядка, элементами которой являются элементы z_{pq} матрицы $z \in Z_{m,\tau}$ при $p < n$, $q < n$. Заметим, что элементы z_{nq} нижней строки матрицы $z \in Z_{m,\tau}$ совпадают с соответствующими элементами x_{nq} матрицы $x \in X_{m,\tau}$, входящей в представление $z = \dot{z}x$ матрицы z, где $\dot{z} \in \dot{Z}_{m,\tau}$, $x \in X_{m,\tau}$. Ввиду сказанного, функцию $f(z) \in \mathfrak{H}$ можно представить в виде

$$f(z) = f(z', x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{n,n-1}), \tag{7.3}$$

причем $z' \in Z_{m,\tau-1}$ и при фиксированном z' функция f имеет суммируемый квадрат по отношению к $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{n,n-1}$.

Сделаем преобразование Фурье, полагая

$$\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int f(z', x_{n1}, \ldots, x_{n,n-1}) \cdot$$

$$\cdot e^{-i(x_{n1}w_1 + \cdots + x_{n,n-1}w_{n-1})} dx_{n1} \ldots dx_{n,n-1}. \tag{7.4}$$

Это преобразование будет унитарным отображением пространства $\mathfrak{H}$ на пространство H функций $\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1})$ с нормой

$$\|\varphi\|^2 = \int |\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) \cdot \prod_{p=1}^{m} |\operatorname{Im} z_p|^{n_p - 2} dz' \, dw_1 \ldots dw_{n-1}.^* \tag{7.5}$$

Поэтому все операторы представления можно рассматривать как операторы в H.

Пусть A — ограниченный оператор в H, коммутирующий со всеми операторами T_g, $g \in \mathfrak{A}_n$. Утверждение леммы будет доказано для рассматриваемого случая, если мы покажем, что такой оператор A кратен единичному.

Группа $\mathfrak{A}_n$ содержит подгруппу $X_{m,\tau}$, в частности, она содержит все элементы $x^0 \in X_{m,\tau}$, определяемые условиями

$$x^0_{pq} = 0 \quad \text{при } p < n. \tag{7.6}$$

---

* Ради краткости в дальнейшем будем выражение $d\mu(x)\, dx_1 dy_1 \ldots dx_m dy_m$ в (7.1) обозначать через dz; dz' представляет собой соответствующее выражение для z'.

В пространстве $\mathfrak{H}$ оператор T_{x^0} есть оператор сдвига:

$$T_{x^0} f(z) = f(zx^0). \tag{7.7}$$

С другой стороны, из условия (7.6) следует, что при сдвиге $z \to zx^0$ элементы z' остаются неизменными, а $x_{nq} \to x_{nq} + x^0_{nq}$, $q = 1, 2, \ldots, n-1$. Поэтому формулу (7.7) можно переписать в виде

$$T_{x^0} f(z', x_{n1}, \ldots, x_{n, n-1}) = f\left(z', x_{n1} + x^0_{n1}, \ldots, x_{n, n-1} + x^0_{n, n-1}\right). \tag{7.8}$$

Отсюда, в силу (7.4), оператор T_{x^0} в пространстве H будет иметь вид:

$$T_{x^0} \varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = e^{i\left(x^0_{n1} w_1 + \cdots + x^0_{n, n-1} w_{n-1}\right)} \varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}). \tag{7.9}$$

По предположению, оператор A коммутирует со всеми операторами T_{x^0}, каковы бы ни были числа $x^0_{n1}, \ldots, x^0_{n, n-1}$, а следовательно, и со всеми операторами умножения на ограниченные функции $\omega(w_1, \ldots, w_{n-1})$. Поэтому оператор A имеет вид:

$$A\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = a(w_1, \ldots, w_{n-1}) \varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}), \tag{7.10}$$

где $a(w_1, \ldots, w_{n-1})$ — оператор в пространстве функций $f(z')$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int |f(z')|^2 \prod_{p=1}^{m} \frac{|\operatorname{Im} z_p|^{n_p - 2}}{\Gamma(n_p - 1)} dz', \tag{7.11}$$

определенный для почти всех $w_1, \ldots, w_{n-1}$ и равномерно ограниченный по отношению к этим переменным.

Рассмотрим в группе $\mathfrak{A}_n$ подгруппу матриц, удовлетворяющих дополнительному условию

$$g_{nq} = 0 \quad \text{при } q = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{7.12}$$

Обозначим эту подгруппу через $\mathfrak{A}^0$. Оператор A должен коммутировать со всеми операторами T_g, $g \in \mathfrak{A}^0$. Найдем эти операторы T_g.

Согласно формулам (5.44) и (5.45) работы (1), мы имеем [ср. также формулы, приведенные в § 2, п. 1 настоящей статьи] следующие выражения для элементов матрицы $\hat{z} = \bar{z}g$:

$$\hat{z}_{pq} = \frac{\begin{vmatrix} g'_{pq} & g'_{p, p+1} & \cdots & g'_{p, n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g'_{n-1, q} & g'_{n-1, p+1} & \cdots & g'_{n-1, n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g'_{pp} & g'_{p, p+1} & \cdots & g'_{p, n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g'_{n-1, p} & g'_{n-1, p+1} & \cdots & g'_{n-1, n-1} \end{vmatrix}} \quad \text{при } q < p < n, \tag{7.13}$$

где g'_{pq} — элементы матрицы $g' = zg$,

$$\hat{x}_{nq} = \hat{z}_{nq} = \sum_{s=1}^{n-1} x_{ns} \frac{g_{sq}}{g_{nn}} \quad \text{при } q = 1, \ldots, n-1. \tag{7.14}$$

Обозначим через g^0 матрицу $n-1$-го порядка, элементами которой являются

$$g^0_{pq} = g_{pq} \cdot c, \quad q, p < n, \tag{7.15}$$

где вещественный множитель c подобран так, что детерминант матрицы g^0 равен 1 или -1. Очевидно, что знак $\det g^0$ совпадает со знаком элемента g_{nn} матрицы g. Мы будем предполагать, что знак числа c, выбор которого всецело в нашем распоряжении, также совпадает со знаком числа g_{nn}. Положим, далее,

$$b = g_{nn} \cdot c\ {}^{*}. \tag{7.16}$$

Тогда $b > 0$. Из формул (7.13) и (7.14) следует, что при преобразовании $z \to \overline{zg}$ матрица z' переходит в $z'\overline{g}^0$, а x_{nq} переходят в $\hat{x}_{nq}$, где

$$b\hat{x}_{nq} = \sum_{s=1}^{n-1} g^0_{sq} x_{ns}. \tag{7.17}$$

Вычислим $\alpha(z, g)$. Согласно ранее полученным результатам [см. (6.30), (2.3)], входящие в формулу для $\alpha(z, g)$ выражения Λ_p вычисляются по формулам

$$\Lambda_p = \frac{\tilde{g}_{r_1+\cdots+r_{p-1}+1}}{\tilde{g}_{r_1+\cdots+r_p+1}}, \tag{7.18}$$

где $\tilde{g}_k$ обозначает, как обычно, главный минор матрицы $\tilde{g} = xg$,

$$\tilde{g}_k = \begin{vmatrix} \tilde{g}_{kk} \cdots \tilde{g}_{kn} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tilde{g}_{nk} \cdots \tilde{g}_{nn} \end{vmatrix}.$$

Напомним также, что $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 2$, $r_{m+1} = \cdots = r_{m+\tau} = 1$.

Представим матрицу $z' \in Z_{m, \tau-1}$ в виде

$$z' = \dot{z}'x', \quad \dot{z}' \in \dot{Z}_{m, \tau-1}, \quad x' \in X_{m, \tau-1}.$$

Матрицы $\dot{z}'$ и x' получаются из соответствующих матриц $\dot{z}$ и x, входящих в представление матрицы $z\,(z = \dot{z}x)$, вычеркиванием нижней строки и последнего столбца. Если положить $\tilde{g}' = x'g^0$, то главные миноры $\tilde{g}_p$, $p < n$, матрицы $\tilde{g} = xg$ будут отличаться от главных миноров $\tilde{g}_p$ матрицы

---

* Поскольку $\det g = 1$, из равенства (7.15) следует, что $g_{nn} = \pm c^{n-1}$, а из равенства (7.16), — что $b = \pm c^n$.

$n-1$-го порядка $\tilde{g}'$ лишь постоянным множителем, представляющим собой произведение g_{nn} на некоторую степень числа c. Поэтому выражения

$$\Lambda'_p = \frac{\tilde{g}'_{r_1+\dots+r_{p-1}+1}}{\tilde{g}'_{r_1+\dots+r_p+1}}, \quad p = 1, 2, \dots, m+\tau-1,$$

отличаются от соответствующих выражений Λ_p постоянным множителем, представляющим собой некоторую степень числа c. Следовательно, поскольку

$$g_{nn} = c^{1-n} \operatorname{sign} c \text{ и } \Lambda'_{m+\tau-1} = \frac{1}{\Lambda'_1 \dots \Lambda'_{m+\tau-2}},$$

имеем

$$\alpha(z, g) = \alpha_0(g_{nn}) \alpha'(z', g^0), \tag{7.19}$$

где $\alpha_0(g_{nn})$ — функция вида

$$\alpha_0(g_{nn}) = g_{nn}^{\varepsilon} |g_{nn}|^{t+i\rho} \tag{7.20}$$

и

$$\alpha'(z', g^0) = \prod_{p=1}^{m} \left[\frac{\beta_p z_p + \delta_p}{\sqrt{|\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p|}}\right]^{-n_p} \prod_{p=2}^{m+\tau-2} |\Lambda'_p|^{i(\rho_p - \rho_{m+\tau-1})} \cdot$$
$$\cdot \prod_{p=1}^{m+\tau-2} \left(\frac{\Lambda'_p}{|\Lambda'_p|}\right)^{\varepsilon_p} |\Lambda'_p|^{(n-1)-1/2} \dots |\Lambda'_m|^{(\tau-1)+1/2} \cdot$$
$$\cdot |\Lambda'_{m+1}|^{(\tau-1)-1} \dots |\Lambda'_{m+\tau-2}| \cdot \left(\frac{\Lambda'_{m+\tau-1}}{|\Lambda'_{m+\tau-1}|}\right)^{\varepsilon_{m+\tau-1}}. \tag{7.21}$$

Функция $\alpha'(z', g^0)$ отличается при $\tau > 1$ от функции, задающей унитарное представление группы $\tilde{G}_{n-1}$ из серии $d_{m, \tau-1}$, лишь множителем

$$(\Lambda'_{m+\tau-1} / |\Lambda'_{m+\tau-1}|)^{\varepsilon_{m+\tau-1}}.$$

При $\tau = 1$ эта функция совпадает с функцией, задающей унитарное представление группы G_{n-1} из серии $d_{m,0}$.

Таким образом, при $g \in \mathfrak{A}^0$

$$T_g f(z', x_{n1}, \dots, x_{n,n-1}) = \alpha_0(g_{nn}) \alpha'(z', g^0) f(z'\bar{g}^0, \hat{x}_{n1}, \dots, \hat{x}_{n,n-1}) \tag{7.22}$$

или

$$T_g f(z', x_{n1}, \dots, x_{n,n-1}) = \alpha_0(g_{nn}) T_{g^0} f(z', \hat{x}_{n1}, \dots, \hat{x}_{n,n-1}), \tag{7.23}$$

где $\hat{x}_{n1}, \dots, \hat{x}_{n,n-1}$ определяются формулой (7.17), а T_{g^0} — представление группы $\tilde{G}_{n-1}$, определяемое равенством

$$T_{g^0} f(z') = \alpha'(z', g^0) f(z'\bar{g}^0). \tag{7.24}$$

Посмотрим, как действует оператор T_g на функцию $\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1})$. Мы имеем:

$$T_g\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \alpha_0(g_{nn})\,\alpha'(z', g^0)\,\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int f(z'\overline{g}^0, \hat{x}_{n1}, \ldots, \hat{x}_{n,\,n-1})\cdot$$
$$\cdot\, e^{-i(x_{n1}w_1+\cdots+x_{n,\,n-1}w_{n-1})}\,dx_{n1}\ldots dx_{n,\,n-1}.$$

Переходя к переменным интегрирования $\hat{x}_{n1}, \ldots, \hat{x}_{n,\,n-1}$, получим

$$T_g\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \alpha_0(g_{nn})\,\alpha'(z', g^0)\,\Delta\cdot\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int f(z'\overline{g}^0, \hat{x}_{n1}, \ldots, \hat{x}_{n,\,n-1})\cdot$$
$$\cdot\, e^{-i(\hat{x}_{n1}\hat{w}_1+\cdots+x_{n,\,n-1}\hat{w}_{n-1})}\,d\hat{x}_{n1}\ldots d\hat{x}_{n,\,n-1}, \tag{7.25}$$

т. е.

$$T_g\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \alpha_1(g_{nn})\,\Delta\cdot T_{g^0}\varphi(z', \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}). \tag{7.26}$$

Здесь Δ — якобиан преобразования (7.17) переменных x_{nq}, а $\hat{w}_q$ задаются формулой

$$\frac{1}{b}\hat{w}_q = \sum_{s=1}^{n-1}\hat{g}_{sq}w_s, \tag{7.27}$$

где матрица $\hat{g} = \|g_{sq}\|$ — обратная к матрице, сопряженной с g^0, т. е. $\hat{g} = (g^0)^{*-1}$.

Оператор A должен коммутировать с оператором T_g. В силу полученных выше формул, это дает:

$$a(w_1, \ldots, w_{n-1})\cdot\Delta\cdot\alpha_0(g_{nn})\,T_{g^0}\varphi(z', \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}) =$$
$$= \Delta\cdot\alpha_0(g_{nn})\,T_{g^0}a(\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1})\,\varphi(z', \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}),$$

следовательно,

$$a(w_1, \ldots, w_{n-1})\,T_{g^0} = T_{g^0}a(\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}).$$

Отсюда

$$a(\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}) = T_{g^0}^{-1}a(w_1, \ldots, w_{n-1})\,T_{g^0} \tag{7.28}$$

для почти всех $w_1, \ldots, w_{n-1}$.

Положим в (7.15) $g^0 = e$ (e — единичная матрица). Тогда формула (7.27) примет вид

$$\frac{1}{b}\hat{w}_q = w_q, \quad b > 0,$$

и $T_{g^0} = 1$. Поэтому соотношение (7.28) перепишется в виде

$$a(bw_1, \ldots, bw_{n-1}) = a(w_1, \ldots, w_{n-1}), \tag{7.29}$$

где $b > 0$. Ввиду этого, функция $a(w_1, \ldots, w_{n-1})$ постоянна вдоль лучей,

выходящих из точки $(0, 0, \ldots, 0)$. Ее можно поэтому рассматривать как функцию от $w \in \mathfrak{W}$, где $\mathfrak{W}$ — $(n-2)$-мерная сфера $w_1^2 + \cdots + w_{n-1}^2 = 1$.

Так как переход $g^0 \to \hat{g} = (g^0)^{*-1}$ есть изоморфизм, то равенство (7.27) можно рассматривать как преобразование многообразия $\mathfrak{W}$ при помощи группы $\tilde{G}_{n-1}$ матриц $(n-1)$-го порядка с детерминантом ± 1.

Очевидно, что $\mathfrak{W}$ транзитивно, поэтому его можно рассматривать как многообразие правых классов смежности по некоторой подгруппе группы $\tilde{G}_{n-1}$.

Мы можем считать функцию $a(w)$ заданной на почти всей группе $\tilde{G}_{n-1}$, считая $a(w)$ постоянной на каждом таком классе. Тогда равенство (7.28) перепишется в виде

$$a(gg^0) = T_{g^0}^{-1} a(g) T_{g^0}, \tag{7.30}$$

причем это равенство имеет место для почти всех $g \in \tilde{G}_{n-1}$ при каждом фиксированном g^0.

Положим $g_1 = gg^0$; тогда (7.30) перепишется в виде:

$$a(g_1) = T_{g^{-1}g_1}^{-1} a(g) T_{g^{-1}g_1} = T_{g_1^{-1}} T_g a(g) T_{g^{-1}} T_{g_1},$$

откуда

$$T_{g_1} a(g_1) T_{g_1}^{-1} = T_g a(g) T_g^{-1}. \tag{7.31}$$

Равенство (7.31) имеет место для почти всех пар (g^0, g), g^0, $g \in \tilde{G}_{n-1}$, следовательно, по теореме Фубини, для почти всех пар $(gg^0, g) = (g_1, g)$, g_1, $g \in \tilde{G}_{n-1}$. Таким образом, для почти всех $g \in \tilde{G}_{n-1}$ оператор $T_g a(g) T_g^{-1}$ от g не зависит. Обозначим его через a. Мы имеем тогда

$$a(g) = T_g^{-1} a T_g \tag{7.32}$$

для почти всех $g \in \tilde{G}_{n-1}$.

Функция $a(g)$, по определению, постоянна на правых классах смежности $\tilde{G}_{n-1}$ по стационарной подгруппе многообразия $\mathfrak{W}$. Будем исходить из точки $(0, 0, \ldots, 1)$. Ее стационарной подгруппой будет совокупность $\mathfrak{A}'$ матриц $l = \| l_{pq} \| \in \tilde{G}_{n-1}$ таких, что матрица $l^{*-1} = \| \hat{l}_{pq} \|$ удовлетворяет условиям

$$\hat{l}_{n-1,\, q} = 0 \ \text{ при } \ q = 1, 2, \ldots, n-2, \quad \hat{l}_{n-1,\, n-1} > 0;$$

следовательно, l удовлетворяет условиям:

$$l_{q,\, n-1} = 0, \ \text{ при } \ q = 1, 2, \ldots, n-2, \quad l_{n-1,\, n-1} > 0.$$

Таким образом, $\mathfrak{A}'$ есть подгруппа $\tilde{\mathfrak{A}}_{n-1}$.

В правой части соотношения (7.32) стоит непрерывная функция от g в смысле сходимости по норме в $\mathfrak{H}$; она совпадает для почти всех g с функцией $a(g)$, постоянной на классах смежности группы $\tilde{G}_{n-1}$ по

подгруппе $\widetilde{\mathfrak{A}}_{n-1}$. Отсюда, по теореме Фубини, следует, что почти на всех классах она постоянна с точностью до своих значений на множестве меры нуль на классе. По непрерывности отсюда следует, что $a(g)$ постоянна на каждом классе без исключения.

Взяв, в частности, в правой части (7.32) $g=l$, получим:

$$T_l^{-1} a T_l = a, \tag{7.33}$$

следовательно, оператор a коммутирует со всеми операторами T_l, $l \in \widetilde{\mathfrak{A}}_{n-1}$.

Как было уже отмечено, при $\tau=1$ операторы T_{g^0} являются операторами унитарного представления группы $\widetilde{G}_{n-1}$ из серии d_{m0}; при $\tau>1$ формулы для операторов T_{g^0} отличаются от формул для операторов T_{g^0}' унитарного представления группы $\widetilde{G}_{n-1}$ из серии $d_{m,\tau-1}$ лишь множителем

$$(\Lambda_{m+\tau-1}/|\Lambda_{m+\tau-1}|)^{\varepsilon_{m+\tau-1}}.$$

Но при $\tau>1$

$$\Lambda'_{m+\tau-1} = \widetilde{g}'_{n-1} = x_{n-1,1} g^0_{1,n-1} + \cdots + x_{n-1,n-2} g^0_{n-2,n-1} + g^0_{n-1,n-1}. \tag{7.34}$$

Если $g^0 = l \in \widetilde{\mathfrak{A}}_{n-1}$, то $g^0_{1,n-1} = \ldots = g^0_{n-2,n-1} = 0$, и $\Lambda'_{m+\tau-1}$ есть постоянное число. Таким образом, операторы T_l совпадают с операторами T_l' унитарного представления с точностью до постоянного множителя. Следовательно, оператор a коммутирует со всеми операторами T_l', $l \in \widetilde{\mathfrak{A}}_{n-1}$. В силу нашего индуктивного предположения о неприводимости представлений группы $\widetilde{\mathfrak{A}}_{n-1}$ порядка $n-1$, оператор a есть оператор умножения на скаляр: $a=\alpha\cdot 1$. Но тогда из (7.32) следует, что $a(g)=\alpha\cdot 1$ для почти всех $g\in\widetilde{G}_{n-1}$. В силу (7.10), оператор A также совпадает с $\alpha\cdot 1$.

Итак, каждый ограниченный оператор A в H, коммутирующий со всеми операторами T_g, $g\in\mathfrak{A}_n$, кратен единице, следовательно, T_g — неприводимое представление группы $\mathfrak{A}_n$.

Случай II. n — четное число, $\tau>0$. Пространство $\mathfrak{H}$, в котором реализуется представление T_g группы $\widetilde{G}_n$, и операторы представления определяются здесь в точности так же, как и для случая I.

Мы должны доказать в этом случае неприводимость представления T_g группы $\widetilde{\mathfrak{A}}_n$.

Доказательство проводится почти дословно так же, как и доказательство для случая I. Мы изложим здесь единственный пункт доказательства, требующий несколько иных рассуждений.

Как и в случае I, мы рассматриваем в группе $\widetilde{\mathfrak{A}}_n$ подгруппу $\mathfrak{A}^0$ матриц, удовлетворяющих условию (7.12):

$$g_{nq}=0 \quad \text{при} \quad q=1, 2, \ldots, n-1.$$

Ввиду того что $n-1$ — нечетное число, вещественный множитель c в формуле (7.15):

$$g^0_{pq} = q_{pq}\cdot c, \quad pq<n,$$

можно всегда подобрать так, что детерминант соответствующей матрицы g^0 $(n-1)$-го порядка будет равен 1. Этим условием, конечно, множитель c

определяется однозначно. Знак множителя c совпадает со знаком детерминанта матрицы g.

Далее, как и в случае I, полагаем $b = g_{nn} \cdot c$. Число b может быть здесь, однако, как положительным, так и отрицательным. Соотношение (7.29), к которому мы приходим, означает поэтому, что для почти всех $w_1, \ldots, w_{n-1}$ функция $a(w_1, \ldots, w_{n-1})$ зависит только от отношений $w_1 : w_2 : \ldots : w_{n-1}$. Следовательно, эту функцию можно рассматривать как функцию точек вещественного проективного пространства $\mathfrak{W}$, в котором точка определяется как отношение $\dot{w} = (w_1 : w_2 : \ldots : w_{n-1})$.

Многообразие $\mathfrak{W}$ можно рассматривать как многообразие правых классов смежности группы G_{n-1} по некоторой ее подгруппе. Если исходить из точки $(0 : 0 : \ldots : 1)$, то ее стационарной группой является группа $\mathfrak{A}_{n-1}$. Поэтому доказательство леммы для случая II завершается так же, как и для случая I.

Случай III. n — четное число, $\tau = 0$. В силу сказанного в п. 1, § 7, представление группы $\widetilde{G}_n$ определяется $m = \frac{n}{2}$ целыми положительными числами $n_1, n_2, \ldots, n_m$ и $m-1$ вещественными числами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m-1}$. Представление реализуется в пространстве $\mathfrak{H}$ функций

$$f(z) = f(\dot{z}x) = f(z_1, \ldots, z_m, x),$$

задаваемых на многообразии $Z_{m,0}$ и аналитичных по каждому из переменных $z_1, \ldots, z_m$. Норма в пространстве $\mathfrak{H}$ задается формулой

$$\|f\|^2 = \int |f(z_1, \ldots, z_m, x)|^2 \prod_{p=1}^{m} \frac{|\operatorname{Im} z_p|^{n_p-2}}{\Gamma(n_p - 1)} d\mu(x) \cdot \\ \cdot dx_1 dy_1 \ldots dx_m dy_m \quad (z_p = x_p + iy_p), \tag{7.35}$$

а операторы представления T_g — формулой

$$T_g f(z) = f(z\bar{g}) \prod_{p=1}^{m} \left[\frac{\beta_p z_p + \delta_p}{\sqrt{|\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p|}} \right]^{-n_p} \cdot \\ \cdot \prod_{p=1}^{m-1} |\Lambda_p|^{i\rho_p} \cdot |\Lambda_1|^{n-2} \cdot |\Lambda_2|^{n-4} \cdots |\Lambda_{m-1}|^2. \tag{7.36}$$

Обозначим через z' матрицу $n-1$-го порядка, элементами которой являются элементы z_{pq} матрицы $z \in Z_{m,\tau}$ при $p < n$, $q < n$. Тогда $z' \in Z_{m-1,1}$, и функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = f(z', x_{n1}, \ldots, x_{n,n-2}, z_m). \tag{7.37}$$

Эта функция имеет суммируемый квадрат по отношению к переменным $x_{n1}, \ldots, x_{n,n-2}$. С другой стороны, если ее рассматривать как функцию только от z_m, фиксируя значения остальных переменных, то она будет аналитической относительно z_m отдельно в верхней и в нижней полуплоскости.

Поэтому ее задание равносильно заданию пары функций, из которых одна аналитична в верхней, а другая — в нижней полуплоскости.

Кроме того, для этой функции должен сходиться интеграл

$$\int |f|^2 \frac{|\operatorname{Im} z_m|^{n_m-2}}{\Gamma(n_m-1)} dx_m dy_m.$$

Мы будем осуществлять преобразование Фурье функции $f(z', x_{n1}, \ldots, x_{n,n-2}, z_m)$ по переменным $x_{n1}, \ldots, x_{n,n-2}, z_m$. Предварительно отметим следующее.

Если функция $f_1(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ аналитична в верхней полуплоскости $y > 0$ и для некоторого целого неотрицательного k

$$\int |f_1(z)|^2 \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)} dx\,dy < +\infty, \tag{7.38}$$

то интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) e^{-itz} dx \tag{7.39}$$

сходится и не зависит от y. Если этот интеграл обозначить через $\varphi_1(t)$, то функция $\varphi_1(t)$ равна тождественно нулю при $t < 0$. В свою очередь, функция $f_1(z)$ выражается через функцию $\varphi_1(t)$ по формуле

$$f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi_1(t) e^{itz} dx, \tag{7.40}$$

причем

$$\int |f_1(z)|^2 \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)} dx\,dy = \frac{1}{2^k} \int_0^{\infty} |\varphi_1(t)|^2 t^{-k} dt. \tag{7.41}$$

Ввиду этого имеет место изометрическое соответствие между аналитическими в верхней полуплоскости функциями $f_1(z)$ с нормой

$$\|f_1\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} |f_1(z)|^2 \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)} dy\,dx$$

и функциями $\varphi_1(t)$, определенными на полупрямой $0 \leqslant t < +\infty$ с нормой

$$\|\varphi_1\|^2 = \frac{1}{2^k} \int_0^{\infty} |\varphi_1(t)|^2 t^{-k} dt.$$

Наметим доказательство этого утверждения. Если $k > 0$, то из сходимости интеграла (7.38) вытекает сходимость (для почти всех y) интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(z)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x, y)|^2 dx.$$

Следовательно, можно определить функцию

$$\varphi_1(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, y)\, e^{-ixt}\, dx. \tag{а}$$

По формуле Планшереля имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_1(t, y)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x, y)|^2\, dx,$$

а потому

$$\int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_1(t, y)|^2 \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)}\, dt = \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x, y)|^2 \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)}\, dx < +\infty. \tag{б}$$

С другой стороны, функция $f_1(z) = f_1(x, y)$, будучи аналитической, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0.$$

В силу (а), мы получаем отсюда дифференциальное уравнение для функции $\varphi_1(t, y)$:

$$it\varphi_1 + i\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi_1(t, y) = e^{-ty}\varphi_1(t), \tag{в}$$

где $\varphi_1(t)$ — некоторая функция, зависящая только от t.

Подставляя в (б), получаем

$$\int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_1(t)|^2 \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-2ty}\, dt < +\infty.$$

Из сходимости написанного интеграла вытекает непосредственно, что $\varphi_1(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Умножая обе части равенства (а) на e^{ty} и используя выражение (в), получаем

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z)\, e^{-itz}\, dx \quad (z = x + iy).$$

В свою очередь, функция $f_1(z)$ может быть выражена через функцию $\varphi_1(t)$ по формуле

$$f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \varphi_1(t)\, e^{itz}\, dt.$$

Кроме того, в силу (б) и (в),

$$\int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x, y)|^2 \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)} dx = \int_0^\infty |\varphi_1(t)|^2 dt \int_0^{+\infty} e^{-2ty} \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)} dy.$$

Произведя во втором интеграле замену переменной $2ty = u$, имеем

$$\int_0^\infty e^{-2ty} \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)} dy = \frac{\Gamma^{-1}(k)}{(2t)^k} \int_0^\infty e^{-u} u^{k-1} du = \frac{1}{(2t)^k}.$$

Таким образом,

$$\int_{y>0} |f_1(z)|^2 \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)} dx\, dy = \frac{1}{2^k} \int_0^\infty |\varphi_1(t)|^2 t^{-k} dt.$$

Обратно, если функция $\varphi_1(t)$, определенная на полупрямой $0 \leqslant t < \infty$, такова, что для нее сходится интеграл

$$\int_0^\infty |\varphi_1(t)|^2 t^{-k} dt,$$

то функция $f_1(z) = f_1(x, y)$, определяемая формулой (7.40), аналитична для всех z в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Если, наконец, $k = 0$, то $y^{k-1} / \Gamma(k)$ следует понимать как дельта-функцию. Интеграл (7.38) принимает тогда вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|^2 dx,$$

где $f_1(x)$ — граничное значение функции $f_1(z)$ на вещественной оси. Следовательно, можно определить функцию

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) e^{-itx} dx.$$

Как известно [см., например, ([4])], $\varphi_1(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|^2 dx = \int_0^\infty |\varphi_1(t)|^2 dt.$$

Кроме того,

$$f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \varphi_1(t) e^{itz} dt.$$

Отсюда может быть получено также выражение функции $\varphi_1(t)$ в форме интеграла (7.39).

Утверждение, аналогичное только что доказанному, справедливо и для функции $f_2(z)$, аналитической в нижней полуплоскости $y < 0$. Соответствующая ей функция $\varphi_2(t)$ равна тождественно нулю при $t > 0$.

Итак, окончательно мы можем сопоставить каждой паре $f_1(z)$ и $f_2(z)$ таких функций функцию $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$, определенную на вещественной оси. Это соответствие дается формулой

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) e^{-itz} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z) e^{-itz} dx,$$

причем в первом интеграле интегрирование ведется по прямой $y = c > 0$, а во втором — по прямой $y = -c < 0$.

Обозначим пару функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ через $f(z)$. Тогда последнюю формулу можно записать в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(z) e^{-itz} dx, \tag{7.42}$$

где интегрирование ведется по прямым $y = c$ и $y = -c$.

Преобразование (7.42) представляет собой изометрическое отображение пространства функций $f(z)$ комплексного переменного, аналитических в верхней и в нижней полуплоскости, с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^2 \frac{|y|^{k-1}}{\Gamma(k)} dy\, dx,$$

на пространство функций $\varphi(t)$, задаваемых на вещественной оси, с нормой

$$\|\varphi\|^2 = \frac{1}{2^k} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^2 |t|^{-k} dt.$$

Вернемся теперь к функциям $f(\dot{z}x)$ из пространства $\mathfrak{H}$. В силу сказанного выше, эти функции допускают преобразование Фурье:

$$\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-2}, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int f(z', x_{n-1}, \ldots, x_{n,n-2}, z_m) \cdot$$
$$e^{-i(x_{n1}w_1 + \ldots + x_{n,n-2}w_{n-2} + z_m\xi)} dx_{n1} \ldots dx_{n,n-2}\, dx_m. \tag{7.43}$$

Это преобразование представляет собой изометрическое отображение пространства $\mathfrak{H}$ на пространство H функций $\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-2}, \xi)$, определенных для $z' \in Z_{m-1,1}$, $-\infty < w_k < +\infty$, $-\infty < \xi < +\infty$, с нормой

$$\|\varphi\|^2 = \frac{1}{2^{n_m-1}} \int |\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-2}, \xi)|^2 \prod_{p=1}^{m-1} \frac{|\operatorname{Im} z_p|^{n_p-2}}{\Gamma(n_p-1)} |\xi|^{1-n_m} \cdot$$
$$\cdot dz'\, dw_1 \ldots dw_{n-2}\, d\xi. \tag{7.44}$$

Введем вместо ξ новую переменную w_{n-1}, связанную с ξ соотношением

$$\xi = w_{n-1} + x_{n-1,1}w_1 + \cdots + x_{n-1,n-2}w_{n-2}. \tag{7.45}$$

Пространство H можно тогда рассматривать как пространство функций $\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1})$ с нормой

$$\|\varphi\|^2 = \frac{(n_m-1)!}{2^{n_m-1}} \int |\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1})|^2 \prod_{p=1}^{m-1} \frac{|\operatorname{Im} z_p|^{n_p-2}}{\Gamma(n_p-1)} \cdot$$
$$\cdot |w_{n-1} + x_{n-1,1}w_1 + \ldots + x_{n-1,n-2}w_{n-2}|^{1-n_m} dz'\, dw_1 \ldots dw_{n-1}. \tag{7.46}$$

При этом формула (7.43) переходит в формулу

$$\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int f(z', x_{n1}, \ldots, x_{n,n-2}, z_m) \cdot$$
$$e^{-i\left(\sum_{s=1}^{n-2} x_{ns}w_s + z_m\left(w_{n-1} + \sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1,s}w_s\right)\right)} dx_m \ldots dx_{n,n-2}\, dx_m$$

или

$$\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int f(z', x_{n1}, \ldots, x_{n,n-2}, z_m) \cdot$$
$$\cdot e^{-i\left(\sum_{s=1}^{n-2} (x_{ns}+z_m x_{n-1,s}) w_s + z_m w_{n-1}\right)} dx_{n1} \ldots dx_{n,n-2}\, dx_m. \quad (7.47)$$

Эту формулу мы представим в несколько ином виде. Для этого заметим, что элементы нижней строки матрицы $z \in Z_{m,0}$ выражаются через элементы матриц $\dot{z} \in \dot{Z}_{m,0}$ и $x \in X_{m,0}$, входящих в представление $z = \dot{z}x$, по формулам

$$z_{nq} = x_{nq} + z_m x_{n-1q}, \quad q = 1, \ldots, n-2, \quad z_{n,n-1} = z_m. \quad (7.48)$$

Положим $u_q = \operatorname{Re} z_{nq}$, $q = 1, \ldots, n-1$, т. е.

$$u_q = x_{nq} + x_m x_{n-1,q}, \quad q = 1, \ldots, n-2, \quad u_{n-1} = x_m. \quad (7.49)$$

Функцию $f(z) \in \mathfrak{H}$ можно представить в виде

$$f(z) = f(z', u_1, \ldots, u_{n-2}, z_m).$$

Переходя в формуле (7.47) от переменных $x_{n1}, \ldots, x_{n,n-2}, x_m$ к новым переменным $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, мы получаем:

$$\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int f(z', u_1, \ldots, u_{n-2}, z_m) \cdot$$
$$\cdot e^{-i(z_{n1}w_1 + \cdots + z_{n,n-2}w_{n-2} + z_{n,n-1}w_{n-1})} du_1 \ldots du_{n-1}. \quad (7.50)$$

Рассмотрим преобразование

$$\psi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \left| w_{n-1} + \sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1,s} w_s \right|^{-\frac{n_m-1}{2}} \varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}). \quad (7.51)$$

Оно представляет собой изометрическое отображение пространства H на пространство H_1 функций $\psi(z', w_1, \ldots, w_{n-1})$ с нормой

$$\|\psi\|^2 = \frac{1}{2^{n_m-1}} \int |\psi(z', w_1, \ldots, w_{n-1})|^2 \prod_{p=1}^{m-1} \frac{|\operatorname{Im} z_p|^{n_p-2}}{\Gamma(n_p-1)} dz' dw_1 \ldots dw_{n-1}. \quad (7.52)$$

Отметим, что если при отображении (7.51) $\varphi \to \psi$, то действие оператора T_g на функцию ψ в пространстве H_1 выражается формулой:

$$T_g \psi = \left| w_{n-1} + \sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1,s} w_c \right|^{-\frac{n_m-1}{2}} T_g \varphi. \quad (7.53)$$

Пусть A — ограниченный оператор в пространстве H_1, коммутирующий со всеми операторами T_g, $g \in \widetilde{\mathfrak{A}}_n$. Мы должны показать, что этот оператор кратен единичному оператору.

Рассмотрим в группе G_n матрицы $x^0 \in Z_{m,0}$, удовлетворяющие условию (7.6): $x^0_{pq} = 0$ при $p < n$.

В пространстве $\mathfrak{H}$ оператор T_{x^0} есть оператор сдвига:

$$T_{x^0} f(z) = f(zx^0). \quad (7.54)$$

С другой стороны, из условия (7.6) следует, что при сдвиге $z \to zx^0$ элементы матрицы z' остаются неизменными, а $z_{nq} \to z_{nq} + x^0_{nq}$. Следовательно, в силу определения величин u_q, $u_q \to u_q + x^0_{nq}$ и $x_m \to x_m + x^0_{n,n-1}$.

Поэтому формулу (7.54) можно переписать в виде

$$T_{x^0}f(z', u_1, \ldots, u_{n-2}, z_m) = \\ = f(z', u_1 + x^0_{n1}, \ldots, u_{n-2} + x^0_{n,n-2}, z_m + x^0_{n,n-1}). \quad (7.55)$$

Отсюда, в силу (7.50), оператор T_{x^0} в пространстве H будет иметь вид:

$$T_{x^0}\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = e^{i\left(x^0_{n1}w_1 + \cdots + x^0_{n,n-1}w_{n-1}\right)}\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}). \quad (7.56)$$

В силу (7.53), такой же вид этот оператор будет иметь и в пространстве H_1. Так же как и для случая I, мы заключаем отсюда, что в пространстве H_1 оператор A имеет вид:

$$A\psi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = a(w_1, \ldots, w_{n-1})\psi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}),$$

где $a(w_1, \ldots, w_{n-1})$ — оператор в пространстве функций $f(z')$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int |f(z')|^2 \prod_{p=1}^{m-1} \frac{|\operatorname{Im} z_p|^{n_p-2}}{\Gamma(n_p-1)}\, dz',$$

определенный для почти всех $w_1, \ldots, w_{n-1}$ и равномерно ограниченный по отношению к этим переменным.

Рассмотрим в группе $\widetilde{\mathfrak{A}}_n$ подгруппу $\mathfrak{A}^0$ матриц, удовлетворяющих дополнительному условию (7.12):

$$g_{nq} = 0 \quad \text{при } q = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и найдем вид операторов T_g, $g \in \mathfrak{A}^0$.

Положим, как и для случая II,

$$g^0_{pq} = g_{pq} \cdot c, \quad p, q < n,$$

где множитель c подобран так, что матрица g^0 $n-1$-го порядка унимодулярна. Положим, далее, $b = g_{nn} \cdot c$. Из формул (7.13) и (7.14) следует, что при преобразовании $z \to z\overline{g}$ матрица z' переходит в $z'\overline{g}^0$, а z_{nq} переходят в $\hat{z}_{nq}$, где

$$b\hat{z}_{nq} = \sum_{s=1}^{n-1} g^0_{sq} z_{ns}. \quad (7.57)$$

Полагая $\hat{u}_q = \operatorname{Re}\hat{z}_{nq}$, мы имеем также

$$b\hat{u}_q = \sum_{s=1}^{n-1} g^0_{sq} u_s. \quad (7.58)$$

Вычислим $\alpha(z, g)$. Входящие в формулу для $\alpha(z, g)$ выражения Λ_p вычисляются по формулам

$$\Lambda_p = \frac{\widetilde{g}_{2(p-1)+1}}{\widetilde{g}_{2p+1}}, \quad p = 1, \ldots, m-1, \quad (7.59)$$

где $\widetilde{g}_m$ обозначает главный минор матрицы $\widetilde{g} = xg$.

Представим матрицу $z' \in Z_{m-1,1}$ в виде

$$z' = \dot{z}'x', \quad \dot{z}' \in \dot{Z}_{m-1,1}, \quad x' \in X_{m-1,1}.$$

Положим

$$\Lambda'_p = \frac{\widetilde{g}'_{2(p-1)+1}}{\widetilde{g}'_{2p+1}},$$

где $\widetilde{g}'_m$ обозначают главные миноры матрицы $\widetilde{g}' = x'g^0$. Как и в случае I, нетрудно убедиться, что эти выражения отличаются от соответствующих выражений Λ_p постоянным множителем, представляющим собой степень числа c.

Подсчитаем, далее, входящий в $\alpha(z, g)$ множитель $\dfrac{\beta_m z_m + \delta_m}{\sqrt{|\alpha_m\delta_m - \beta_m\gamma_m|}}$. Для этого представим матрицу xg в виде $xg = \hat{k}x_1$, где $\hat{k} = \|\hat{k}_{pq}\| \in \hat{K}_m$ и $x_1 \in X_m$. Тогда, в соответствии с формулами § 6,

$$\alpha_m = k_{n-1, n-1}, \quad \beta_m = k_{n-1, n}, \quad \gamma_m = k_{n, n-1}, \quad \delta_m = k_{nn}.$$

Но непосредственный подсчет дает нам:

$$k_{n-1, n-1} = \sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1, s} g_{s, n-1} + g_{n-1, n-1}, \qquad k_{n-1, n} = 0,$$

$$k_{n, n-1} = \sum_{s=1}^{n-2} x_{ns} g_{s, n-1} + g_{n, n-1}, \qquad k_{nn} = g_{nn}.$$

Таким образом,

$$\frac{\beta_m z_m + \delta_m}{\sqrt{|\alpha_m\delta_m - \beta_m\gamma_m|}} = \sqrt{g_{nn}} \left| \sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1, s} g_{s, n-1} + g_{n-1, n-1} \right|^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{g_{nn}|c|} \cdot \left| \sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1, s} g^0_{s, n-1} + g^0_{n-1, n-1} \right|^{-\frac{1}{2}}. \tag{7.60}$$

Кроме того,

$$|\Lambda_m| = |\alpha_m\delta_m - \beta_m\gamma_m| = g_{nn}|c|^{-1} \cdot \left| \sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1, s} g^0_{s, n-1} + g^0_{n-1, n-1} \right|.$$

Формула для $\alpha(z, g)$ принимает поэтому следующий вид:

$$\alpha(z, g) = \alpha_0(g_{nn})\, \alpha'(z', g^0), \tag{7.61}$$

где $\alpha_0(g_{nn})$ — функция вида (7.20), а $\alpha'(z', g^0)$ — функция от z' и g^0 вида:

$$\alpha'(z', g^0) = \prod_{p=1}^{m-1} \left[\frac{\beta_p z_p + \delta_p}{\sqrt{|\alpha_p\delta_p - \beta_p\gamma_p|}} \right]^{-n_p} \cdot \prod_{p=1}^{m-1} |\Lambda'_p|^{i\rho_p} \cdot$$

$$\cdot |\Lambda'_1|^{n-2} |\Lambda'_2|^{n-4} \ldots |\Lambda'_{m-1}|^2 \cdot \left| \sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1, s} g^0_{s, n-1} + g^0_{n-1, n-1} \right|^{\frac{n_m}{2}}. \tag{7.62}$$

Формула для оператора T_g, $g \in \mathfrak{A}^0$, в пространстве $\mathfrak{H}$ имеет, таким образом, вид:

$$T_g f(z', u_1, \ldots, u_{n-2}, z_m) = \alpha_0(g_{nn})\, \alpha'(z', g^0) f(z'\overline{g}^0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{n-2}, \hat{z}_m). \tag{7.63}$$

Посмотрим, как действует оператор T_g на функцию $\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1})$ из H. Мы имеем:

$$T_g\varphi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\, \alpha_0(g_{nn})\, \alpha'(z', g^0) \int f(z'\overline{g}^0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{n-2}, \hat{z}_m) \cdot$$

$$e^{-i(z_{n1}w_1 + \cdots + z_{n, n-1}w_{n-1})}\, du_1 \ldots du_{n-1}.$$

Но, в силу (7.57),

$$z_{n1}w_1+\cdots+z_{n,\,n-1}w_{n-1}=\hat{z}_{n1}\hat{w}_1+\cdots+\hat{z}_{n,\,n-1}\hat{w}_{n-1},$$

где величины $\hat{w}_q$ задаются формулой

$$\frac{1}{b}\hat{w}_q=\sum_{s=1}^{n-1}\hat{g}_{sq}w_s, \tag{7.64}$$

причем матрица $\hat{g}=\|\hat{g}_{sq}\|$ обратна к матрице, сопряженной с g^0, т. е. $\hat{g}=(g^0)^{*-1}$.

Поэтому, переходя к новым переменным интегрирования $\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_{n-1}$ и обозначая через Δ якобиан преобразования (7.58), получаем:

$$T_g\varphi(z',w_1,\ldots,w_{n-1})=\frac{\Delta}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\alpha_0(g_{nn})\,\alpha'(z',g^0)\int f(z'\overline{g}^0,\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_{n-2},\hat{z}_m)\cdot$$
$$\cdot\, e^{-i(\hat{z}_{n1}\hat{w}_1+\cdots+\hat{z}_{n,\,n-1}\hat{w}_{n-1})}\,d\hat{u}_1\ldots d\hat{u}_{n-1}$$

или

$$T_g\varphi(z',w_1,\ldots,w_{n-1})=\frac{\Delta}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\alpha_0(g_{nn})\,\alpha'(z',g^0)\cdot\varphi(z'\overline{g}^0,\hat{w}_1,\ldots,\hat{w}_{n-1}). \tag{7.65}$$

Напишем, наконец, формулу для оператора T_g в пространстве H_1. Пусть при преобразовании $z'\to z'\overline{g}^0$ элементы $x_{n-1,\,q}$ нижней строки матрицы z' преобразуются в элементы $\hat{x}_{n-1,\,q}$. Тогда, на основании (7.65), (7.51) и (7.53), мы получаем следующую формулу для оператора T_g в пространстве H_1:

$$T_g\psi(z',w_1,\ldots,w_{n-1})=\frac{\Delta}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\alpha_0(g_{nn})\,\alpha'(z',g^0)\cdot$$
$$\cdot\left|\frac{\sum_{s=1}^{n-2}\hat{x}_{n-1,\,s}\hat{w}_s+\hat{w}_{n-1}}{\sum_{s=1}^{n-2}x_{n-1,\,s}w_s+w_{n-1}}\right|^{\frac{n_m-1}{2}}\cdot\ \psi(z'\overline{g}^0,\hat{w}_1,\ldots,\hat{w}_{n-1}). \tag{7.66}$$

Преобразуем выражение

$$\frac{\sum_{s=1}^{n-2}\hat{x}_{n-1,\,s}\hat{w}_s+\hat{w}_{n-1}}{\sum_{s=1}^{n-2}x_{n-1,\,s}w_s+w_{n-1}}.$$

Как легко видеть, величины $\hat{x}_{n-1,\,s}$ можно выразить через элементы нижней строки матрицы $g'=z'g^0$ по формулам

$$\hat{x}_{n-1,\,s}=\frac{g'_{n-1,\,s}}{g'_{n-1,\,n-1}}. \tag{7.67}$$

При этом

$$g'_{n-1,\,n-1}=\sum_{s=1}^{n-2}x_{n-1,\,s}g^0_{s,\,n-1}+g^0_{n-1,\,n-1}. \tag{7.68}$$

Следовательно, в силу (7.64) и (7.67), имеем:

$$\sum_{s=1}^{n-2} \hat{x}_{n-1,\,s}\hat{w}_s + \hat{w}_{n-1} = \frac{1}{g'_{n-1,\,n-1}} \sum_{s=1}^{n-1} g'_{n-1,\,s}\,\hat{w}_s =$$
$$= \frac{b}{g'_{n-1,\,n-1}} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\sum_{p=1}^{n-1} x_{n-1,p}\, g^0_{ps}\right)\left(\sum_{q=1}^{n-1} \hat{g}_{sq}\, w_s\right). \qquad (7.69)$$

Но $g = (\hat{g}^0)^{*-1}$, а поэтому элементы матриц g^0 и $\hat{g}$ связаны соотношением

$$\sum_{s=1}^{n-1} g^0_{ps}\hat{g}_{qs} = \delta_{pq},$$

где δ_{pq} — символ Кронекера. Следовательно, формула (7.69) принимает вид:

$$\sum_{s=1}^{n-2} \hat{x}_{n-1,\,s}\hat{w}_s + \hat{w}_{n-1} = \frac{b\left(\sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1,\,s}w_s + w_{n-1}\right)}{\sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1,\,s}\, g^0_{s,\,n-1} + g^0_{n-1,\,n-1}},$$

а потому

$$\frac{\sum_{s=1}^{n-2} \hat{x}_{n-1,\,s}\hat{w}_s + \hat{w}_{n-1}}{\sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1,\,s}w_s + w_{n-1}} = \frac{b}{\sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1,\,s}\, g^0_{s,\,n-1} + g^0_{n-1,\,n-1}}. \qquad (7.70)$$

Из (7.62) и (7.70) получаем:

$$\left|\frac{\sum_{s=1}^{n-2} \hat{x}_{n-1,\,s}\hat{w}_s + \hat{w}_{n-1}}{\sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1,\,s}w_s + w_{n-1}}\right|^{\frac{n_m-1}{2}} \cdot \alpha'(z',\, g^0) = \prod_{p=1}^{m-1}\left[\frac{\beta_p z_p + \delta_p}{\sqrt{|\alpha_p\delta_p - \beta_p\gamma_p|}}\right]^{-n_p}.$$
$$\cdot \prod_{p=1}^{m-1} |\Lambda'_p|^{i\rho_p}\, |\Lambda'_1|^{n-2}\, |\Lambda'_2|^{n-4} \ldots |\Lambda'_{m-1}|^2 \cdot \left|\sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1,\,s}g^0_{s,\,n-1} + g^0_{n-1,\,n-1}\right|^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{n_m-1}{2}}. \qquad (7.71)$$

Но, как было установлено выше,

$$\left|\sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1,\,s}\, g^0_{s,\,n-1} + g^0_{n-1,\,n-1}\right| = \frac{|c|}{g_{nn}}\,|\Lambda_m|.$$

С другой стороны, $|\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \ldots \Lambda_m| = 1$, а потому

$$\left|\sum_{s=1}^{n-2} x_{n-1,\,s}\, g^0_{s,\,n-1} + g^0_{n-1,\,n-1}\right|^{\frac{1}{2}} = k\,|\Lambda'_1|^{-\frac{1}{2}}\,|\Lambda'_2|^{-\frac{1}{2}} \ldots |\Lambda'_{m-1}|^{-\frac{1}{2}}, \qquad (7.72)$$

где k — постоянный множитель, представляющий собой степень числа c.

Таким образом, формула (7.66) для оператора T_g в пространстве H_1 принимает вид

$$T_g\psi(z',\, w_1,\, \ldots,\, w_{n-1}) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\,\alpha_1(g_{nn})\,\tilde{\alpha}(z',\, g^0)\,\psi(z'\bar{g}^0,\, \hat{w}_1,\, \ldots,\, \hat{w}_{n-1}). \qquad (7.73)$$

Здесь $\alpha_1(g_{nn})$ — снова некоторая функция вида (7.20), а

$$\tilde{\alpha}(z', g^0) = \prod_{p=1}^{m-1} \left[\frac{\beta_p z_p + \delta_p}{\sqrt{|\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p|}} \right]^{-n_p} \cdot \prod_{p=1}^{m-1} |\Lambda_p'|^{i\rho_p} \cdot$$

$$\cdot |\Lambda_1'|^{(n-1)-\frac{3}{2}} |\Lambda_2'|^{(n-1)-\frac{7}{2}} \ldots |\Lambda_{m-1}'|^{\frac{3}{2}}. \tag{7.74}$$

Функция $\tilde{\alpha}(z', g^0)$ совпадает, как легко видеть, с функцией, задающей унитарное представление группы G_{n-1} из серии $d_{m-1,1}$.

Итак, при $g \in \mathfrak{A}^0$

$$T_g \psi(z', w_1, \ldots, w_{n-1}) = \frac{\alpha_1(g_{nn})}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} T_{g^0} \psi(z', \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}), \tag{7.75}$$

где T_{g^0} — унитарное представление унимодулярной группы G_{n-1} $(n-1)$-го порядка из серии $d_{m-1,1}$, определяемое равенством

$$T_{g^0} f(z') = \tilde{\alpha}(z', g^0) f(z', g^0), \tag{7.76}$$

а $\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}$ выражаются по формуле (7.64).

Доказательство того, что оператор A, перестановочный со всеми операторами T_g, $g \in \tilde{\mathfrak{A}}_n$, всегда кратен единичному оператору, завершается теперь дословно так же, как и для случая II.

Для завершения доказательства леммы 1 нам остается лишь рассмотреть случай $n = 2$.

При $n = 2$ мы имеем две серии представлений группы $\tilde{G}_2 : d_{0,2}$ и $d_{1,0}$. z' здесь отсутствует. Поэтому, как в случае серии $d_{0,2}$, так и в случае серии $d_{1,0}$ формула для оператора A в соответствующем функциональном пространстве принимает вид:

$$Af(w) = a(w) f(w), \tag{7.77}$$

где $a(w)$ — скалярная функция, определенная и ограниченная для почти всех w. Соотношение (7.29) означает в этом случае, что $a(bw) = a(w)$. Таким образом, $a(w)$ есть константа. Но тогда A есть оператор умножения на константу. Следовательно, неприводимость представления доказана и для этого случая.

Поступило
12. XI. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления классических групп, Труды Мат. ин-та им. Стеклова, 36, 1950.

[2] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 411—504.

[3] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Унитарные представления вещественных простых групп Ли, Доклады Ак. Наук СССР, XXXVI (1952), 461—463.

[4] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, М.— Л., 1948.

[5] Bargmann V., Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Annal of Math., 48 (1947), 568—640.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 249—268

Л. И. КАМЫНИН

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. II

СХОДИМОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе доказывается сходимость разностного процесса при замене дифференциального уравнения «урезанной» разностной системой на отрезке $-X \leqslant x \leqslant X$ и при выборе шага по x порядка $\frac{1}{X}$.

Настоящая работа является продолжением работы ([4]). Здесь доказываются следующие теоремы сходимости для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

ТЕОРЕМА 1. *Если* $\varphi(x)$ *непрерывна при* $-\infty < x < +\infty$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi(x)| \leqslant Ae^{C|x|\ln(1+|x|)}, \tag{2}$$

то решение системы

$$\frac{\partial u^{(h)}(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{h^2}\left(u^{(h)}(x+h, t) - 2u^{(h)}(x, t) + u^{(h)}(x-h, t)\right)$$
$$(x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots), \tag{3}$$

удовлетворяющее условию

$$u^{(h)}(x, 0) = \varphi(x), \tag{3*}$$

сходится при $h \to 0$ *к интегралу Пуассона*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi, \tag{4}$$

являющемуся решением уравнения теплопроводности (1).

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\varphi(x)$ *непрерывна при* $-\infty < x < +\infty$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi(x)| \leqslant Ae^{C|x|^{2-\delta}}, \tag{5}$$

то решение системы (3) *с «урезанными» начальными данными*

$$u_X^{(h)}(x, 0) = \begin{cases} \varphi(x), & |x| \leqslant X, \\ 0, & |x| > X, \end{cases} \quad (x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots)$$

сходится к интегралу Пуассона при $h \leqslant \frac{1}{X} \to 0$ *и* $X \to +\infty$. *Однако конечно-разностный процесс при более «редком» шаге* h *может расходиться: так,*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ X \to +\infty}} u_X^{(h)}(x, t)$$

не существует, если $h = \frac{1}{X^{1-\varepsilon}}$, $\varphi(x) = e^{|x|^{2-\delta}}$ *и* $\varepsilon > \delta > 0$.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $\varphi(x)$ *непрерывна при* $-\infty < x < +\infty$ *и справедлива оценка* (5), *то решение «урезанной»* $(x = -X, \ldots, -h, 0, h, \ldots, X)$ *системы* (3) *с нулевыми краевыми условиями*

$$u^{(h)}(\pm X, t) = 0 \tag{6}$$

и начальными данными

$$u^{(h)}(x, 0) = \varphi(x), \quad |x| \leqslant X,$$

сходится к интегралу Пуассона при $h \leqslant \frac{1}{X} \to 0$, $X \to +\infty$.

Из теорем 1, 2 и 3 следует, что если начальная функция $\varphi(x)$ непрерывна и удовлетворяет оценке (2), то решение системы (3), единственное в классе функций, подчиненных условию

$$|u^{(h)}(x, t)| \leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|x|}{h}\right]! \quad (x = \ldots, -2h, -h, 0, 2h, \ldots), \tag{7}$$

представимо в виде

$$u^{(h)}(nh, t) = \frac{\varphi(nh)}{\pi}\int_0^\pi \exp\left\{\left(-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{x}{2}\right)t\right\}dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(\varphi(nh+kh)+\varphi(nh-kh))\int_0^\pi \cos kx \cdot \exp\left\{\left(-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{x}{2}\right)t\right\}dx$$

$$(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

и сходится при $h \to 0$ к единственному в условиях теоремы А. Н. Тихонова решению (4) уравнения (1).

Если же начальная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Тихонова (5), но неравенству (2) не удовлетворяет, то конечно-разностный процесс может расходиться. Однако, рассматривая в этом случае либо систему (3) с «урезанными» начальными данными, либо «урезанную» систему (3) с добавлением нулевых краевых условий (6), можно добиться сходимости конечно-разностного процесса, беря шаг h достаточно малым по отношению к параметру «урезания» X.

Упомянутые результаты содержатся в работе ([3]).

Автор выражает благодарность С. Л. Соболеву за оказанное им внимание при написании настоящей работы.

§ 1. Теорема сходимости для бесконечной системы конечно-разностных уравнений (3)

ТЕОРЕМА. *Если* $\varphi(x)$ *непрерывна при* $-\infty < x < +\infty$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi(x)| \leqslant Ae^{C|x|\ln(1+|x|)},$$

где A *и* C — *произвольные постоянные, то решение системы*

$$\frac{\partial u^{(h)}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{h^2}\left(u^{(h)}(x+h,t) - 2u^{(h)}(x,t) + u^{(h)}(x-h,t)\right) \qquad (3)$$
$$(x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots),$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u^{(h)}(x,0) = \varphi(x),$$

сходится при $h \to 0$ *к интегралу Пуассона*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi,$$

являющемуся решением уравнения теплопроводности (1).

Доказательство. Решение системы (3) с указанными начальными данными имеет вид:

$$u^{(h)}(x,t) = e^{-\frac{2t}{h^2}} I_0\left(\frac{2t}{h^2}\right)\varphi(nh) + e^{-\frac{2t}{h^2}}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(\varphi(nh+kh) + \varphi(nh-kh) I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right)\right). \qquad (9)$$

Разобьем правую часть (9) на два слагаемых: $S_1(x,h)$ и $S_2(x,h)$ и введем обозначения:

$$S_1(x,h) = \sum_{k=1}^{\left[h^{-\left(1+\frac{1}{3+\delta}\right)}\right]} \varphi(nh \pm kh) e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right),$$

$$S_2(x,h) = \sum_{k=\left[h^{-\left(1+\frac{1}{2+\delta}\right)}\right]+1}^{+\infty} \varphi(nh \pm kh) e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right).$$

Докажем, что при $t \neq 0$

$$\lim_{h\to 0} S_1(x,h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(x\pm\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi \qquad (10)$$

(причем для $\varphi(x)$ допустимо условие $|\varphi(x)| \leqslant Ae^{C|x|^{2-\delta}}$, где A, C и $\delta > 0$ — постоянные), а

$$\lim_{h \to 0} S_2(x, h) = 0. \qquad (11)$$

Отметим предварительно равенство

$$\lim_{h \to 0} \varphi(x)\, e^{-\frac{2t}{h^2}} I_0\left(\frac{2t}{h^2}\right) = \lim_{h \to 0} \varphi(x) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{2t}{h^2}(1-\cos\vartheta)}\, d\vartheta = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \varphi(x), & t = 0; \end{cases}$$

очевидно,

$$\lim_{h \to 0} S_1(x, h) = \varphi(x) \quad \text{при } t = 0.$$

Для установления равенства (10) рассмотрим асимптотическое представление функции Бесселя от мнимого аргумента для больших индексов и аргументов. Используя интегральное представление [см. ([2]), стр. 200] для функции Бесселя мнимого аргумента

$$I_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty - \pi i}^{\infty + \pi i} e^{z \operatorname{ch} w - \nu w}\, dw,$$

методом перевала можно вывести [ср. ([2]), стр. 264—269] следующее асимптотическое представление:

$$I_\nu\left(\frac{\nu}{\operatorname{sh}\alpha}\right) \sim \frac{e^{\nu(\operatorname{cth}\alpha - \alpha)}}{\sqrt{2\pi\nu \operatorname{cth}\alpha}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{A_m}{\left(\frac{\nu}{2} \operatorname{cth}\alpha\right)^m},$$

где

$$A_0 = 1,\ A_1 = \frac{1}{8} - \frac{5}{24} \operatorname{th}^2\alpha,\ A_2 = \frac{3}{128} - \frac{77}{576} \operatorname{th}^2\alpha + \frac{385}{3456} \operatorname{th}^4\alpha, \ldots .$$

Если в асимптотическом разложении ограничиться первым членом, то ошибка, которая при этом появляется, будет того же порядка, что и второй член этого разложения [см. ([2]), стр. 269, 263]. В дальнейшем будет показано, что в рассматриваемом случае можно ограничиться первым членом соответствующего асимптотического разложения. Полагая $x = \frac{\nu}{\operatorname{sh}\alpha}$, получим:

$$I_\nu(x) = \frac{e^{\sqrt{x^2+\nu^2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{x^2+\nu^2}\left(\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + x^2}}{x}\right)^\nu} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{A_m}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\nu^2 + x^2}\right)^m}; \qquad (12)$$

это представление справедливо, если выполнено одно из следующих условий:

1) $\frac{x}{\nu} \ll 1$,

2) $\frac{x}{\nu} \gg 1$ [см. ([2]), стр. 252].

Итак, ограничиваясь первым членом асимптотического разложения (12) и полагая $\nu = \frac{\xi}{h}$, $x = \frac{2t}{h^2}$, мы получим представление:

$$e^{-\frac{2t}{h^2}} I_{\frac{\xi}{h}}\left(\frac{2t}{h^2}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\xi^2 h^2 + 4t^2)^{-\frac{1}{4}} \left(\sqrt{1 + \frac{\xi^2 h^2}{4t^2}} + \frac{\xi h}{2t}\right)^{-\frac{\xi}{h}} \exp\left\{\frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 h^2 + 4t^2} + 2t}\right\} h.$$

Замечая, что $|\xi| \leqslant \frac{1}{h^{\frac{1}{3+\delta}}}$, отметим некоторые оценки, которые будут использованы в дальнейшем:

$$(4t^2 + \xi^2 h^2)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2t}} - \frac{\xi^2 h^2}{4(2t)^{\frac{5}{2}}} + \ldots = \frac{1}{\sqrt{2t}} + O\left(\frac{h^{\frac{4+2\delta}{3+\delta}}}{t^{\frac{5}{2}}}\right); \tag{13}$$

$$\exp\left\{\frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 h^2 + 4t^2} + 2t}\right\} = \exp\frac{\xi^2}{4t} \cdot \left(1 - \frac{\xi^4 h^2}{64 t^3} + \ldots\right) =$$

$$= \exp\frac{\xi^2}{4t} + \exp\frac{\xi^2}{4t} \cdot O\left(\frac{h^{\frac{2+2\delta}{3+\delta}}}{t^3}\right); \tag{14}$$

$$\left(\sqrt{1 + \frac{\xi^2 h^2}{4t^2}} + \frac{\xi h}{2t}\right)^{-\frac{\xi}{h}} = e^{-\frac{\xi}{h}\ln\left(1 + \frac{\xi h}{2t} + \frac{\xi^2 h^2}{8t^2} + \cdots\right)} =$$

$$= e^{-\frac{\xi^2}{2t}}\left(1 - \frac{\xi^3 h}{4t^2} + \cdots\right) = e^{-\frac{\xi^2}{2t}}\left(1 + O\left(\frac{h^{\frac{\delta}{3+\delta}}}{t^2}\right)\right). \tag{15}$$

Заметим, что

$$\lim_{h\to 0} \sum_{\substack{\xi = kh \\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]} \frac{\varphi(x \pm \xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} h = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x \pm \xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi. \tag{16}$$

Действительно, в силу условий теоремы, при $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$ и фиксированном x

$$|\varphi(x \pm \xi)| \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \leqslant A_1 e^{-|\xi|^\sigma},$$

где A_1, $\sigma > 0$ — постоянные. Мажоранта $e^{-|\xi|^\sigma}$ монотонно убывает при $\xi \to +\infty$; поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется столь большое X, что

$$\sum_{\substack{\xi = X \\ \xi = kh \\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]} \frac{|\varphi(x \pm \xi)|}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} h \leqslant A_1 \int_{X-h}^{+\infty} e^{-|\xi|^\sigma} d\xi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Кроме того, в силу непрерывности $\varphi(x)$, найдется h_0 такое, что для всех $h \leqslant h_0$

$$\left| \sum_{\substack{\xi=kh \\ k=1,2,\ldots}}^{X} \frac{\varphi(x\pm\xi)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \cdot h - \int_0^X \frac{\varphi(x\pm\xi)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, (16) доказано.

Покажем теперь, что

$$\lim_{h\to 0} \left| \sum_{\substack{\xi=kh \\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]} \varphi(x\pm\xi) \left\{ \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}} - e^{-\frac{2t}{h^2}} I_{\frac{\xi}{h}}\left(\frac{2t}{h^2}\right) \cdot \frac{1}{h} \right\} h \right| = 0.$$

Доказательство будет состоять из двух частей. Вначале заменим

$$\exp\left\{-\frac{2t}{h^2}\right\} I_{\frac{\xi}{h}}\left(\frac{2t}{h^2}\right)$$

первым членом действительной части его асимптотического разложения, а затем оценим ошибку, которая будет сделана при такой замене.

Введем обозначения:

$$u_h(\xi, t) = (4t^2 + \xi^2 h^2)^{-\frac{1}{4}}, \qquad u_0(\xi, t) = \lim_{h\to 0} u_h(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2t}},$$

$$v_h(\xi, t) = \exp\left\{\frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 h^2 + 4t^2} + 2t}\right\}, \qquad v_0(\xi, t) = \lim_{h\to 0} v_h(\xi, t) = e^{\frac{\xi^2}{4t}},$$

$$w_h(\xi, t) = \left(\sqrt{1 + \frac{\xi^2 h^2}{4t^2}} + \frac{\xi h}{2t}\right)^{-\frac{\xi}{h}}, \qquad w_0(\xi, t) = \lim_{h\to 0} w_h(\xi, t) = e^{-\frac{\xi^2}{2t}}$$

и отметим тождество

$$u_h v_h w_h - u_0 v_0 w_0 = u_h w_h (v_h - v_0) + w_h v_0 (u_h - u_0) + u_0 v_0 (w_h - w_0). \quad (17)$$

Тогда ввиду (13), (14), (15) имеют место оценки:

$$\lim_{h\to 0} \sum_{\substack{\xi=kh \\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]} \frac{|\varphi(x\pm\xi)|}{\sqrt{2\pi}} |u_h(\xi, t) w_h(\xi, t) (v_h(\xi, t)) - v_0(\xi, t))| h =$$

$$= O\left(\lim_{h\to 0} \sum_{\substack{\xi_1=kh \\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]} \frac{|\varphi(x\pm\xi)|}{\sqrt{2\pi}} |u_0 w_0 (v_h - v_0)| \cdot h \right) =$$

$$= O\left(\lim_{h\to 0} \sum_{\substack{\xi=kh \\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]} \frac{|\varphi(x\pm\xi)|}{2\sqrt{\pi t\, t^3}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} h \cdot h^{\frac{2+2\delta}{3+\delta}} \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{\frac{2+0\delta}{3+\delta}} \cdot O\left(\int_0^{+\infty} \frac{|\varphi(x\pm\xi)|\, e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t\, t^3}} d\xi \right) = 0.$$

Последняя оценка следует из предположенного ограничения на рост $|\varphi(x)|$.

Из тех же соображений имеем далее:

$$\lim_{h\to 0}\sum_{\substack{\xi=kh\\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]}\frac{|\varphi(x\pm\xi)|}{\sqrt{2\pi}}|w_h(\xi,t)\,v_0(\xi,t)\,(u_h(\xi,t)-u_0(\xi,t))|\cdot h=$$

$$=O\left(\lim_{h\to 0}\sum_{\substack{\xi=kh\\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]}\frac{|\varphi(x\pm\xi)|\,e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{8\sqrt{\pi t^3}}\,h\cdot h^{\frac{4+2\delta}{3+\delta}}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}h^{\frac{4+2\delta}{3+\delta}}\cdot O\left(\int_0^{+\infty}\frac{|(\varphi(x\pm\xi)|}{8\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\,d\xi\right)=0$$

и, наконец,

$$\lim_{h\to 0}\sum_{\substack{\xi=kh\\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]}\frac{|\varphi(x\pm\xi)|}{\sqrt{2\pi}}|u_0(\xi,t)\,v_0(\xi,t)\,(w_h(\xi,t)-w_0(\xi,t))|\cdot h=$$

$$=O\left(\lim_{h\to 0}\sum_{\substack{\xi=kh\\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]}\frac{|\varphi(x\pm\xi)|\,e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}\,t^2}\,h\cdot h^{\frac{\delta}{3+\delta}}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}h^{\frac{\delta}{3+\delta}}\cdot O\left(\int_0^{+\infty}\frac{|\varphi(x\pm\xi)|\,e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}\,t^2}\,d\xi\right)=0.$$

Таким образом, используя тождество (17) и приведенные выше оценки (13), (14), (15), выводим, что

$$\lim_{h\to 0}\sum_{\substack{\xi=kh\\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]}\frac{\varphi(x\pm\xi)}{\sqrt{2\pi}}u_h(\xi,t)\,v_h(\xi,t)\,w_h(\xi,t)\cdot h=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x\pm\xi)}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\,d\xi.$$

Осталось показать, что при замене в правой части (9) бесселевых функций от мнимого аргумента соответствующими асимптотическими разложениями можно ограничиться лишь первыми членами. Для этого, имея в виду, что ошибка, совершаемая при подобной замене, будет того же порядка, что и первый из отбрасываемых членов разложения, оценим второй член ряда, стоящего в правой части (12):

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)A_1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\nu^2+x^2}\right)}=\frac{3-\dfrac{5\xi^2}{\xi^2+\dfrac{4t^2}{h^2}}}{\dfrac{8}{h}\sqrt{\xi^2+\dfrac{4t^2}{h^2}}}=O(h^2). \tag{18}$$

Тогда, подставляя в (9) вместо бесселевых функций от мнимого аргумента вторые члены их асимптотических представлений и переходя к пределу при $h \to 0$, получим, ввиду (18):

$$\lim_{h\to 0} \sum_{\substack{\xi = kh \\ k=1,2,\ldots}}^{\left[h^{-\frac{1}{3+\delta}}\right]} \frac{\varphi(x \pm \xi)}{\sqrt{2\pi}} u_h(\xi, t)\, v_h(\xi, t)\, w_h(\xi, t) \frac{3 - \dfrac{5\xi^2}{\xi^2 + \dfrac{4t^2}{h^2}}}{\dfrac{1}{h}\sqrt{\xi^2 + \dfrac{4t^2}{h^2}}} h =$$

$$= \lim_{h\to 0} h^2 \cdot O\left(\int_0^{+\infty} \frac{|\varphi(x \pm \xi)|}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi\right) = 0.$$

Эта оценка завершает доказательство равенства (10).

Замечание. Проведенное доказательство равенства (10) сохраняет силу, если непрерывная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет более слабому ограничению на рост:

$$|\varphi(x)| \leqslant Ae^{C|x|^{2-\delta}}$$

Докажем соотношение (11). Разобьем $S_2(x, h)$ на две суммы:

$$S_{2,1}(x, h) = \sum_{k=\left[h^{-\left(1+\frac{1}{3+\delta}\right)}\right]}^{\left[\frac{1}{h^4}\right]-2} \varphi(nh \pm kh)\, e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right),$$

$$S_{2,2}(x, h) = \sum_{k=\left[\frac{1}{h^4}\right]-1}^{+\infty} \varphi(nh \pm kh)\, e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right).$$

Для доказательства нам понадобятся следующие неравенства:

$$\exp\left\{-\frac{2t}{h^2}\right\} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) \leqslant \exp\left\{-k \ln \frac{kh^2 + \sqrt{k^2h^4 + 4t^2}}{2t} + \frac{\sqrt{k^2h^4 + 4t^2} - 2t}{h^2}\right\} \quad (19)$$

(неравенство Каптейна [см. ([2]), стр. 295]) и

$$A \ln(A + \sqrt{1 + A^2}) - (\sqrt{1 + A^2} - 1) > \frac{A}{2} \ln(A + \sqrt{1 + A^2}). \quad (20)$$

Докажем неравенство (20). Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} y_1(A) &= \alpha A \ln(A + \sqrt{1 + A^2}) \\ y_2(A) &= \sqrt{1 + A^2} - 1 \end{aligned}\right\}, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} y_1'(A) &= \alpha\left(\ln(A + \sqrt{1 + A^2}) + \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}}\right) \\ y_2'(A) &= \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} \end{aligned}\right\}, \quad y_1'(0) = y_2'(0) = 0,$$

$$y_1''(A) = \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} + \frac{1}{(1 + A^2)\sqrt{1 + A^2}}\right);$$

$$y_2''(A) = \frac{1}{(1+A^2)\sqrt{1+A^2}}, \quad y_1''(A) - y_2''(A) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + A^2}} - \frac{1-\alpha}{(1+A^2)\sqrt{1+A^2}} > 0,$$

если $\alpha > \frac{1-\alpha}{1+A^2}$. Полагая $\alpha = \frac{1}{2}$, получим (20). Следствием (20) является неравенство

$$A \ln (A + \sqrt{1+A^2}) - (\sqrt{1+A^2} - 1) \geqslant \sqrt{1+A^2} - 1. \tag{21}$$

Из (21), полагая $A = \frac{kh^2}{2t}$, легко получим.

$$-k \ln \frac{kh^2 + \sqrt{k^2h^4 + 4t^2}}{2t} + \frac{\sqrt{k^2h^4+4t^2} - 2t}{h^2} \leqslant - \frac{k^2h^2}{\sqrt{k^2h^4+4t^2} + 2t}, \tag{22}$$

а из (20) находим:

$$-k \ln \frac{kh^2 + \sqrt{k^2h^4+4t^2}}{2t} + \frac{\sqrt{k^2h^4+4t^2} - 2t}{h^2} \leqslant - \frac{k}{2} \ln \frac{kh^2 + \sqrt{k^2h^4+4t^2}}{2t}. \tag{23}$$

Наконец, отметим неравенство

$$kh^2 + \sqrt{4t^2 + k^2h^4} \geqslant \sqrt{4t^2+k^2h^4}. \tag{24}$$

Для фиксированного n можно выбрать h столь малым, чтобы

$$nh < kh \text{ при } k > \frac{1}{h^{1+\frac{-1}{3+\delta}}}. \tag{25}$$

Тогда из неравенства Каптейна (19), используя (22) и (25), получим:

$$|\varphi(nh \pm kh)| e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) \leqslant A \exp\left\{\frac{-k^2h^2}{\sqrt{k^2h^4+4t^2}+2t} + 2Ckh \ln(1+2kh)\right\}. \tag{26}$$

Представим $S_{2,1}(x, h)$ в виде

$$S_{2,1}(x, h) = S_{2,11}(x, h) + S_{2,12}(x, h),$$

где

$$S_{2,11}(x, h) = \sum_{k=\left[h^{-\left(1+\frac{1}{3+\delta}\right)}\right]}^{\left[\frac{1}{h^2}\right]-1} \varphi(nh \pm kh) e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right),$$

$$S_{2,12}(x, h) = \sum_{k=\left[\frac{1}{h^2}\right]}^{\left[\frac{1}{h^4}\right]-2} \varphi(nh \pm kh) e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right).$$

Оценим $S_{2,11}(x, h)$; для этого отметим неравенство

$$\frac{k^2h^2}{\sqrt{k^2h^4+4t^2}+2t} \geqslant \frac{k^2h^2}{\sqrt{1+4t^2}+2t}, \tag{27}$$

справедливое для $k \leqslant \frac{1}{h^2}$.

Используя (25) и (27), мы видим, что

$$\frac{-k^2h^2}{\sqrt{k^2h^4+4t^2}+2t} + 2Ckh \ln(1+2kh) \leqslant -k^2h^2\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}+2t} - \frac{2C}{kh}\ln(1+2kh)\right)$$

и

$$\frac{2C}{kh}\ln(1+2kh) \leqslant 2Ch^{\frac{1}{3+\delta}}\ln(1+2kh) \tag{28}$$

для $k \geqslant \frac{1}{h^{1+\frac{1}{3+\delta}}}$. Так как

$$\lim_{h\to 0} h^{\frac{1}{3+\delta}}\ln(1+2kh) = 0,$$

то для достаточно малых h будет справедливо:

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}+2t} - 2Ch^{\frac{1}{3+\delta}}\ln(1+2kh) > \frac{1}{2(\sqrt{1+4t^2}+2t)}. \tag{29}$$

Из (26) последовательным применением (27), (28) и (29) получим оценку:

$$|S_{2,11}(x, h)| \leqslant A \sum_{k=\left[h^{-\left(1+\frac{1}{3+\delta}\right)}\right]}^{[h^{-2}]} \exp\left\{\frac{-k^2h^2}{2(\sqrt{1+4t^2}+2t)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant A\left(h^{-2} - h^{-\left(1+\frac{1}{3+\delta}\right)}\right)\exp\left\{\frac{-h^{-\frac{2}{3+\delta}}}{2(\sqrt{1+4t^2}+2t)}\right\}.$$

Очевидно,

$$\lim_{h\to 0} S_{2,11}(x, h) = 0.$$

Оценим $S_{2,12}(x, h)$. Отметим, что при $k = \frac{1}{h^{2+\alpha}}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$,

$$\frac{k^2h^2}{\sqrt{k^2h^4+4t^2}+2t} - 2Ckh\ln(1+2kh) =$$

$$= \frac{1}{h^{2+\alpha}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2h^{2\alpha}}+2th^{\alpha}} - 2Ch\ln\left(1+\frac{2}{h^{1+\alpha}}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2h^{2\alpha}}+2th^{\alpha}} - 2Ch\ln\left(1+\frac{2}{h^3}\right)\right); \tag{30}$$

но

$$\lim_{h\to 0} h\ln\left(1+\frac{2}{h^3}\right) = 0,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+4t^2h^{2\alpha}}+2th^{\alpha}} = \begin{cases} 1, & \alpha \neq 0. \\ \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}+2t}, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Поэтому при достаточно малых h имеет место неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t^2h^4}+2th^2} - 2Ch\ln\left(1+\frac{2}{h^3}\right) \geqslant \frac{1}{2(\sqrt{1+4t^2}+2t)}. \tag{31}$$

Из (26), применяя (30) и (31), получим:

$$|S_{2,12}(x,\ h)| \leqslant A \sum_{k=[h^{-2}]}^{[h^{-4}]} \exp\left\{-\frac{\gamma}{2h^2}\right\} = A \exp\left\{-\frac{\gamma}{2h^2}\right\} ([h^{-4}] - [h^{-2}]),$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}+2t}.$$

Очевидно,

$$\lim_{h\to 0} S_{2,12}(x,\ h) = 0.$$

Оценим $S_{2,2}(x,\ h)$. Из неравенства Каптейна (19), используя (23), 24) и (25), получим:

$$e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) |\varphi(nh \pm kh)| \leqslant A \exp\left\{-\frac{k}{4} \ln \frac{1+\frac{k^2h^4}{4t^2}}{(1+2kh)^{\frac{Ch}{2}}}\right\}. \tag{32}$$

Пусть $h < \frac{2}{C}$; тогда

$$\frac{1+\frac{k^2h^4}{4t^2}}{(1+2kh)^{\frac{Ch}{2}}} \geqslant \frac{1+\frac{k^2h^4}{4t^2}}{1+2kh}. \tag{33}$$

Рассмотрим функцию

$$y(x) = \frac{1+\frac{x^2h^4}{4t^2}}{1+2xh}, \qquad \lim_{\substack{x\to+\infty \\ h>0}} y(x) = \infty.$$

Найдем те x, при которых $y(x) \geqslant 2$. Для этого необходимо, чтобы

$$x^2h^4 - 16t^2hx - 4t^2 > 0.$$

Корнями

$$f(x) = x^2h^4 - 16t^2hx - 4t^2$$

будут

$$x_{1,2} = \frac{8t^2 \pm 2t\sqrt{16t^2+h^2}}{h^3};$$

$$f'(x) = 2h^4x - 16t^2h,$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{при } x > \frac{8t^2}{h^3};$$

для $\quad x > x_2 = \dfrac{8t^2+2t\sqrt{16t^2+h^2}}{h^3} \quad$ $y(x)$ монотонно возрастает и при $h < \min\left(\frac{3t}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{18t^2},\ \frac{2}{C}\right)$ и $k \geqslant \frac{1}{h^4}$

$$\ln \frac{1+\frac{k^2h^4}{4t^2}}{(1+2kh)^{\frac{Ch}{2}}} \geqslant \ln 2. \tag{34}$$

Таким образом, из (32) и (34) получаем:

$$|S_{2,2}(x, h)| \leqslant A \sum_{k=[h^{-4}]-1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{k}{4}\ln 2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant A \int_{[h^{-4}]}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{x\ln 2}{4}\right\} dx = \frac{4A}{\ln 2}\exp\left\{-\frac{\ln 2}{4h^4}\right\}$$

(последнее соотношение имеет место ввиду монотонности $y(x)$); очевидно,

$$\lim_{h\to 0} S_{2,2}(x, h) = 0.$$

Доказательство теоремы закончено.

§ 2. Теорема сходимости для бесконечной системы конечно-разностных уравнений с «урезанными» начальными данными

Из вышеизложенного можно сделать следующие выводы относительно единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности (1) и соответствующей системы конечно-разностных дифференциальных уравнений (3):

А. Если начальная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|\to+\infty} \varphi(x)\, e^{-Cx^2} = 0,$$

то:

1) уравнение теплопроводности (1) всегда имеет единственное в классе функций, определяемом теоремой единственности А. Н. Тихонова [1], решение, выражающееся интегралом Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi;$$

2) конечно-разностная система (3) может не иметь единственного решения.

Б. Если начальная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$|\varphi(x)| \leqslant A\left[(1-\varepsilon)\frac{|x|}{h}\right]!,$$

то:

1) уравнение теплопроводности (1) всегда имеет единственное в соответствующем классе функций решение, выражающееся интегралом Пуассона;

2) конечно-разностная система (3) также всегда имеет единственное решение в соответствующем классе функций.

В. Если $\varphi(x)$ не удовлетворяет условию Б, но удовлетворяет условию А, то метод конечных разностей в этом случае, очевидно, не применим.

В связи с этим оказывается целесообразным рассматривать задачу Коши с «урезанными» начальными данными.

Точнее, будем искать решение системы (3), удовлетворяющее следующим начальным данным:

$$u^{(h)}(x, 0) = \varphi^X(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } |x| \leqslant X, \\ 0, & \text{если } |x| > X, \end{cases}$$

$$(x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots),$$

где h — шаг разности, а X — «параметр урезания» — число, кратное h.

Предположим, что $\varphi(x)$, удовлетворяя условию А, не удовлетворяет условию Б. Очевидно, $\varphi^X(x)$ уже удовлетворяет условию Б.

Тогда, согласно теореме § 3 работы автора ([4]), решение будет иметь вид:

$$u_X^{(h)}(x, t) = \varphi^X(x)\, e^{-\frac{2t}{h^2}} I_0\left(\frac{2t}{h^2}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\varphi^X(x+kh) + \varphi^X(x-kh)\right) e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) \tag{35}$$

$$(x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots).$$

Легко видеть, что ряды в правой части (35) являются, ввиду определения $\varphi^X(x)$, конечными суммами.

Соотношение (35) можно переписать также в виде:

$$u_X^{(h)}(x, t) = \varphi(x)\, e^{-\frac{2t}{h^2}} I_0\left(\frac{2t}{h^2}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\frac{X-x}{h}} \varphi(x+kh)\, e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) + \sum_{k=1}^{\frac{X+x}{h}} \varphi(x-kh)\, e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right), \tag{36}$$

если предполагать, что $x = -X, \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots, X$.

Следующее утверждение устанавливает то соотношение между «шагом h» и «параметром урезания» X, при котором существует предел

$$u(x, t) = \lim_{\substack{X \to \infty \\ h \to 0}} u_X^{(h)}(x, t),$$

являющийся решением поставленной задачи Коши для уравнения теплопроводности (1).

ТЕОРЕМА. *Пусть $u_X^{(h)}(x, t)$ есть решение бесконечной системы конечно-разностных дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial u^{(h)}(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{h^2}\left(u^{(h)}(x+h, t) - 2u^{(h)}(x, t) + u^{(h)}(x-h, t)\right) \tag{3}$$

$$(x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots),$$

удовлетворяющее урезанным начальным данным

$$u_X^{(h)}(x, 0) = \begin{cases} \varphi(x), & |x| \leqslant X, \\ 0, & |x| > X. \end{cases}$$

Тогда если $\varphi(x)$ *непрерывна при* $-\infty < x < +\infty$ *и подчинена условию*

$$|\varphi(x)| \leqslant A e^{C|x|^{2-\delta}},$$

где $A > 0$, $\delta > 0$ *и* C *— постоянные, то существует предел*

$$\lim_{\substack{h \leqslant \frac{1}{X} \\ X \to +\infty}} u_X^{(h)}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi.$$

Однако, если

$$\varphi(x) = e^{C|x|^{2-\delta}},$$

то конечно-разностный процесс может расходиться при $h = \frac{1}{X^{1-\varepsilon}} \to 0$, *где* $\varepsilon > \delta > 0$.

Доказательство. Решение $u_X^{(h)}(x, t)$ системы (3), удовлетворяющее «урезанным» начальным данным, имеет вид (36); это соотношение для данного случая можно переписать в форме:

$$u_X^{(h)}(nh, t) = \varphi(nh) e^{-\frac{2t}{h^2}} I_0\left(\frac{2t}{h^2}\right) +$$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{\frac{X}{h}-n} \varphi(nh+kh) I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) + \sum_{k=1}^{\frac{X}{h}+n} \varphi(nh-kh) \cdot I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right)\right) \exp\left\{-\frac{2t}{h^2}\right\}.$$

Введем обозначения·

$$S_1(x, h) =$$
$$= \varphi(nh) e^{-\frac{2t}{h^2}} I_0\left(\frac{2t}{h^2}\right) + \sum_{k=1}^{\left[h^{-\left(1+\frac{1}{3+\delta}\right)}\right]-1} (\varphi(nh+kh) + \varphi(nh-kh)) I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) e^{-\frac{2t}{h^2}},$$

$$S_2(x, h) = \sum_{k=\left[h^{-\left(1+\frac{1}{3+\varepsilon}\right)}\right]}^{\frac{X}{h} \mp n} \varphi(nh \pm kh) I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) e^{-\frac{2t}{h^2}}$$

$$(x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots).$$

Как мы видели выше (см. замечание к теореме § 1), буквальным повторением доказательства первой части теоремы сходимости § 1 устанавливается, что

$$\lim_{h\to 0} S_1(x, h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\, d\xi.$$

Оценим $S_2(x, h)$. Из неравенства Каптейна (19), используя (22) и (25), получаем, что

$$|S_2(x, h)| \leqslant \sum_{k=\left[h^{-\left(1+\frac{1}{3+\varepsilon}\right)}\right]}^{\frac{2X}{h}} \exp\left\{\frac{-k^2h^2}{\sqrt{k^2h^4+4t^2}+2t} + 4C(kh)^{2-\delta}\right\}.$$

Но

$$4C(kh)^{2-\delta} \leqslant 4C(kh)^2 \frac{1}{(kh)^{\delta}} \leqslant 4C(kh)^2 \cdot h^{\frac{\delta}{3+\varepsilon}}$$

для $k \geqslant \left[h^{-\left(1+\frac{1}{3+\varepsilon}\right)}\right]$, откуда, используя (27), получим:

$$|S_2(x, h)| \leqslant \sum_{k=\left[h^{-\left(1+\frac{1}{3+\varepsilon}\right)}\right]}^{2[h^{-2}]} \exp\left\{-k^2h^2\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}+2t} - 4Ch^{\frac{\delta}{3+\varepsilon}}\right)\right\}.$$

Но для достаточно малого h и $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}+2t} - 4Ch^{\frac{\delta}{3+\varepsilon}} \geqslant \frac{1}{2\left(\sqrt{1+4t^2}+2t\right)},$$

поэтому

$$|S_2(x, h)| \leqslant \sum_{k=\left[h^{-\left(1+\frac{1}{3+\varepsilon}\right)}\right]}^{2[h^{-2}]} \exp\left\{\frac{-k^2h^2}{2\left(\sqrt{1+4t^2}+2t\right)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(2[h^{-2}] - \left[h^{-\left(1+\frac{1}{3+\varepsilon}\right)}\right]\right) \exp\left\{\frac{-1}{2h^{\frac{2}{3+\varepsilon}}\left(\sqrt{1+4t^2}+2t\right)}\right\},$$

откуда следует, что

$$\lim_{\substack{h=\frac{1}{X}\\ X\to+\infty}} S_2(x, h) = 0;$$

таким образом первая часть теоремы § 2 доказана.

Для доказательства второй части отметим, что

$$u_X^{(h)}(0, t) = e^{-\frac{2t}{h^2}} I_0\left(\frac{2t}{h^2}\right) + 2\sum_{k=1}^{\frac{X}{h}} \exp\left\{C(kh)^{2-\delta} - \frac{2t}{h^2}\right\} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right).$$

Известное асимптотическое представление функции Бесселя от мнимого аргумента приводит к равенству:

$$e^{-\frac{2t}{h^2}} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) = \frac{h\cdot\exp\left\{-k\ln\frac{\sqrt{k^2h^4+4h^2}+kh^2}{2t} + \frac{\sqrt{k^2h^4+4t^2}-2t}{h^2}\right\}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{k^2h^4+4t^2}}\cdot$$

$$\cdot\left(1+O\left(\frac{h^2}{\sqrt{k^2h^4+4t^2}}\right)\right),$$

справедливому при большом индексе k и большом аргументе $\frac{2t}{h^2}$, если только выполнено одно из двух соотношений:

$$1)\quad \frac{2t}{h^2} : k \ll 1,$$

$$2)\quad \frac{2t}{h^2} : k \gg 1.$$

Отметим неравенство

$$\sqrt{4t^2+k^2h^4} + kh^2 \leqslant \sqrt{4t^2+8k^2h^4} \quad \text{при } k > \frac{T}{h^2\sqrt{2}}. \tag{37}$$

Действительно, возводя в квадрат обе части (37), получим:

$$4t^2 + k^2h^4 + 2kh^2\sqrt{4t^2+k^2h^4} + k^2h^4 \leqslant 8k^2h^4 + 4t^2, \quad \sqrt{4t^2+k^2h^4} \leqslant 3kh^2,$$

откуда $k \geqslant \frac{t}{h^2\sqrt{2}}$.

Таким образом, используя (37) и неравенство

$$-k\ln\frac{\sqrt{k^2h^4+4t^2}+kh^2}{2t} + \frac{\sqrt{k^2h^4+4t^2}-2t}{h^2} \geqslant -k\ln\frac{\sqrt{k^2h^4+4t^2}+kh^2}{2t},$$

мы получим при $k > \frac{T}{h^2\sqrt{2}}$:

$$\frac{h\exp\left\{-k\ln\frac{\sqrt{4t^2+k^2h^4}+kh^2}{2t} + \frac{\sqrt{k^2h^4+4t^2}-2t}{h^2} + C(kh)^{2-\delta}\right\}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{k^2h^4+4t^2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{h}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{k^2h^4+4t^2}}\exp\left\{-\frac{k}{2}\ln\left(1+\frac{2k^2h^4}{t^2}\right) + C(kh)^{2-\delta}\right\}.$$

Полагая $kh = X$, $h = \frac{1}{X^{1-\varepsilon}}$, найдем, ввиду $\frac{2t}{h^2} : k = \frac{2t}{X^\varepsilon} \to 0$:

$$\varphi(X)\exp\{-2tX^{2(1-\varepsilon)}\} I_{X^{2-\varepsilon}}(2tX^{2(1-\varepsilon)}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\exp\left\{-\frac{X^{2-\varepsilon}}{2}\ln\left(1+\frac{2X^{2\varepsilon}}{t^2}\right) + CX^{2-\delta}\right\}}{\sqrt{2\pi}X^{1-\varepsilon}\sqrt[4]{X^{2\varepsilon}+4t^2}}\left(1+O\left(\frac{1}{X^{2(1-\varepsilon)}\sqrt{X^{2\varepsilon}+4t^2}}\right)\right).$$

Очевидно,

$$\lim_{\substack{h=\frac{1}{X^{1-\varepsilon}} \\ X\to+\infty}} u_X^{(h)}(0, t) = \infty,$$

если только $\varepsilon > \delta$.

Замечание. Из этих рассуждений мы можем получить новый результат для слу.ая, когда

$$|\varphi(x)| \leqslant Ae^{C|x|\ln(1+|x|)}. \tag{2}$$

Если неравенство (2) справедливо, то решение $u_X^{(h)}(x, t)$ бесконечной системы конечно-разностных уравнений (3) с урезанными начальными данными сходится при любом соотношении между h и X к интегралу Пуассона, если только $X \to +\infty$, $h \to 0$. Это замечание, как мы видим, дополняет теорему § 1.

§ 3. Теорема сходимости для «урезанной» системы конечно-разностных уравнений с нулевыми краевыми условиями

ТЕОРЕМА. *Если $\varphi(x)$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$ и справедлива оценка*

$$|\varphi(x)| \leqslant Ae^{C|x|^{2-\delta}}, \tag{5}$$

то решение «урезанной» системы

$$\begin{gathered}\frac{\partial u^{(h)}(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{h^2}\left(u_X^{(h)}(x+h, t) - 2u_X^{(h)}(x, t) + u_X^{(h)}(x-h, t)\right) \\ (x = -X, \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots, X)\end{gathered} \tag{3'}$$

с нулевыми краевыми условиями

$$u_X^{(h)}(\pm X, t) = 0$$

и начальными данными

$$u_X^{(h)}(x, 0) = \varphi(x), \quad |x| \leqslant X - h,$$

сходится при $h \leqslant \frac{1}{X} \to 0$ $(X \to +\infty)$ к интегралу Пуассона

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\, d\xi.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(x) \geqslant 0$ (в противном случае $\varphi(x)$ можно представить в виде разности двух неотрицательных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ и провести рассуждения отдельно для $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$). Пусть $\varphi_X(x)$ — неотрицательная, непрерывная при $-\infty < x < +\infty$ функция, подчиненная условию

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \varphi(x), & |x| \leqslant X - h, \\ 0, & |x| \geqslant X. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\lim_{X\to+\infty} \varphi_X(x) = \varphi(x). \tag{38}$$

Построим систему функций $\varphi_X^k(x)$, $\varphi_X^{-k}(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$:

$$\varphi_X^k(x) = (-1)^k \varphi_X((-1)^k(x-2kX)),$$

$$\varphi_X^{-k}(x) = (-1)^k \varphi_X((-1)^k(x+2kX)).$$

Функция

$$\overline{\varphi}_X(x) = \varphi_X(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi_X^k(x) + \varphi_X^{-k}(x))$$

будет периодической с периодом $4X$, причем такой, что решение $U^{(h)}(x, t)$ бесконечной системы (3), удовлетворяющее начальным данным

$$U^{(h)}(x, 0) = \overline{\varphi}_X(x) \quad (x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots),$$

обращается в нуль при $x = \pm(2k+1)X$:

$$U^{(h)}(\pm(2k+1)X, t) = 0.$$

Таким образом,

$$u_X^{(h)}(x, t) = U^{(h)}(x, t) \text{ при } |x| \leqslant X.$$

Рассмотрим, наконец, серию решений

$$u_k^{(h)}(x, t), \quad u_0^{(h)}(x, t), \quad u_{-k}^{(h)}(x, t) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

системы (3), удовлетворяющих соответственно начальным данным

$$u_k^{(h)}(x, 0) = \varphi_X^{(k)}(x),$$

$$u_0^{(h)}(x, 0) = \varphi_X(x),$$

$$u_{-k}^{(h)}(x, 0) = \varphi_X^{-k}(x).$$

Очевидно,

$$U^{(h)}(x, t) = u_0^{(h)}(x, t) + \sum_{k=1}^{+\infty} (u_k^{(h)}(x, t) + u_{-k}^{(h)}(x, t)).$$

В силу выбора начальных функций $\varphi_X^{\pm k}(x)$ и свойств системы (3), решения $u_{\pm k}^{(h)}(x, t)$ обладают следующими свойствами:

1) $u_{\pm k}^{(h)}(x, t) \begin{cases} \geqslant 0 \text{ при } k \text{ четном}, \\ \leqslant 0 \text{ при } k \text{ нечетном, если } |x| \leqslant X; \end{cases}$

2) $|u_{\pm(k+1)}^{(h)}(x, t)| \leqslant |u_{\pm k}^{(h)}(x, t)|$ при $|x| < X$.

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^{(h)}(x, t) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} u_{-k}^{(h)}(x, t)$$

суть сходящиеся знакопеременные ряды с монотонно убывающими членами, и для этих рядов справедлива оценка:

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} u_{\pm k}^{(h)}(x, t) \right| \leqslant |u_{\pm 1}^{(h)}(x, t)| \quad \text{при } |x| < X.$$

Если показать, что

$$\lim_{\substack{h<\frac{1}{X}\\ X\to+\infty}} |u_{\pm 1}^{(h)}(x, t)| = 0 \quad (|x|<X), \tag{39}$$

то для завершения доказательства теоремы достаточно будет установить существование предела

$$\lim_{\substack{h<\frac{1}{X}\\ X\to+\infty}} u_X^{(h)}(x, t) = \lim_{\substack{h<\frac{1}{X}\\ X\to+\infty}} (u_{-1}^{(h)}(x, t) + u_0^{(h)}(x, t) + u_{+1}^{(h)}(x, t) = \\ = \lim_{\substack{h<\frac{1}{X}\\ X\to+\infty}} u_0^{(h)}(x, t).$$

Но $u_0^{(h)}(x, t)$ есть решение системы (3) с урезанными начальными данными

$$u_0^{(h)}(x, 0) = \varphi_X(x)$$

и по теореме сходимости § 2, в силу оценки (5),

$$\lim_{\substack{h<\frac{1}{X}\\ X\to+\infty}} u_0^{(h)}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi.$$

Итак, покажем справедливость (39). Будем считать x фиксированным, а X столь большим, что

$$|x| \leqslant \frac{X}{2}. \tag{40}$$

Тогда, ввиду (36) и определения $\varphi_{\frac{1}{X}}(x)$,

$$u_1^{(h)}(x, t) = -e^{-\frac{2t}{h^2}} \sum_{k=\frac{X-x}{h}}^{\frac{3X-x}{h}} \varphi_X(x+kh-2X) I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right)$$

$$(x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots).$$

В силу (40) и оценки (5) условия теоремы, полагая $X = \frac{1}{h}$, получим

$$|u_1^{(h)}(x, t)| \leqslant A \sum_{k=\frac{1}{2}[h^{-2}]}^{4[h^{-2}]} \exp\left\{C\left(kh - \frac{3X}{2}\right)^{2-\delta}\right\} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) \exp\left\{-\frac{2t}{h^2}\right\} \leqslant \\ \leqslant A \sum_{k=\frac{1}{2}[h^{-2}]}^{4[h^{-2}]} \exp\{C(kh)^{2-\delta}\} I_k\left(\frac{2t}{h^2}\right) \exp\left\{-\frac{2t}{h^2}\right\}.$$

Из неравенства Каптейна (19), используя (22) и (37), найдем:

$$|u_1^{(h)}(x, t)| \leqslant A \sum_{k=\frac{1}{2}[h^{-2}]}^{4[h^{-2}]} \exp\left\{\frac{-k^2h^2}{\sqrt{k^2h^4+4t^2}+2t}+C(kh)^{2-\delta}\right\}.$$

Но

$$C(kh)^{2-\delta}=\frac{C\,(kh)^2}{(kh)^\delta}\leqslant 2^\delta\,C(kh)^2\,h^\delta,$$

откуда, используя (27), получим:

$$|u_1^{(h)}(x, t)| \leqslant A \sum_{k=\frac{1}{2}[h^{-2}]}^{4[h^{-2}]} \exp\left\{-k^2h^2\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}+2t}-2^\delta Ch^\delta\right)\right\}.$$

Но для достаточно малого h и $0<t_0\leqslant t\leqslant T$

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}+2t}-2^\delta Ch^\delta \geqslant \frac{1}{2\,(\sqrt{1+4t^2}+2t)}.$$

Поэтому

$$|u_1^{(h)}(x, t)| \leqslant A \sum_{k=\frac{1}{2}[h^{-2}]}^{4[h^{-2}]} \exp\left\{\frac{-k^2h^2}{2\,(\sqrt{1+4t^2}+2t)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant A\left(4\,[h^{-2}]-\frac{1}{2}\,[h^{-2}]\right)\exp\left\{\frac{-1}{8h^2\,(\sqrt{1+4t^2}+2t)}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{h<\frac{1}{X}\\ X\to+\infty}} u_1^{(h)}(x, t)=0.$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{\substack{h<\frac{1}{X}\\ X\to+\infty}} u_{-1}^{(h)}(x, t)=0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Поступило
13. X. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихонов А. Н., Теоремы единственности для уравнения теплопроводности, Матем. сборн., 42, 2 (1935), 199—216.

[2] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций. I, И. Л., 1949.

[3] Камынин Л. И., О сходимости конечно-разностного процесса для уравнения теплопроводности, Доклады Ак. Наук СССР, XXXV, 4 (1952), 701—704.

[4] Камынин Л. И., О применимости метода конечных разностей к решению уравнения теплопроводности. I., Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 163—180.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 269—284

Б. М. ЛЕВИТАН

ОБ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТАУБЕРОВОЙ ТЕОРЕМЕ

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

В работе доказывается специальная тауберова теорема (с оценкой остатка), на основании которой можно получить асимптотическое поведение спектральной функции самосопряженного уравнения в частных производных.

Введение

Настоящая работа примыкает к первым трем параграфам работы ([1]), в которой мы получили асимптотическую формулу для спектральной функции обыкновенного самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, уточнив предварительно одну специальную тауберову теорему Н. Винера ([2]).

Для того чтобы получить асимптотическое поведение спектральной функции для уравнения в частных производных, следует обобщить упомянутую тауберову теорему на случай функций, растущих на бесконечности как многочлен. Это и делается в настоящей работе. Применение полученных нами результатов к изучению асимптотического поведения спектральной функции уравнения в частных производных будет дано в одной из следующих работ.

Во избежание недоразумений заметим, что буквой C мы обозначаем константу не всегда одну и ту же.

§ 1. Некоторые сведения об интегралах Бохнера-Стильтьеса

1. Обозначим через $\sigma(\mu)$ комплексную функцию, определенную для всех действительных значений μ и удовлетворяющую условию *

$$\sup_{-\infty<a<\infty} \frac{1}{(1+|a|)^k} \overset{a+1}{\underset{a}{V}} \{\sigma(\mu)\} \leqslant M, \tag{1.1}$$

где M — некоторая константа и k — фиксированное натуральное число.

Случай $k=0$ разобран нами в работе ([1]).

Положим

$$E_{k+2}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{(-i\mu)^{k+2}}\, d\sigma(\mu) + \int_{-1}^{1} \frac{e^{i\alpha\mu} - L_{k+1}(\alpha\mu)}{(i\mu)^{k+2}}\, d\sigma(\mu)\right\}, \tag{1.2}$$

---

* Через $\overset{a+1}{\underset{a}{V}} \{\sigma(\mu)\}$ мы обозначаем вариацию функции $\sigma(\mu)$ в интервале $(a, a+1)$.

где

$$L_{k+1}(\beta) = 1 - i\beta - \frac{\beta^2}{2!} + i\frac{\beta^3}{3!} + \cdots + \frac{(-i\beta)^{k+2}}{(k+1)!}.$$

Легко видеть, что условие (1.1) обеспечивает абсолютную и равномерную в каждом конечном интервале сходимость интеграла (1.2). Функцию $E_{k+2}(\alpha)$ мы будем в последующем называть преобразованием Бохнера-Стильтьеса порядка $(k+2)$ функции $\sigma(\mu)$. Если $\sigma(\mu)$ — дифференцируемая функция, то по формуле (1.2) определяется преобразование Бохнера функции $\sigma'(\mu)$ порядка $(k+2)$ [см. ([3]), стр. 112]. В настоящем параграфе доказываются две леммы, которые показывают, что основные свойства преобразований Бохнера переносятся на преобразования Бохнера-Стильтьеса.

ЛЕММА 1.1. *Положим*

$$\rho_n(\mu) = \frac{n}{r_k} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4} d\sigma(\mu + a), \tag{1.3}$$

где

$$r_k = n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4} da = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin a}{a}\right)^{2k+4} da,$$

и обозначим через $E_{k+2}^{(n)}(\alpha)$ преобразование Бохнера функции $\rho_n(\mu)$, т. е. положим

$$E_{k+2}^{(n)}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{(-i\mu)^{k+2}} \rho_n(\mu)\, d\mu + \int_{-1}^{1} \frac{e^{-i\alpha\mu} - L_{k+1}(\alpha\mu)}{(-i\mu)^{k+2}} \rho_n(\mu)\, d\mu \right\}.$$

Тогда справедливы следующие предложения:

1) *в каждой точке непрерывности функции $\sigma(\mu)$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\mu} \rho_n(\nu)\, d\nu = \sigma(\mu) - \frac{1}{2}\{\sigma(+0) + \sigma(-0)\}; \tag{1.4}$$

2)

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^k} \int_{\mu}^{\mu+1} |\rho_n(\nu)|\, d\nu \leqslant C(k) M, \tag{1.5}$$

причем число M — то же, что и в условии (1.1), а постоянная $C(k)$ зависит только от k;

3) *равномерно в каждом конечном интервале*

$$\lim_{n\to\infty} E_{k+2}^{(n)}(\alpha) = E_{k+2}(\alpha). \tag{1.6}$$

Доказательство. 1) Из оценки (1.1) следует, что для больших a

$$\sigma(a+1) - \sigma(a) = O(|a|^k)$$

и, значит,

$$\sigma(a) = O(|a|^{k+1}).$$

Поэтому при каждом фиксированном μ

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\sigma(\mu+a)}{a^{2k+4}}=0.$$

Интегрируя по частям, находим из формулы (1.3):

$$\rho_n(\mu)=-\frac{n}{r_k}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(a+\mu)\,d\left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4}.$$

Интегрируя последнее равенство по μ в пределах от 0 до μ, получим:

$$\int_0^{\mu}\rho_n(\nu)\,d\nu=-\frac{n}{r_k}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\mu}\sigma(\nu+a)\,d\nu\right\}d\left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4}.$$

Интегрируя по частям в обратном порядке, найдем:

$$\int_0^{\mu}\rho_n(\nu)\,d\nu=-\frac{n}{r_k}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_a^{a+\mu}\sigma(\nu)\,d\nu\right\}d\left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4}=$$

$$=\frac{n}{r_n}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4}\{\sigma(a+\mu)-\sigma(a)\}\,da.$$

В силу известной теоремы, из последней формулы при $n\to\infty$ следует формула (1.4).

2) Определим монотонно-возрастающую функцию $\sigma_1(\mu)$, положив

$$\sigma_1(\mu)=\begin{cases}\overset{\mu}{\underset{+0}{V}}\{\sigma(\mu)\}, & \mu>0,\\ \overset{\mu}{\underset{-0}{V}}\{\sigma(\mu)\}, & \mu<0.\end{cases}$$

Из определения интеграла Стильтьеса легко следует, что

$$|\rho_n(\nu)|\leqslant\frac{n}{r_k}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4}d\sigma_1(a+\nu).$$

Из этого неравенства при помощи интегрирования по частям следует (рассуждаем так же, как и при доказательстве п. 1):

$$\int_{\mu}^{\mu+1}|\rho_n(\nu)|\,d\nu\leqslant\frac{n}{r_k}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4}\{\sigma_1(\mu+a+1)-\sigma_1(\mu+a)\}\,da=$$

$$=\frac{n}{r_k}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4}\overset{a+\mu+1}{\underset{a+\mu}{V}}\{\sigma(\mu)\}\,da.$$

В силу оценки (1.1),

$$\overset{a+\mu+1}{\underset{a+\mu}{V}}\{\sigma(\mu)\} \leqslant M(1+|a+\mu|)^k \leqslant M(1+|a|+|\mu|).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mu}^{\mu+1}|\rho_n(\nu)|\,d\nu \leqslant \frac{nM}{r_k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4}(1+|a|+|\mu|)^k\,da =$$

$$= \frac{nM}{r_k}\left\{\int\limits_{-\infty}^{-1}+\int\limits_{-1}^{1}+\int\limits_{1}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4}(1+|a|+|\mu|)^k\,da\right\} = I_1+I_2+I_3.$$

Далее,

$$I_2 \leqslant \frac{nM}{r_k}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4}(2+|\mu|)^k\,da \leqslant$$

$$\leqslant C'M(1+|\mu|)^k\,\frac{n}{r_k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{na}\right)^{2k+4}da = C'M(1+|\mu|)^k;$$

$$I_3 \leqslant \frac{nM}{r_k}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{(na)^{2k+4}}(1+a+|\mu|)^k\,da.$$

Так как в последнем интеграле $a \geqslant 1$ и $1+|\mu| \geqslant 1$, то

$$(1+a+|\mu|) = a(1+|\mu|)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{1+|\mu|}\right) \leqslant 2a(1+|\mu|).$$

Поэтому

$$(1+a+|\mu|)^k \leqslant 2^k a^k (1+|\mu|)^k.$$

Следовательно,

$$I_3 \leqslant \frac{2^k M(1+|\mu|)^k}{n^{2k+3}}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{da}{a^{k+4}} = C''M(1+|\mu|)^k.$$

Точно так же оценивается I_1. Этим неравенство (1.5) доказано.

3) Равенство (1.6) следует из пунктов 1) и 2) и из известной теоремы Хелли о предельном переходе под знаком интеграла Стильтьеса.

2. ЛЕММА 1.2. *Пусть функция* $K(a)$ *при* $|a| \to \infty$ *удовлетворяет условию*

$$K(a) = O\left(\frac{1}{|a|^{k+4}}\right).$$

Положим

$$\gamma(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(a)\, e^{-i\alpha a}\, da,$$

$$\tau(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(a)\, d\sigma(\mu + a).$$

Обозначим, далее, через $\Phi_{k+2}(\alpha)$ преобразование Бохнера порядка $(k+2)$ функции $\tau(\mu)$, т. е. положим

$$\Phi_{k+2}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{(-i\mu)^{k+2}}\, \tau(\mu)\, d\mu + \int_{-1}^{1} \frac{e^{-i\alpha\mu} - L_{k+1}(\alpha\mu)}{(-i\mu)^{k+2}}\, \tau(\mu)\, d\mu \right\}$$

и через $E_{k+2}(\alpha)$ обозначим преобразование Бохнера-Стильтьеса (порядка $k+2$) функции $\sigma(\mu)$. Тогда функции $E_{k+2}(\alpha)$ и $\Phi_{k+2}(\alpha)$ будут связаны следующим равенством:

$$\Phi_{k+2}(\alpha) = \gamma(\alpha)\, E_{k+2}(\alpha) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^l C_{k+1}^l \int_0^{\alpha} d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \ldots \int_0^{\alpha_l} \gamma^{(l)}(\alpha_l)\, E_{k+2}(\alpha_l)\, d\alpha_l + P_{k+1}(\alpha), \qquad (1.7)$$

где C_{k+1}^l — коэффициенты бинома Ньютона, а $P_{k+1}(\alpha)$ — многочлен от α степени $(k+1)$.

Доказательство. Определим функцию $\rho_n(\mu)$ так же, как и в предыдущей лемме. Положим

$$\tau_n(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(a)\, \rho_n(\mu + a)\, da$$

и обозначим через $\Phi_{k+2}^{(n)}(\alpha)$ преобразование Бохнера порядка $(k+2)$ функции $\tau_n(\mu)$. Оценим $\int_{\mu}^{\mu+1} |\tau_n(\nu)|\, d\nu$. В силу п. 2) леммы 1.1, при больших μ справедлива оценка

$$\int_{\mu}^{\mu+1} |\tau_n(\nu)|\, d\nu \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |K(a)|\, da \int_{\mu}^{\mu+1} |\rho_n(\nu + a)|\, d\nu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |K(a)|\, da \int_{\mu+a}^{\mu+a+1} |\rho_n(\nu)|\, d\nu \leqslant C(k)\, M \int_{-\infty}^{\infty} |K(a)|\, (1 + |\mu + a|)^k\, da = O(|\mu|^k). \qquad (1.8)$$

Из этой оценки следует, что функция $\Phi_{k+2}^{(n)}(\alpha)$ существует. Обозначим через $E_{k+2}^{(n)}(\alpha)$ преобразование Бохнера функции $\rho_n(\mu)$. Как известно [см. ([3]), стр. 127], $\Phi_{k+2}^{(n)}(\alpha)$ и $E_{k+2}^{(n)}(\alpha)$ связаны равенством

$$\Phi_{k+2}^{(n)}(\alpha) = \gamma(\alpha) E_{k+2}^{(n)}(\alpha) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^l C_{k+1}^l \int_0^{\alpha} d\alpha_1 \ldots \int_0^{\alpha_l} \gamma^{(l)}(\alpha_l) E_{k+2}^{n}(\alpha_l)\, d\alpha_l + P_{k+1}^{(n)}(\alpha), \qquad (1.9)$$

где $P_{k+1}^{(n)}(\alpha)$ — многочлен $(k+1)$-й степени.

Предположим, что $n \to \infty$. В силу леммы 1.1 и теоремы Хелли, $\tau_n(\mu)$ стремится равномерно в каждом конечном интервале к $\tau(\mu)$, а $E_{k+2}^{(n)}(\alpha)$ — к $E_{k+2}(\alpha)$. Если мы покажем, что $\Phi_{k+2}^{(n)}(\alpha)$ стремится к $\Phi_{k+2}(\alpha)$, то формула (1.7) будет следовать из формулы* (1.9). Но это следует непосредственно из оценки (1.8), ибо в силу этой оценки, в формуле для $\Phi_{k+2}^{(n)}(\alpha)$ можно перейти к пределу под знаком интеграла, и в результате мы получим функцию $\Phi_{k+2}(\alpha)$.

3. Следуя С. Бохнеру, будем говорить, что функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ в интервале (a, b) $(k+2)$-эквивалентны и писать

$$\varphi(\alpha) \overset{k+2}{\asymp} \psi(\alpha),$$

если их разность $\varphi(\alpha) - \psi(\alpha)$ в этом интервале есть многочлен $(k+1)$-й степени.

Укажем три следствия из равенства (1.7), играющие в дальнейшем существенную роль:

1°. *Если в некотором интервале (a, b) функция $E_{k+2}(\alpha)$ $(k+2)$-эквивалентна нулю (т. е. есть многочлен $(k+1)$-й степени), то функция $\Phi_{k+2}(\alpha)$ в интервале (a, b) также $(k+2)$-эквивалентна нулю.*

В самом деле, чтобы проверить это утверждение, достаточно обе части равенства (1.7) продифференцировать $(k+2)$ раза. Мы получим [см. ([3]), стр. 123, формула (4)] $(a \leqslant \alpha \leqslant b)$:

$$\Phi_{k+2}^{(k+2)}(\alpha) = \gamma(\alpha) E_{k+2}^{(k+2)}(\alpha),$$

что и требовалось.

2°. *Если в некотором интервале (a, b) $\gamma(\alpha) = 1$, то, какова бы ни была функция $E_{k+2}(\alpha)$ в этом интервале,*

$$\Phi_{k+2}(\alpha) \overset{k+2}{\asymp} 0.$$

---

* Из существования пределов $\lim\limits_{n\to\infty} E_{k+2}^{(n)}(\alpha)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_{k+2}^{(n)}(\alpha)$ следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} P_{k+1}^{(n)}(\alpha) = P_{k+1}(\alpha)$. Представляя $P_{k+1}^{(n)}(\alpha)$ по интерполяционной формуле Лагранжа с произвольными узлами интерполяции, легко показать, что $P_{k+1}(\alpha)$ есть также многочлен $(k+1)$-й степени.

3°. *Если в некотором интервале* $(a, b)\ \gamma(\alpha) = 1$, *то в этом интервале*

$$\Phi_{k+2}(\alpha) \overset{k+2}{\asymp} E_{k+2}(\alpha).$$

Утверждения 2° и 3° следуют непосредственно из формулы (1.7).

§ 2. Доказательство вспомогательного неравенства

В настоящем параграфе доказывается неравенство, которое следует рассматривать как некоторое обобщение классического неравенства Г. Бора ([4]).

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть функция* $\sigma(\mu)$ *удовлетворяет условию* (1.1). *Допустим, что преобразование Бохнера-Стильтьеса функции* $\sigma(\mu)$ *в интервале* $(-\Lambda, \Lambda)$ $(0 < \Lambda \leqslant 1)$ $(k+2)$-*эквивалентно нулю (т. е. есть многочлен* $(k+1)$-*й степени). Выберем постоянную величину* A *так, чтобы преобразование Бохнера порядка* $(k+2)$ *функции* $\sigma(\mu) + A$ *было* $(k+2)$-*эквивалентно нулю в интервале* * $(-\Lambda, \Lambda)$. *При этих условиях имеет место неравенство*

$$\sup_{\mu} \frac{1}{(1+|\mu|)^k} |A + \sigma(\mu)| \leqslant \frac{CM}{\Lambda^{k+1}}, \tag{2.1}$$

где M *имеет тот же смысл, что в условии* (1.1), *а* C — *некоторая постоянная величина, зависящая только от* k (*и не зависящая от* M *и* Λ).

Доказательство. 1. Пусть $\rho_n(\mu)$ имеет то же самое значение, что и в лемме 1.1. В силу леммы 1.2, преобразование Бохнера функции $\rho_n(\mu)$ в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ $(k+2)$-эквивалентно нулю. Мы докажем сначала неравенство (2.1) для функции

$$\sigma_n(\mu) = \int_0^\mu \rho_n(\nu)\, d\nu,$$

предполагая, что $\Lambda = 1$. При этом константа C окажется независимой также и от n. Как мы затем покажем, общий случай можно свести к этому специальному.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(\lambda)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\psi(-\lambda) = -\psi(\lambda)$;

2) для $\lambda > 1$ $\psi(\lambda) = \frac{1}{i\lambda}$;

3) в интервал $(-1, 1)$ $\psi(\lambda)$ продолжена так, что существует непрерывная $(k+2)$-я производная функции $\psi(\lambda)$.

Рассмотрим преобразование Фурье функции $\psi(\lambda)$:

$$g(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda) e^{-i\lambda a}\, d\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \int_0^\infty \psi(\lambda) \sin \lambda a\, d\lambda =$$

$$= i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \psi(\lambda) \sin \lambda a\, d\lambda + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda \alpha}{\lambda}\, d\lambda.$$

* Мы увидим из доказательства теоремы, что это возможно.

Так как

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin \lambda a}{\lambda} d\lambda = \int_a^{a\cdot\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda,$$

то в окрестности точки $a = 0$ функция $g(a)$ ограничена и имеет разрыв первого рода со скачком, равным $\sqrt{2\pi}$.

Интегрируя $(k+2)$ раза по частям, мы получим, что при $|a| \to \infty$ справедлива оценка

$$g(a) = O\left(\frac{1}{|a|^{k+2}}\right). \tag{2.2}$$

2. Покажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(\mu + a)\, g(a)\, da = A_n + \int_0^{\mu} \rho_n(\nu)\, d\nu, \tag{2.3}$$

причем постоянная величина A_n обладает тем свойством, что преобразование Бохнера функции

$$A_n + \int_0^{\mu} \rho_n(\nu)\, d\nu$$

в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ $(k+2)$-эквивалентно нулю.

Если $\rho_n(\mu)$ есть конечный тригонометрический многочлен, показатели которого лежат вне интервала $(-1,1)$, то формула (2.3) следует непосредственно из формулы обращения Фурье. Рассмотрим общий случай. При каждом фиксированном n $\rho_n(\mu)$ есть целая аналитическая функция конечного порядка. Как известно [см. ([5])], можно указать последовательность конечных тригонометрических многочленов $S_N^{(n)}(\mu)$, которые сходятся при $N \to \infty$ к $\rho_n(\mu)$ равномерно в каждом конечном интервале и показатели Фурье которых лежат вне интервала $(-1,1)$. Применяя к $S_N^{(n)}(\mu)$ формулу (2.3), получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S_N^{(n)}(\mu + a)\, g(a)\, da = A_N^{(n)} + \int_0^{\mu} S_N^{(n)}(\nu)\, d\nu. \tag{2.4}$$

Полагая $N \to \infty$, мы получим из формулы (2.4) формулу * (2. 3)

---

* Из формулы (1) заметки ([5]) и свойств многочленов $S_N^{(n)}(\mu)$, указанных там же, легко следует, что

$$\int_{\mu}^{\mu+1} \left| S_N^{(n)}(\nu) \right| d\nu \leqslant C(1 + |\mu|)^k,$$

где C от N не зависит. Из этой оценки и оценки (2.2) следует, что в формуле (2.4) можно перейти к пределу под знаком интеграла.

Из формулы (2.3) следует оценка *:

$$\left| A_n + \int_0^{\mu} \rho_n(\nu)\, d\nu \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_n(\mu + a)|\, |g(a)|\, da =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_r^{r+1} |\rho_n(\mu + a)|\, |g(a)|\, da = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 |\rho_n(\mu + a)|\, |g(a)|\, da +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_{r=-\infty}^{-1} + \sum_{r=1}^{\infty} \int_r^{r+1} |\rho_n(\mu + a)|\, |g(a)|\, da \right\} \leqslant C \int_{\mu}^{\mu+1} |\rho_n(a)|\, da +$$

$$+ C \left\{ \sum_{r=-\infty}^{-1} \frac{1}{|r|^{k+2}} \int_{r+\mu}^{r+\mu+1} |\rho_n(a)|\, da + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{k+2}} \int_{r+\mu}^{r+\mu+1} |\rho_n(a)|\, da \right\} \leqslant$$

$$\leqslant CM \left\{ (1 + |\mu|)^k + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{k+2}} (1 + r + |\mu|)^k \right\} \leqslant$$

$$\leqslant CM (1 + |\mu|)^k \left\{ 1 + \sum_{r+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \left[\frac{r + 1 + |\mu|}{r(1 + |\mu|)} \right]^k \right\} \leqslant$$

$$\leqslant CM (1 + |\mu|)^k \left\{ 1 + 2^k \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \right\} = C \cdot M (1 + |\mu|)^k. \tag{2.5}$$

Эта оценка для рассматриваемого нами случая равносильна оценке (2.1).

3. Рассмотрим случай $\Lambda < 1$. Предварительно оценим

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1 + |\mu|)^k} \int_{\mu}^{\mu+1} \left| \rho_n\left(\frac{\nu}{\Lambda}\right) \right| d\nu.$$

Положим

$$\tau_n(\mu) = \frac{1}{(1 + |\mu|)^k} \rho_n(\mu).$$

Имеем:

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} |\tau_n(\nu)|\, d\nu = \sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} \frac{1}{(1 + |\nu|)^k} |\rho_n(\nu)|\, d\nu \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1 + |\mu|)^k} \int_{\mu}^{\mu+1} |\rho_n(\nu)|\, d\nu \leqslant C \cdot M, \tag{2.6}$$

где C — некоторая константа. Как показано в работе автора ([1]), из оценки (2.6) следует оценка *:

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} \left| \tau_n\left(\frac{\nu}{\Lambda}\right) \right| d\nu < C \cdot M.$$

* C обозначает константу не обязательно одну и ту же.

Поэтому

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty}\frac{1}{(1+|\mu|)^k}\int\limits_{\mu}^{\mu+1}\left|\rho_n\left(\frac{\nu}{\Lambda}\right)\right|d\nu=$$
$$=\sup_{-\infty<\mu<\infty}\frac{1}{(1+|\mu|)^k}\int\limits_{\mu}^{\mu+1}\left(1+\frac{|\nu|}{\Lambda}\right)^k\left|\tau_n\left(\frac{\nu}{\Lambda}\right)\right|d\nu\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\Lambda^k}\sup_{-\infty<\mu<\infty}\frac{1}{(1+|\mu|)^k}\int\limits_{\mu}^{\mu+1}(\Lambda+|\nu|)^k\left|\tau_n\left(\frac{\nu}{\Lambda}\right)\right|d\nu\leqslant$$
$$\leqslant C\frac{1}{\Lambda^k}\sup_{-\infty<\mu<\infty}\int\limits_{\mu}^{\mu+1}\left|\tau_\nu\left(\frac{\nu}{\Lambda}\right)\right|d\nu\leqslant\frac{CM}{\Lambda^k}. \qquad (2.7)$$

Покажем, что преобразование Бохнера (порядка $k+2$) функции $\rho_n\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)$ $(k+2)$-эквивалентно нулю в интервале $(-1,1)$. В самом деле, если $\rho_n(\mu)$ есть конечная тригонометрическая сумма, то это очевидно, ибо эквивалентность нулю в некотором интервале преобразования Бохнера для тригонометрического многочлена равносильна тому, что этот интервал свободен от показателей Фурье многочлена.

В общем случае аппроксимируем функцию $\rho_n(\mu)$ тригонометрическими многочленами (см. п. 2).

Пользуясь оценками (2.5) и (2.7), получим:

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty}\frac{1}{(1+|\mu|)^k}\left|A_n+\int\limits_0^{\mu}\rho_n\left(\frac{\nu}{\Lambda}\right)d\nu\right|\leqslant$$
$$\leqslant C\sup_{-\infty<\mu<\infty}\frac{1}{(1+|\mu|)^k}\int\limits_{\mu}^{\mu+1}\left|\rho_n\left(\frac{\nu}{\Lambda}\right)\right|d\nu\leqslant\frac{CM}{\Lambda^k}.$$

Заменяя в первом интеграле $\frac{\nu}{\Lambda}$ на ν, найдем:

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty}\frac{1}{(1+|\mu|)^k}\left|A_n+\Lambda\int\limits_0^{\frac{\mu}{\Lambda}}\rho_n(\nu)\,d\nu\right|\leqslant\frac{C\cdot M}{\Lambda^k}.$$

Заменяя $\frac{\mu}{\Lambda}$ на μ, получим:

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty}\frac{1}{(1+|\mu|)^k}\left|A_n+\Lambda\int\limits_0^{\mu}\rho_n(\nu)\,d\nu\right|\leqslant\frac{C\cdot M}{\Lambda^k}.$$

Деля на Λ, найдем из последнего неравенства:

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty}\frac{1}{(1+|\mu|)^k}\left|\frac{A_n}{\Lambda}+\int\limits_0^{\mu}\rho_n(\nu)\,d\nu\right|\leqslant\frac{C\cdot M}{\Lambda^{k+1}}.$$

Полагая в этом неравенстве при фиксированном μ $n \to \infty$, получим, в силу п. 1) леммы 1.1, неравенство (2.1).

Замечание 1. Неравенство (2.1) допускает очевидную итерацию.

Замечание 2. Пусть $f(\mu) = \mu \cos \Lambda\mu$, где $0 < \Lambda < 1$. Непосредственным вычислением можно показать, что преобразование Бохнера порядка 3 функции $f(\mu)$ в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ 3-эквивалентно нулю (т. е. есть многочлен второй степени) [см. (3), стр. 115]. Далее, имеем:

$$\int_0^\lambda \nu \cos \Lambda\nu \, d\nu = \frac{\Lambda\lambda \sin \Lambda\lambda + \cos \Lambda\lambda - 1}{\Lambda^2}.$$

Это равенство показывает, что по крайней мере по порядку Λ неравенство (2.1) точно.

§ 3. Доказательство тауберовой теоремы

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть функция* $\sigma(\mu)$ *удовлетворяет условию* (1.1). *Предположим, что, каково бы ни было положительное число* ε, *можно указать другое положительное число* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *и функцию* $\sigma_\delta(\mu)$, *преобразование Бохнера-Стильтьеса которой в интервале* $(-\delta, \delta)$ $(k+2)$-*эквивалентно нулю и которая удовлетворяет неравенству*

$$\sup_\mu \frac{1}{(1+|\mu|)^k} \mathop{V}_{\mu}^{\mu+1} \{\sigma(\mu) - \sigma_\delta(\mu)\} < \varepsilon. \tag{3.1}$$

При этих условиях при $|\mu| \to \infty$

$$\sigma(\mu) = o\left(|\mu|^{k+1}\right). \tag{3.2}$$

Доказательство. Положим $\rho_\delta(\mu) = \sigma(\mu) - \sigma_\delta(\mu)$. В силу оценки (3.1), при $|\mu| \to \infty$

$$|\rho_\delta(\mu)| = O(\varepsilon |\mu|^{k+1}).$$

Далее, в силу той же оценки (3.1), функция $\sigma_\delta(\mu)$ удовлетворяет условию (1.1) (с константой $M + \varepsilon$). Из неравенства (2.1) следует $(|\mu| \to \infty)$

$$|\sigma_\delta(\mu)| = O\left(\frac{1}{\delta^{k+1}} |\mu|^k\right).$$

Поэтому при $|\mu| \to \infty$

$$|\sigma(\mu)| \leqslant |\sigma_\delta(\mu)| + |\rho_\delta(\mu)| = O\left(\frac{1}{\delta^{k+1}} |\mu|^k\right) + O(\varepsilon |\mu|^{k+1}),$$

и, значит,

$$\left|\frac{\sigma(\mu)}{\mu^{k+1}}\right| = O\left(\frac{1}{\delta^{k+1}|\mu|}\right) + O(\varepsilon).$$

Так как число δ от μ не зависит, а ε произвольно, то из последнего неравенства следует, что

$$\lim_{|\mu|\to\infty} \frac{1}{\mu^{k+1}} \sigma(\mu) = 0,$$

что и требовалось доказать

Замечание. Предположим, что имеется бесконечное множество функций $\sigma(\mu)$, удовлетворяющих условию (1.1). Обозначим это множество функций буквой Σ.

Если для всех $\sigma \in \Sigma$ константу M в неравенстве (1.1) можно взять одну и ту же и если число $\delta = \delta(\varepsilon)$ можно выбрать одним и тем же для всех функций $\sigma \in \Sigma$, то оценка (3.2) выполняется равномерно, т. е., каково бы ни было положительное число η, можно указать положительное число $N = N(\eta)$, зависящее от η и не зависящее от функции $\sigma \in \Sigma$, такое, что если $|\mu| > N$, то для всех $\sigma \in \Sigma$ выполняется неравенство

$$|\sigma(\mu)| < \eta |\mu|^{k+1}.$$

§ 4. Оценка остатка в теореме предыдущего параграфа

Допустим, как и в предыдущем параграфе, что функция $\sigma(\mu)$ удовлетворяет условию (1.1). Примем следующие обозначения: через $\sigma^{-[0]}(\mu)$ будем обозначать функцию $\sigma(\mu) + C_0$, где C_0 — произвольная постоянная величина. Через $\sigma^{-[1]}(\mu)$ будем обозначать неопределенный интеграл $\sigma^{-[0]}(\mu)$, т. е. функцию

$$\int_0^\mu \sigma(\nu)\, d\nu + C_0\mu + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная, и т. д.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть функция $\sigma(\mu)$ удовлетворяет условию* (1.1). *Предположим, что, каково бы ни было положительное число $\varepsilon \leqslant 1$, можно указать функцию $\sigma_\varepsilon(\mu)$, преобразование Бохнера-Стильтьеса (порядка $k+2$) которой в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ $(k+2)$-эквивалентно нулю (т. е. есть многочлен $(k+1)$-й степени) и которая удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^k} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu) - \sigma_\varepsilon(\mu)\} \leqslant C \cdot \varepsilon^{(r+1-\alpha)(k+1)}, \tag{4.1}$$

где постоянные C, $0 < \alpha < 1$, $r \geqslant 0$ (целое) от ε не зависят. Тогда среди функций $\sigma^{-[r-1]}(\mu)$ найдется функция $\sigma_0^{-[r-1]}(\mu)$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^{k+\alpha}} \int_0^\mu \sigma_0^{-[r-1]}(\nu)\, d\nu \leqslant C_1, \tag{4.2}$$

причем постоянная C_1 зависит от постоянной C из оценки (4.1), *постоянной M из оценки* (1.1) *и числа k и не зависит от μ.*

При $\alpha = 0$ *справедлива оценка* *

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^k \ln(1+|\mu|)} \int_0^{\mu} \sigma_0^{-[r-1]}(\nu)\, d\nu \leqslant C_1. \qquad (4.3)$$

Доказательство. Положим

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2^p} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots), \quad \sigma_p(\mu) = \sigma_{\varepsilon_p}(\mu);$$

$$\tau_p(\mu) = \sigma_p(\mu) - \sigma_{p-1}(\mu), \quad \tau_0(\mu) = \sigma_0(\mu)$$

и рассмотрим бесконечный функциональный ряд

$$\sigma_0(\mu) + [\sigma_1(\mu) - \sigma_0(\mu)] + \cdots = \tau_0(\mu) + \tau_1(\mu) + \cdots = \lim_{p\to\infty} \sigma_p(\mu), \qquad (4.4)$$

Легко видеть, что в каждой точке непрерывности функции $\sigma(\mu)$ ряд (4.4) сходится к $\sigma(\mu) + C$.

Рассмотрим функцию

$$\tau_p(\mu) = \sigma_p(\mu) - \sigma_{p-1}(\mu) \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Ее преобразование Бохнера-Стильтьеса (порядка $(k+2)$) в интервале $\left(-\frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^p}\right)$ $(k+2)$-эквивалентно нулю. Так как

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^k} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\tau_p(\mu)\} \leqslant \sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^k} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu) - \sigma_p(\mu)\} +$$

$$+ \sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^k} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu) - \sigma_{p-1}(\mu)\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{2^{p(r+1-\alpha)(k+1)}} + \frac{C}{2^{p(r+1-\alpha)(k+1)}} = \frac{C}{2^{p(r+1-\alpha)(k+1)}},$$

то на основании неравенства (2.1), примененного к $\tau_p(\mu)$ $(r-1)$ раз, мы получим:

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^k} \left|\tau_p^{-[r-1]}(\mu)\right| \leqslant \frac{C}{2^{p(1-\alpha)(k+1)}}. \qquad (4.5)$$

Поэтому ряд

$$\tau_0^{-[r-1]}(\mu) + \sum_{p=1}^{\infty} \tau_p^{-[r-1]}(\mu) = g(\mu) \qquad (4.6)$$

---

* При $r = 0$ полагаем, по определению,

$$\int_0^{\mu} \sigma_0^{-[1]}(\nu)\, d\nu = \sigma(\mu) + C.$$

Поэтому оценки (4.2) и (4.3) принимают вид:

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^{k+\alpha}} |\sigma(\mu)| \leqslant C_1, \qquad \sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^k \ln(1+|\mu|)} |\sigma(\mu)| \leqslant C_1.$$

сходится абсолютно и равномерно в каждом конечном интервале. Покажем, что

$$g(\mu)=\sigma_0^{-[r-1]}.$$

В самом деле, если ряд (4.6) продифференцировать $(r-1)$ раз, то мы получим равномерно сходящийся ряд (4.4), сумма которого почти всюду равна $\sigma(\mu)+C$.

Остается оценить

$$\int_0^{\mu}\sigma_0^{-[r-1]}(\nu)\,d\nu=\int_0^{\mu}g(\nu)\,d\nu.$$

Возьмем произвольное действительное число μ_0 и определим целое положительное число m из условия

$$2^{(m-1)(k+1)}\leqslant(1+|\mu_0|)<2^{m(k+1)}.$$

Положим

$$\int_0^{\mu_0}g(\nu)\,d\nu=\int_0^{\mu_0}\tau_0^{-[r-1]}(\nu)\,d\nu+\sum_{p=1}^{m-1}\int_0^{\mu_0}\tau_p^{-[r-1]}(\nu)\,d\nu+$$
$$+\sum_{p=m}^{\infty}\int_0^{\mu_0}\tau_p^{-[r-1]}(\nu)\,d\nu=P(\mu_0)+Q(\mu_0)+R(\mu_0).$$

В силу неравенства (4.5),

$$|R(\mu_0)|\leqslant\sum_{p=m}^{\infty}C\int_0^{|\mu_0|}(1+|\nu|)^k\frac{1}{2^{p(1-\alpha)(k+1)}}\,d\nu\leqslant$$
$$\leqslant C(1+|\mu_0|)^{k+1}\sum_{p=m}^{\infty}\frac{1}{2^{p(1-\alpha)(k+1)}}\leqslant C(1+|\mu_0|)^{k+1}\frac{1}{2^{m(1-\alpha)(k+1)}}\leqslant$$
$$\leqslant C(1+|\mu_0|)^{k+1}(1+|\mu_0|)^{\alpha-1}=C(1+|\mu_0|)^{k+\alpha}. \tag{4.7}$$

Чтобы оценить $Q(\mu_0)$, снова используем неравенство (2.1). Получим:

$$\left|\int_0^{\mu_0}\tau_p^{-[r-1]}(\nu)\,d\nu\right|\leqslant C\cdot 2^{p\alpha(k+1)}(1+|\mu_0|)^k.$$

Поэтому

$$Q(\mu_0)|\leqslant C(1+|\mu_0|)^k\sum_{p=1}^{m-1}2^{p\alpha(k+1)}\leqslant C(1+|\mu_0|)^k\,2^{m\alpha(k+1)}\leqslant C(1+|\mu_0|)^{k+\alpha}. \tag{4.8}$$

Остается оценить $P(\mu_0)$. Так как

$$\tau_0(\mu)=\sigma_0(\mu)=\sigma(\mu)-\{\sigma(\mu)-\sigma_0(\mu)\},$$

то

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^k} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\tau_0(\mu)\} \leqslant \sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^k} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu)\} + \\ + \sup_{-\infty<\mu<\infty} \frac{1}{(1+|\mu|)^k} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu) - \sigma_0(\mu)\} \leqslant C.$$

С другой стороны, преобразование Бохнера-Стильтьеса функции $\tau_0(\mu)$ в интервале $(-1,1)$ $(k+2)$-эквивалентно нулю. Поэтому, на основании неравенства (2.1) (примененного r раз),

$$|P(\mu_0)| = \left|\int_0^{\mu_0} \tau_0^{-[r-1]}(\nu)\,d\nu\right| \leqslant C(1+|\mu_0|)^k. \tag{4.9}$$

Из оценок (4.7), (4.8) и (4.9) следует оценка (4.2). Если $\alpha = 0$, то оценки для $P(\mu_0)$ и $R(\mu_0)$ остаются в силе. Для $Q(\mu_0)$ получаем оценку

$$|Q(\mu_0)| \leqslant C(1+|\mu_0|)^k \sum_{p=1}^{m-1} 2^0 = C(1+|\mu_0|)^k (m-1) = \\ = C(1+|\mu_0|)^k \cdot \ln(1+|\mu_0|).$$

Поэтому справедлива оценка (4.3).

Замечание 1. При $r=0$ под $g(\mu)$ следует понимать сумму ряда (4.4).

Замечание 2. Пусть рассматривается бесконечное множество функций $\sigma(\mu)$, которое мы обозначим через Σ. Если для всех $\sigma \in \Sigma$ можно указать одну и ту же константу M в неравенстве (1.1) и если константа C в неравенстве (4.1) может быть выбрана независимо от функции $\sigma \in \Sigma$, то оценки (4.2) и (4.3) выполняются равномерно для всех $\sigma \in \Sigma$, т. е. константа C_1 в неравенстве (4.2) не зависит от $\sigma \in \Sigma$.

При оценке повторных интегралов справедливо значительно более точное неравенство, чем неравенство, которое получается при помощи итерации неравенства (2.1). А именно, имеет место следующий результат:

Пусть функция $\sigma(\mu)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Обозначим через l произвольное натуральное число и выберем многочлен $P_l(\mu)$ степени l так, чтобы преобразование Бохнера функции

$$h_l(\mu) = \frac{1}{l!}\int_0^{\mu} (\mu-\nu)^l\,d\sigma(\nu) + P_l(\mu)$$

интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ было $(k+2)$-эквивалентно нулю.

Справедливо неравенство

$$|h_l(\mu)| < \frac{CM}{\Lambda^{k+1+l}} (1+|\mu|)^k. \tag{4.10}$$

Неравенство (4.10) позволяет значительно уточнить теорему 4.1.

Поступило
8. VII. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 16 (1952), 325—352.
[2] Левитан Б. М., Замечание к одной теореме В. А. Марченко, Труды Моск. математ. общества, т. 1 (1952), 421—422.
[3] Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.
[4] Bohr H., Un théorème général sur l'intégration d'un polynôme trigonométrique, Comptes Rendus, 200 (1935), 1276—1277.
[5] Ахиезер Н. И., О полиномах Б. М. Левитана, Доклады Ак. Наук СССР, т. LIV, № 1 (1946), 3—5.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 285—290

И. М. ВИНОГРАДОВ

УЛУЧШЕНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СУММЫ ЗНАЧЕНИЙ $\chi(p+k)$

Работа содержит вывод более точной, чем в предыдущей работе (¹), оценки для суммы значений характера по модулю q, отличного от главного, при условии, что аргумент пробегает числа вида $p+k$, где k — постоянное и p — простое, не превосходящее N.

Обозначения. Примем обозначения:

c — положительное постоянное,

ε — произвольно малое положительное постоянное,

q — простое, $q \geqslant c_0$, где c_0 — достаточно большое, превосходящее 2; $\chi(a)$ — характер по модулю q, отличный от главного; k — постоянное целое, $0 < |k| < c_0^{\bullet}$.

p — переменное, пробегающее простые числа.

Обозначение $A \ll B$ при положительном B показывает, что $|A|B^{-1}$ не превосходит положительного постоянного числа.

Символ $\sum_z$ обозначает суммирование, распространенное на заранее заданные значения z.

В моей работе (¹) для суммы

$$S = \sum_{p \leqslant N} \chi(p+k)$$

получена оценка

$$S \ll N^{1+\varepsilon} \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{4}},$$

дополняющая мою прежнюю оценку (²). В настоящей работе я показываю, что некоторое видоизменение метода вышеуказанной работы (¹) позволяет получить и более точный результат:

$$S \ll N^{1+\varepsilon}\Delta; \qquad \Delta = \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{3}} + N^{-0,1}.$$

ЛЕММА 1. *Пусть* $1 \leqslant U < q$, $q^{\frac{3}{4}} \ll N \ll q^{\frac{5}{4}}$,

$$S = \sum_{xy \leqslant N} \psi(x)\chi(xy+k),$$

где x пробегает все целые положительные числа, не превосходящие U, а y пробегает некоторый ряд последовательных целых положительных чи-

сел, причем $\psi(x)$ *удовлетворяет условию* $0 \leqslant \psi(x) \leqslant q^{\varepsilon_1}$. *Тогда имеем*

$$S \ll Nq^{\varepsilon''}\left(\left(\frac{qU}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q^3}{N^4}\right)^{\frac{1}{8}}\right).$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 3 вышеуказанной моей работы (1).

ЛЕММА 2. *Пусть* $q^{0,5} \leqslant U \leqslant N$, $0 < c < 0,5$; $cU < U_0 \leqslant 0,5\,U$, $(k_0 q) = 1$,

$$S = \sum_{xy \leqslant N} \psi(x)\, \psi_1(y)\, \chi(xy + k_0),$$

где x *пробегает целые числа с условием* $U - U_0 < x \leqslant U$, *а* y *пробегает все целые положительные числа, причем* $\psi(x)$ *и* $\psi_1(y)$ *удовлетворяют условиям*

$$0 \leqslant \psi(x) \leqslant q^{\varepsilon_2}, \quad 0 \leqslant \psi_1(y) \leqslant q^{\varepsilon_2}.$$

Тогда имеем

$$S \ll Nq^{\varepsilon'''}\sqrt{\frac{q^{0,5}}{U} + \frac{U}{N} + \frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 6 вышеупомянутой моей работы (1).

ЛЕММА 3. *Пусть* $\varepsilon_0 < 0,1$, $0 < \gamma < \frac{7}{8} - \varepsilon_0$, P — *произведение простых чисел с условием* $p \leqslant N^{\frac{1}{8}}$. *Тогда, полагая*

$$D = r^{\frac{\ln r}{\ln(1+\varepsilon_0)}}, \quad r = \ln N,$$

делители d *числа* P, *не превосходящие* N, *можно распределить среди* $< D$ *совокупностей, причем для каждой совокупности существует свое* φ *с условием, что принадлежащие этой совокупности значения* d *удовлетворяют неравенствам*

$$\varphi < d \leqslant \varphi^{1+\varepsilon_0}.$$

Для некоторых совокупностей имеем $\varphi \leqslant N^\gamma$, *для каждой из остальных совокупностей существует целое положительное* B *и две возрастающие последовательности чисел* x *и* y *такие, что все значения* x *удовлетворяют неравенствам*

$$N^\gamma < x \leqslant N^{\gamma + \frac{1}{8} + \varepsilon_0},$$

причем все числа рассматриваемой совокупности, взятые каждое B *раз, и только эти числа получим, если из всех произведений* xy *выберем лишь удовлетворяющие условию* $(x, y) = 1$.

Доказательство. Эта лемма есть видоизменение леммы 5 гл. IX моей книги (3).

ЛЕММА 4. *Пусть* $H = q^{\frac{1}{8}}$, P — *произведение простых чисел с условием* $p \leqslant H$, Q — *произведение простых чисел с условием* $H < p \leqslant N$.

Пусть, далее, $\psi(x)$ — *функция с условием, что для целых положительных* x, *не превосходящих* N, *имеем* $|\psi(x)| < T$, *и пусть*

$$S = \sum_{p \leqslant N} \psi(p);$$

$$W_s = \sum_{d_1 \setminus P} \sum_{m_1 > 0} \ldots \sum_{d_s \setminus P} \sum_{m_s > 0} \mu(d_1) \ldots \mu(d_s)\, \psi(d_1 m_1 \ldots d_s m_s); \ s = 1, \ldots, 8.$$
$$d_1 m_1 \ldots d_s m_s \leqslant N$$

Тогда при некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$ *с условиями* $\alpha_1 \ll 1, \ldots, \alpha_8 \ll 1$ *имеем*

$$S = \alpha_1 W_1 + \cdots + \alpha_8 W_8 + O(TNH^{-1}).$$

Доказательство. Эта лемма есть частный случай леммы 8 вышеупомянутой моей работы ([1]).

ТЕОРЕМА 1. *При условии* $q^{\frac{3}{4}} \ll N \ll q^{\frac{5}{4}}$ *имеем*

$$\sum_{p \leqslant N} \chi(p+k) \ll N^{1+\varepsilon} \Delta; \quad \Delta = \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{3}} + N^{-0,1}.$$

Доказательство. Положим в лемме 4 $\psi(p) = \chi(p+k)$. Тогда будем иметь $T = 1$ и, следовательно,

$$\sum_{p \leqslant N} \chi(p+k) = \alpha_1 W_1 + \cdots + \alpha_8 W_8 + O(NH^{-1}),$$

$$W_s = \sum_{d_1 \setminus P} \sum_{m_1 > 0} \ldots \sum_{d_s \setminus P} \sum_{m_s > 0} \mu(d_1) \ldots \mu(d_s)\, \chi(d_1 m_1 \ldots d_s m_s + k); \quad s = 1, \ldots, 8.$$
$$d_1 m_1 \ldots d_s m_s \leqslant N$$

Мы остановимся лишь на оценке W_8, так как $W_1, \ldots, W_7$ оцениваются аналогично.

При каждом $j = 1, \ldots, 8$ мы разобьем значения d_j на совокупности, как указано в лемме 3. Значения m_j мы также разобьем на $\ll \ln N$ совокупностей так, что к одной и той же совокупности будут принадлежать значения m_j, лежащие в интервале вида

$$M_j < m_j \leqslant M_j'; \quad M_j' \leqslant 2M_j.$$

Оценим часть W_8' суммы W_8, отвечающую области вида

$$\varphi_1 < d_1 \leqslant F_1, \ldots, \varphi_8 < d_8 \leqslant F_8; \quad F = \varphi^{1+\varepsilon_0},$$
$$M_1 < m \leqslant M_1', \ldots, M_8 < m_8 \leqslant M_8'. \tag{1}$$

Очевидно,

$$|W_8'| = \Big| \sum\sum \ldots \sum\sum_{d_1 m_1 \ldots d_8 m_8 \leqslant N} \chi(d_1 m_1 \ldots d_8 m_8 + k) \Big|,$$

где суммирование распространяется на область (1).

Не нарушая общности доказательства, можно предполагать, что числа $M_1, \ldots, M_8$ расположены в неубывающем порядке. Ради краткости положим $M_1 \ldots M_8 = M$, $\varphi_1 \ldots \varphi_8 = \Phi$.

Если $M\Phi \leqslant N\Delta$, то, очевидно,

$$W_8' \ll N^{1+\varepsilon_1}\Delta.$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь случай $M\Phi > N\Delta$.

Если $M_8 > q^{\frac{2}{3}}$, то согласно известному закону распределения характеров, замечая, что призведение $d_1 \ldots d_8 m_1 \ldots m_7$ пробегает лишь числа, меньшие $Nq^{-\frac{2}{3}}$, получим

$$W_8' \ll N^{1+\varepsilon_1} q^{-\frac{2}{3}} \sqrt{q} \ln q \ll N^{1+\varepsilon_1}\Delta.$$

Пусть $N^{\frac{1}{3}} \leqslant M_8 \leqslant q^{\frac{2}{3}}$. Тогда, применяя лемму 1, находим (полагаем $y = m_8$)

$$W_8 \ll Nq^{\varepsilon''}\left(\left(\frac{qN^{\frac{2}{3}}}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q^3}{N^4}\right)^{\frac{1}{8}}\right) \ll Nq^{\varepsilon''}\Delta.$$

Пусть $M \leqslant N^{\frac{4}{5}-\frac{1}{8}}$. Пусть β — наименьшее целое число с условием $M\varphi_1 \ldots \varphi_\beta > N^{\frac{4}{5}-\frac{1}{8}}$. Тогда, определяя γ равенством

$$M\varphi_1 \ldots \varphi_{\beta-1} N^\gamma = N^{\frac{4}{5}-\frac{1}{8}},$$

мы будем иметь $\varphi_\beta > N^\gamma$ и, следовательно, согласно лемме 3, существует целое положительное B и две возрастающие последовательности целых положительных чисел x и y с условием

$$N^\gamma < x \leqslant N^{\gamma+\varepsilon_0+\frac{1}{8}}$$

такие, что все значения d_β выбранной совокупности, взятые каждое B раз, получим, если из всех произведений xy выберем лишь те, которые удовлетворяют условию $(x, y) = 1$. Положим

$$u = m_1 \ldots m_8 d_1 \ldots d_{\beta-1}, \quad v = d_{\beta+1} \ldots d_8.$$

Очевидно имеем

$$|W_\beta'| = \left|\sum_\sigma \mu(\sigma) \sum_{u\xi} \sum_{\eta v \leqslant N\sigma^{-2}} \sum \sum \chi(\sigma^2 u\xi\eta v + k)\right.,$$

где σ пробегает целые положительные числа, а ξ и η при данном σ пробегают частные от деления на σ чисел x и y, кратных σ. Пусть k_0 определяется сравнением

$$\sigma^2 k_0 \equiv k \pmod q.$$

Тогда часть $W(\sigma)$ суммы W_8', отвечающая данному значению σ, будет

$$\ll \left|\sum_{u\xi} \sum_{\eta v \leqslant N\sigma^{-2}} \sum \sum \chi(u\xi\eta v + k_0)\right|.$$

Но каждое свое численное значение x_0 произведение $u\xi$ пробегает

$\ll N^{\varepsilon_6}$ раз; равным образом, каждое свое численное значение y_0 произведение ηv пробегает $\ll N^{\varepsilon_6}$ раз, причем

$$N^{\gamma}\sigma^{-1} < \xi \ll N^{\gamma+\varepsilon_0+\frac{1}{8}}$$

и вместе с тем, согласно определению γ,

$$N^{\frac{4}{5}-\frac{1}{8}}\sigma^{-1} < x_0 < N^{\frac{4}{5}+\varepsilon_7}\sigma^{-1}.$$

Но последний интервал можно разбить на $\ll \ln N$ интервалов вида $U-U_0 < x_0 \leqslant U$, где $cU \leqslant U_0 \leqslant 0{,}5\,U$, $0 < c < 0{,}5$. Применяя к каждому такому интервалу лемму 2, получим при $N^{\frac{4}{5}-\frac{1}{8}} \geqslant q^{0,5}\sigma$

$$W(\sigma) \ll N\sigma^{-2} q^{\varepsilon'''} \ln N \sqrt{\frac{q^{0,5}\sigma}{N^{\frac{4}{5}-\frac{1}{8}}} + \frac{N^{\frac{4}{5}}\sigma^2}{\sigma N} + \frac{1}{q}} \ll N^{1+\varepsilon_8}\Delta\sigma^{-\frac{3}{2}},$$

что, ввиду очевидного неравенства $W(\sigma) \ll N^{1+\varepsilon_9}\sigma^{-2}$, верно и при $N^{\frac{4}{5}-\frac{1}{8}} < q^{0,5\sigma}$. Отсюда, суммируя по всем σ, получим

$$W_8' \ll N^{1+\varepsilon_9}\Delta.$$

Пусть теперь $M > N^{\frac{4}{5}-\frac{1}{8}}$, но произведение $M'' = M_{\delta+1}\ldots M_8$ всех M_j, превосходящих $N^{\frac{1}{8}}$, будет $< N^{\frac{4}{5}-\frac{1}{8}}$. Тогда среди чисел $M_1, \ldots, M_\delta$ найдется единственное β с условием

$$N^{\frac{4}{5}-\frac{1}{8}} \leqslant M'' M_1 \ldots M_\beta < N^{\frac{4}{5}}. \tag{2}$$

Применяя лемму 2 (полагая $x = m_{\delta+1}\ldots m_8 m_1 \ldots m_\beta$ и разбивая, подобно тому как при рассмотрении предыдущего случая, интервал значений для x на более мелкие), получим

$$W_8' \ll N^{1+\varepsilon_{10}} \sqrt{\frac{q^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{27}{40}}} + \frac{N^{\frac{4}{5}}}{N} + \frac{1}{q}} \ll N^{1+\varepsilon_{10}}\Delta.$$

Если $N^{\frac{4}{5}-\frac{1}{8}} \leqslant M \leqslant N^{\frac{4}{5}}$, то, применяя лемму 2 $(x = m_1 \ldots m_8)$, получим

$$W_8' \ll N^{1+\varepsilon_{11}}\Delta.$$

Если $N^{\frac{1}{5}} \leqslant M_8 < N^{\frac{1}{3}}$ то, полагая $N_1 = (\Phi M_1 \ldots M_7)^{1+\varepsilon_0}$, $y = m_8$ (имеем $xy \leqslant N_1$) и применяя лемму 2, получим

$$W_8' \ll N_1^{1+\varepsilon_{12}} \sqrt{\frac{q^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{3}}}{N_1} + \frac{N_1}{N^{\frac{1}{5}} N_1} + \frac{1}{q}} \ll N^{1+\varepsilon_{12}} \Delta.$$

Если при $M_8 < N^{\frac{1}{5}}$ не менее двух сомножителей M_j числа M'' будет $< N^{\frac{1}{6}}$, то, полагая $y = m_{\beta+1} m_{\beta+2}$ и рассуждая подобно тому, как в предыдущем случае $(N^{\frac{1}{4}} \leqslant M_{\beta+1} M_{\beta+2} < N^{\frac{1}{3}})$, получим

$$W_8' \ll N^{1+\varepsilon_{13}} \Delta.$$

Далее, рассмотрим случай, когда $M > N^{\frac{4}{5}}$, $M_8 < N^{\frac{1}{5}}$ и лишь одно из чисел $M_{\beta+1}, \ldots, M_8$ (следовательно, $M_{\beta+1}$) меньше $N^{\frac{1}{6}}$. Произведение $M_{\beta+2} \ldots M_8$ будет $> N^{\frac{4}{5} - \frac{1}{6}}$ и, следовательно, состоит не менее чем из четырех сомножителей. Полагая $x = m_5 m_6 m_7 m_8$ и применяя лемму 2, получим $(N^{\frac{2}{3}} < M_5 M_6 M_7 M_8 < N^{\frac{4}{5}})$

$$W_8' \ll N^{1+\varepsilon_{14}} \Delta.$$

Наконец, случай, когда $M_{\beta+1} \geqslant N^{\frac{1}{6}}$, рассматривается подобно предыдущему $(x = m_5 m_6 m_7 m_8)$. На основании всего доказанного мы и убеждаемся в справедливости теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть n — делитель числа $q-1$ с условием $1 < n < q-1$ и пусть s — одно из чисел $0, 1, \ldots, n-1$. Тогда для числа T_s чисел вида $p+k$ с условиями*

$$p \leqslant N, \quad \operatorname{ind}(p+k) \equiv s \pmod{n}$$

имеем неравенство (значение Δ указано в формулировке теоремы 1):

$$T_s - \frac{1}{n}\pi(N) \ll N^{1+\varepsilon'} \Delta.$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 вышеупомянутой моей работы ([1]).

Поступило
7. V. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 197—210.
[2] Виноградов И. М., Уточнение метода оценки сумм с простыми числами, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 7 (1943), 17—34.
[3] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXIII, 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 291—330

Р. Л. ДОБРУШИН

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЦЕПИ МАРКОВА ИЗ ДВУХ СОСТОЯНИЙ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе дается исчерпывающее описание предельных распределений для числа попаданий в одно из состояний однородной цепи Маркова из двух состояний.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается однородная цепь Маркова с двумя возможными состояниями системы $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, заданная матрицей вероятностей перехода

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ \overline{q} & \overline{q} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

где $p+q=\overline{p}+\overline{q}=1$, p — условная вероятность перехода за один шаг из $\mathscr{E}_1$ в $\mathscr{E}_1$, q — из $\mathscr{E}_1$ в $\mathscr{E}_2$, $\overline{q}$ — из $\mathscr{E}_2$ в $\mathscr{E}_1$ и $\overline{p}$ — из $\mathscr{E}_2$ в $\mathscr{E}_1$. Случайная величина ξ_n — число попаданий в состояние $\mathscr{E}_1$ за первые n шагов при условии, что на первом шагу система находилась в $\mathscr{E}_1$,— имеет следующее распределение: *

$$P\{\xi_n = m\} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{m-1}^{k} C_{n-m-1}^{k} p^{m-k-1} q^{k+1} \overline{p}^{n-m-k-1} \overline{q}^{k} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} C_{m-1}^{k} C_{n-m-1}^{k-1} p^{m-k-1} q^{k} \overline{p}^{n-m-k} \overline{q}^{k} \quad (m \geqslant 1). \qquad (1.2)$$

Действительно, k-й член первого ряда равен вероятности того, что $\xi_n = m$ и система сделала $k+1$ переходов из $\mathscr{E}_1$ в $\mathscr{E}_2$ и k переходов из $\mathscr{E}_2$ в $\mathscr{E}_1$, а k-й член второго ряда равен вероятности того, что $\xi_n = m$ и система сделала k переходов из $\mathscr{E}_1$ в $\mathscr{E}_2$ и k переходов из $\mathscr{E}_2$ в $\mathscr{E}_1$.

Еще А. А. Марковым ([5]) было показано, что при постоянной матрице P, не содержащей нулевых элементов, и $n \to \infty$ случайная величина ξ_n, при соответствующей нормировке, имеет асимптотически нормальное распределение. Аналогичная локальная предельная теорема впервые была доказана Пеппером ([6]) при помощи прямых асимптотиче-

* Для общности записи полагаем $C_s^t = 0$ при $t > s$ и $C_s^0 = C_{-1}^{-1} = 1$ при $s \geqslant 0$.

ских вычислений выражений (1.2). Она следует также из доказанной другим методом А. Н. Колмогоровым ([3]) общей локальной предельной теоремы для цепи из N состояний. Купманом ([4]) была рассмотрена схема, обобщающая известную теорему Пуассона. Он изучил предельное распределение величины ξ_n, соответствующей n испытаниям в цепи с матрицей

$$P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ \overline{q}_n & \overline{p}_n \end{pmatrix},$$

где $q_n \cdot n \to a < \infty$ и $p_n \to \tilde{p} < 1$ при $n \to \infty$. Это распределение выражается через полиномы Лагерра [см. (1.5)]. Позднее мы укажем его простой вероятностный смысл.

А. Н. Колмогоровым был поставлен вопрос об отыскании всех распределений, к которым могут сходиться распределения последовательности соответствующим образом нормированных величин ξ_n при $n \to \infty$ и матрице вероятностей перехода, меняющейся вместе с n. В случае испытаний Бернулли (в наших обозначениях $p = \overline{q}$, $q = \overline{p}$) такими распределениями будут только нормальное распределение, распределение Пуассона и распределение, дополнительное к распределению Пуассона, соответствующее случайной величине $n - \zeta$, где ζ распределено по закону Пуассона. Это было показано Козуляевым ([2]). В общем случае цепи Маркова имеет место следующая

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть матрица вероятностей перехода P является функцией от n и пусть случайная величина ξ_n соответствует цепи Маркова с матрицей $P(n)$; тогда последовательность распределений вероятностей соответственным образом нормированных величин ξ_{n_k} может сходиться при $n_k \to \infty$ к собственному предельному распределению в том и только в том случае, когда выполнено хотя бы одно из условий $p1) - p5)$:*

$$\begin{aligned} &p1)\quad pn_k \to a < \infty; \\ &p2)\quad p \to 0, \quad pn_k \to \infty; \\ &p3)\quad p \to \tilde{p} < 1, \quad q \to \tilde{q} < 1; \\ &p4)\quad q \to 0, \quad qn_k \to \infty; \\ &p5)\quad qn_k \to a < \infty \end{aligned}$$

и, вместе с тем, хотя бы одно из аналогичных условий $\overline{p}1) - \overline{p}5)$, наложенных на $\overline{p}$, $\overline{q}$.

В схеме 1 указаны номера распределений, получающихся при различных комбинациях условий $pi)$ с условиями $\overline{p}j)$. Распределения I—VII описываются далее.

В случаях I — V и VII предельное распределение не зависит от подпоследовательности n_k. В случае VI получаются два предельных распределения: одно для четных n_k, другое для нечетных.

I. *Если* $qn \to \infty$, $\overline{q}n \to \infty$ *и* $\max(n\overline{p}, np) \to \infty$, *то*

$$P\left\{\frac{\xi_n - nM}{\sqrt{nD}} < x\right\} \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \tag{1.3}$$

Схема 1

Условия на $\bar{p}$ \ Условия на p		p 1 $pn \to a < \infty$	p 2 $p \to 0$ $pn \to \infty$	p 3 $p \to \tilde{p} < 1$ $q \to \tilde{q} < 1$	p 4 $q \to 0$ $qn \to \infty$	p 5 $qn \to a < \infty$
$\bar{p}$ 5	$\bar{q}n \to b < \infty$	II	II	II	IV	VII
$\bar{p}$ 4	$\bar{q} \to 0$ $\bar{q}n \to \infty$	I	I	I	I	V
$\bar{p}$ 3	$\bar{p} \to \tilde{\tilde{p}} < 1$ $\bar{q} \to \tilde{\tilde{q}} < 1$	I	I	I	I	III
$\bar{p}$ 2	$\bar{p} \to 0$ $\bar{p}n \to \infty$	I	I	I	I	III
$\bar{p}$ 1	$\bar{p}n \to b < \infty$	VI	I	I	I	III

где

$$M = \frac{\bar{q}}{q + \bar{q}}, \qquad D = \frac{q\bar{q}\,(p + \bar{p})}{(q + \bar{q})^3}. \tag{1.4}$$

II. *Если* $\bar{q}n \to b < \infty$ *и* $p \to \tilde{p} < 1$, *то*

$$P\{\xi_n < x\} \Rightarrow (1 - \tilde{p})\, e^{-b} \sum_{1 \leqslant k < x} L_{k-1}\left(-\frac{(1 - \tilde{p})\, b}{\tilde{p}}\right) \tilde{p}^{k-1}, \tag{1.5}$$

где $L_k(w)$ — *полиномы Лагерра порядка* k [см. ([7]), стр. 575], *определяемые производящей функцией*

$$\frac{1}{1 - s}\, e^{-\frac{ws}{1-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(w)\, s^k. \tag{1.6}$$

Это распределение было получено Купманом [см. ([4])]. Оно может быть описано как распределение суммы $\zeta_1 + \cdots + \zeta_\nu$ случайного числа ν одинаково распределенных случайных величин ζ_i, причем $\nu - 1$ распределено по закону Пуассона с параметром b, а ζ_i имеет геометрическое распределение с параметром $\tilde{p}$, т. е.

$$P\{\zeta_i = k\} = \tilde{p}^{k-1}(1 - \tilde{p}), \quad k \geqslant 1, \text{ если } \tilde{p} \neq 0,$$

и

$$P\{\zeta_i = 1\} = 1, \quad \text{если } \tilde{p} = 0.$$

Величины ν и ζ_i независимы в совокупности. Возможность такого описания вытекает из того, что система «почти все время» проводит в $\mathscr{E}_2$

и лишь «изредка», по закону Пуассона, попадает в $\mathcal{E}_1$. Попав в $\mathcal{E}_1$, она остается там случайный промежуток времени, распределенный по геометрическому закону. Дополнительное слагаемое ζ_1 возникает из-за того, что в начальный момент система находится в $\mathcal{E}_1$. Распределение Купмана представляет собой одно из обобщенных распределений Пуассона, введенных Хинчиным [см. (8)]. При $p=0$ оно превращается в распределение величины $\nu+1$, где ν имеет обычное распределение Пуассона.

III. *Если* $qn \to a < \infty$ *и* $\bar{p} \to \tilde{p} < 1$, *то* *

$$P\{\xi_n - n < x\} \Rightarrow e^{-a} \sum_{\substack{k > -x \\ k \geqslant 0}} \left[L_k\left(-\frac{(1-\tilde{p})\,a}{\tilde{p}}\right) + L_{k+1}\left(-\frac{(1-\tilde{p})\,a}{\tilde{p}}\right)\right] \tilde{p}^k. \quad (1.7)$$

Это распределение было также получено Купманом (4). Оно совпадает с распределением случайной величины $-(\zeta_1 + \cdots + \zeta_\nu)$, где ζ_i имеют геометрическое распределение с параметром $\tilde{p}$, ν — распределение Пуассона с параметром a и все величины ζ_i, ν независимы.

IV. *Если* $\bar{q}n \to b < \infty$, $q \to 0$, *но* $qn \to \infty$, *то*

$$P\{q\xi_n < x\} \Rightarrow F(x), \quad (1.8)$$

где

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leqslant 0,$$

$$F(x) = \int_0^x e^{-(b+u)} I_0(2\sqrt{bu})\, du$$

и где

$$I_0(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,k!} \left(\frac{w}{2}\right)^{2k}$$

— *функция Бесселя порядка* 0 *от чисто мнимого аргумента.* $F(x)$ является функцией распределения суммы $\zeta_1 + \cdots + \zeta_\nu$ случайного числа ν независимых случайных величин ζ_i. Величины ζ_i имеют показательное распределение с параметром 1, т. е.

$$P\{\zeta_i > x\} = e^{-x},$$

а $\nu - 1$ — распределение Пуассона с параметром b. Вероятностный смысл случая IV тот же, что и случая II, но только геометрическое распределение для длины серии пребываний в $\mathcal{E}_1$ переходит в свой непрерывный аналог — показательное распределение. Распределение (1.8) также представляет собой обобщенное распределение Пуассона.

V. *Если* $qn \to a < \infty$, $\bar{q} \to 0$, *но* $\bar{q}n \to \infty$, *то*

$$P\{\bar{q}(n - \xi_n) < x\} \Rightarrow \tilde{F}(x), \quad (1.9)$$

---

* Для общности записи полагаем $L_{-1}(w) = 0$.

где

$$\widetilde{F}(x) = \int_{-x}^{0} \sqrt{-\frac{a}{u}}\, e^{-a+u} I_1(2\sqrt{-au})\, du \text{ при } x \leqslant 0,$$

$$\widetilde{F}(x) = 1 \qquad \text{при } x > 0$$

и где

$$I_1(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(k+1)!} \left(\frac{w}{2}\right)^{2k+1}$$

— функция Бесселя порядка 1 от чисто мнимого аргумента. $\widetilde{F}(x)$ является функцией распределения случайной величины $-(\zeta_1 + \cdots + \zeta_\nu)$, где ζ_i имеют показательное распределение с параметром 1, ν — распределение Пуассона с параметром a и все величины ν, ζ_i независимы.

VI. *Если* $pn \to a < \infty$, $\bar{p}n \to b < \infty$, *то*

$$\begin{aligned} &P\left\{\xi_{n_k} - \frac{n_k}{2} < x\right\} \Rightarrow \sum_{\left[\frac{k+1}{2}\right] < x} r_k \quad (n_k = 2k, \quad k = 0, 1, \ldots), \\ &P\left\{\xi_{n_k} - \frac{n_k+1}{2} < x\right\} \Rightarrow \sum_{\left[\frac{k}{2}\right]} r_k \quad (n_k = 2k+1, \quad k = 0, 1 \ldots), \end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &r_k = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{a+b}{2}} I_{|k|}(\sqrt{ab}) \quad \text{при } a \neq 0,\ b \neq 0, \\ &r_k = \frac{a^k e^{-a}}{k!}, \quad k \geqslant 0;\ r_k = 0, \quad k < 0, \text{ при } b = 0, \\ &r_{-k} = \frac{b^k e^{-b}}{k!}, \quad k \geqslant 0;\ r_k = 0, \quad k > 0, \text{ при } a = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

и $I_k(w)$ *— функция Бесселя от чисто мнимого аргумента порядка* k [см. ([7]), стр. 542], *определяемая рядом*

$$I_k(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!\,(k+l)!} \left(\frac{w}{2}\right)^{k+2l}. \tag{1.12}$$

Распределение (1.10), соответствующее четным n, совпадает с распределением случайной величины $\left[\frac{\xi_1 - \xi_2 + 1}{2}\right]$, а соответствующее нечетным — совпадает с распределением величины $\left[\frac{\xi_1 - \xi_2}{2}\right]$, где ξ_1 имеет распределение Пуассона с параметром $\frac{a}{2}$, а ξ_2 — с параметром $\frac{b}{2}$ и где величины ξ_1 и ξ_2 независимы. Возможность такого описания следует из того, что «в основном» перемещение системы представляет собой детерминированное чередование состояний $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_1, \ldots$ и лишь изредка происходят случайные задержки в $\mathscr{E}_1$ (число их ξ_1) и в $\mathscr{E}_2$ (число их ξ_2). Распределение (1.11) мы будем называть сдвоенным распределением Пуассона.

VII. *Если* $qn \to a < \infty$, $\bar{q}n \to b < \infty$, *то*

$$P\left\{\frac{\xi_n}{n} < x\right\} \Rightarrow F(x),$$

где

$$\left.\begin{aligned} &F(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \leqslant 0,\\ &F(x) = \int_0^x e^{-at} e^{-b(1-t)} [aI_0(2\sqrt{abt(1-t)}) + \\ &+\sqrt{\frac{abt}{1-t}} I_1(2\sqrt{abt(1-t)})]\, dt \ \text{при} \ 0 < x < 1,\\ &F(1) = 1 - e^{-at},\\ &F(x) = 1 \ \text{при} \ x > 1 \end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

и где $I_0(w)$ *и* $I_1(w)$ — *функции Бесселя от чисто мнимого аргумента* [см. (1.12)]. Непрерывным аналогом рассматриваемого случая является марковский процесс, при котором система за время dt с вероятностью $a\,dt$ переходит из $\mathscr{E}_1$ в $\mathscr{E}_2$, если она была в $\mathscr{E}_1$, и с вероятностью $b\,dt$ — из $\mathscr{E}_2$ в $\mathscr{E}_1$, если она была в $\mathscr{E}_2$. Часть времени, проведенная системой в $\mathscr{E}_1$, если вначале система была в $\mathscr{E}_1$ и всего прошла единица времени, имеет распределение $F(x)$. В такой постановке эта задача решалась в 1950 году на математическом практикуме МГУ студентами Ф. И. Карпелевичем и В. А. Успенским. Ими и было впервые получено распределение (1.13).

Во всех остальных случаях, кроме перечисленных в I — VII, *последовательность случайных величин* ξ_{n_k} *ни при какой нормировке не сходится при* $n_k \to \infty$ *к собственному предельному распределению.*

Кроме сформулированной выше интегральной предельной теоремы, интересно доказать также и обобщенную локальную предельную теорему, т. е. найти «полный набор» асимптотических выражений для отдельных членов распределения вероятностей величины ξ_n. Чтобы уточнить понятие «полного набора», А. Н. Колмогоров предложил рассмотреть в качестве меры расхождения между распределением вероятностей $\{p_m\}$, $m = 1, \ldots, n, \ldots$, и совокупностью аппроксимирующих выражений * $\{\pi_m\}$ величину $\rho(\{p_m\},\{\pi_m\}) = \sum_{m=1}^{\infty} |p_m - \pi_m|$. Введенное так расстояние превращает множество последовательностей $\{\pi_m\}$ с $\sum_{m=1}^{\infty} |\pi_m| < \infty$ в метрическое пространство.

Естественность и удобство введенного расстояния подтверждается тем, что если η — целочисленная случайная величина с распределением вероятностей $\{p_m\}$ и ζ — целочисленная случайная величена с распределением $\{q_m\}$, то

$$\rho(\eta, \zeta) = \rho(\{p_m\},\{q_m\}) = \max_A |P\{\eta \in A\} - P\{\zeta \in A\}|, \qquad (1.14)$$

* Мы не требуем, чтобы $\sum_{m=1}^{\infty} \pi_m = 1$.

где A — всевозможные подмножества натурального ряда. Так как единственным способом отличить при статистическом наблюдении два распределения является сравнение числа появлений некоторого связанного с ними события A, то величину $\rho(\eta, \zeta)$ можно считать мерой статистической различимости двух распределений $\{p_m\}$ и $\{q_m\}$. Кроме того, из (1.14) видно, что если последовательность величин η_n при соответствующей нормировке имеет некоторое предельное распределение и $\rho(\eta_n, \zeta_n) \to 0$, то и последовательность случайных величин ζ_n имеет при той же нормировке то же самое предельное распределение.

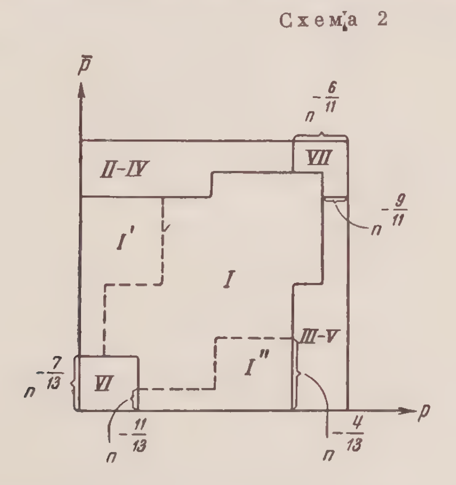
Задача нахождения полного набора асимптотических выражений для исходных вероятностей (1.2) сводится таким образом к задаче нахождения относительно простых аппроксимирующих выражений $\pi_m(n; p, \bar{p})$ таких, для которых

$$\rho(\{p_m(n; p, \bar{p})\}, \{\pi_m(n; p, \bar{p})\}) = \sum_{m=1}^{\infty} |p_m(n; p, \bar{p}) - \pi_m(n; p, \bar{p})| \to 0$$

при $n \to \infty$ *равномерно по* p и $\bar{p}$, где $1 \geqslant p \geqslant 0$ и $1 \geqslant \bar{p} \geqslant 0$. Эти аппроксимирующие выражения могут быть получены из предельных распределений I — VII путем отбрасывания нормировки и перехода, когда это нужно, от непрерывных распределений к соответствующим дискретным. Разным предельным законам будут соответствовать разные аналитические выражения для $\pi_m(n; p, \bar{p})$ (см. схему 2). Единственным исключением является то, что случаи II и IV (аналогично III и V) будут давать общее выражение для $\{\pi_m\}$. Это слияние происходит из-за того, что дискретным аналогом показательного распределения является геометрическое распределение.

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть аппроксимирующие выражения* $\pi_m(n; p, \bar{p})$ *выбраны следующим образом:*

Схема 2



Точка единичного квадрата с координатами $(p, \bar{p})$ соответствует матрице $P = \begin{pmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix}$.

I. *В центральной части квадрата, задаваемой неравенством* $\max(p, \bar{p}) \geqslant n^{-7/13}$ *при* $p \leqslant {}^1/_2$, $\bar{p} \leqslant {}^1/_2$, *неравенством* $q \geqslant n^{-7/13}$ *при* $\bar{p} \leqslant {}^1/_2$, $q \leqslant {}^1/_2$, *неравенством* $\bar{q} \geqslant n^{-7/13}$ *при* $\bar{q} \leqslant {}^1/_2$, $p \leqslant {}^1/_2$ *и неравенствами* $q \geqslant n^{-9/11}$, $\bar{q} \geqslant n^{-9/11}$ *при* $q \leqslant {}^1/_2$, $\bar{q} \leqslant {}^1/_2$, *положим*

$$\pi_m(n;\ p,\ \bar{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nD}}\, e^{-\frac{(m-nM)^2}{2nD}}, \tag{1.15}$$

где

$$M = \frac{\bar{q}}{q+\bar{q}}, \quad D = \frac{q\bar{q}(p+\bar{p})}{(q+\bar{q})^3}. \tag{1.16}$$

II, IV. *В области, где* $q \geqslant n^{-6/11}$ *и* $\bar{q} \leqslant n^{-7/13}$, *если* $p \leqslant {}^1/_2$, *и где* $\bar{q} \leqslant n^{-9/11}$, *если* $p \geqslant {}^1/_2$, *положим*

$$\pi_m(n;\ p,\ \bar{p}) = qe^{-\bar{q}n} L_{m-1}\left(-\frac{q\bar{q}n}{p}\right)\cdot p^{m-1}, \tag{1.17}$$

где $L_k(w)$ — *полиномы Лагерра* [см. (1.6)].

III, V. *В области, где* $\bar{q} \geqslant n^{-6/11}$ *и* $q \leqslant n^{-7/13}$, *если* $\bar{p} \leqslant {}^1/_2$, *и где* $q \leqslant n^{-9/11}$, *если* $\bar{p} \geqslant {}^1/_2$, *положим*

$$\pi_m(n;\ p,\ \bar{p}) = e^{-qn}\left[L_{n-m}\left(-\frac{q\bar{q}n}{p}\right) + L_{n-m-1}\left(-\frac{q\bar{q}n}{p}\right)\right]\bar{p}^{n-m}. \tag{1.18}$$

VI. *При* $p < n^{-7/13}$, $\bar{p} < n^{-7/13}$ *положим*

$$\pi_m(n;\ p,\ \bar{p}) = e^{-(p+\bar{p})n/2}\left[\left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{\tilde{m}/2} I_{|\tilde{m}|}\left(n\sqrt{p\bar{p}}\right) + \left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{\frac{\tilde{m}+1}{2}} I_{|\tilde{m}+1|}\left(n\sqrt{p\bar{p}}\right)\right], \tag{1.19}$$

где $\tilde{m}$ *и* $\tilde{m}+1$ — *два целых решения уравнения* $\left[\frac{n+1+x}{2}\right] = m$, [ ] — *знак целой части и* $I_k(w)$ — *функция Бесселя* [см. (1.12)].

VII. *При* $q < n^{-6/11}$, $\bar{q} < n^{-6/11}$ *и* $\min(q, \bar{q}) < n^{-9/11}$ *положим*

$$\left.\begin{aligned} \pi_m(n;\ p,\ \bar{p}) &= e^{-qm}e^{-\bar{q}(n-m)}\Big[qI_0\left(2\sqrt{q\bar{q}m(n-m)}\right) + \\ &+ \sqrt{\frac{q\bar{q}m}{n-m}}\, I_1\left(2\sqrt{q\bar{q}m(n-m)}\right)\Big], \quad m \neq n, \\ \pi_n(n;\ p,\ \bar{p}) &= e^{-qn}. \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

Тогда

$$\rho\left(\{p_m(n;\ p,\ \bar{p})\},\ \{\pi_m(n;\ p,\ \bar{p})\}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} |\, p_m(n;\ p,\ \bar{p}) - \pi_m(n;\ p,\ \bar{p}) = O\left(\frac{\ln^{3/2} n}{n^{1/12}}\right) \to 0 \tag{1.21}$$

при $n \to \infty$ *равномерно по* p *и* p *.

---

* Под $O(\alpha)$ мы будем здесь и в дальнейшем подразумевать функцию, для которой существует $c > 0$ такое, что $|O(\alpha)| \leqslant c\alpha$ при достаточно больших n и при всех значениях параметров, от которых зависят $O(\alpha)$ и α.

Выбор границ действия отдельных предельных законов, указанный в теореме, не является ни единственно возможным, ни наилучшим. Он сделан так (см. § 8), чтобы, исходя из остаточных членов отдельных предельных теорем, доказанных в § 3—7, получить максимально быстрое стремление к нулю в соотношении (1.21). Однако при доказательстве этих отдельных теорем мы не стремились к максимальной точности остаточных членов. Поэтому порядок стремления к нулю в (1.21) может быть значительно усилен.

В § 2 доказывается обобщенная локальная предельная теорема для случая независимых испытаний. Результаты этого параграфа имеют самостоятельный интерес, а также используются в дальнейших доказательствах*.

План дальнейшего изложения состоит в том, что сначала доказываются локальные предельные теоремы для сходимости к отдельным распределениям: в § 3 — к распределению Купмана (случаи II — V), в § 4 — к сдвоенному распределению Пуассона (случай VI), в § 5 — к распределению Карпелевича-Успенского (случай VII), в § 6 и 7 — к нормальному распределению (случай I). При этом в § 6 используются методы Пеппера ([6]).

В § 8 объединяются результаты предыдущих параграфов и затем доказывается локальная предельная теорема. В § 9 на основе результатов § 3—7 доказывается интегральная предельная теорема.

§ 2. Случай испытаний Бернулли

Рассмотрим n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Пусть $\xi(n;\,p)$ — число успехов в этих n испытаниях и

$$p_m(n;\,p) = P\{\xi(n;\,p) = m\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть*

$$\pi_m(n;\,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\,e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}} \tag{2.1}$$

и

$$p \geqslant \gamma(n)/n, \quad q = 1 - p \geqslant \gamma(n)/n, \tag{2.2}$$

где $\gamma(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\,p_m(n;\,p) - \pi_m(n;\,p)\,| = O\left(\frac{\ln^{3/2}\gamma}{\sqrt{\gamma}}\right). \tag{2.3}$$

Если, кроме того,

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \tag{2.4}$$

и $|x| \leqslant \delta(n)$, *где*

$$\frac{\delta^3(n)}{\sqrt{\gamma(n)}} \to 0, \quad \delta(n) \to \infty \tag{2.5}$$

---

* Более точные результаты для этого случая получены Ю. В. Прохоровым ([9])

при $n \to \infty$, *то*

$$p_m(n;\, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-x^2/2}[1 + O(\delta^3 / \gamma^{1/2})]. \tag{2.6}$$

Доказательство. Как известно,

$$p_m(n;\, p) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{2.7}$$

Предположим сначала, что $|x| \leqslant \delta(n)$, где $\delta(n)$ удовлетворяет условию (2.5). Тогда $m \sim np$ и $n - m \sim nq$. Поэтому, применяя формулу Стирлинга

$$k! = \sqrt{2\pi k}\cdot k^k e^{-k}\,[1 + O(1/k)], \tag{2.8}$$

получаем:

$$p_m(n;\, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\cdot\frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}}\,[1 + O(1/\gamma)]. \tag{2.9}$$

Далее,

$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{-1/2}\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left[1 + O\left(\frac{\delta}{\sqrt{\gamma}}\right)\right]. \tag{2.10}$$

Наконец,

$$\frac{n^n}{m^m (n-m)^{n-m}}\, p^m q^{n-m} = \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} =$$
$$= \exp\left\{-m \ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (n-m)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right\} =$$
$$= \exp\left\{\left[np + x\sqrt{npq}\right]\left[-x\sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{x^2}{2}\frac{q}{np} + O(\delta^3/\gamma^{3/2})\right] + \right.$$
$$\left. + \left[nq - x\sqrt{npq}\right]\left[x\sqrt{\frac{p}{nq}} + \frac{x^2}{2}\frac{p}{nq} + O(\delta^3/\gamma^{3/2})\right]\right\} =$$
$$= \exp\{-x^2/2 + O(\delta^3/\gamma^{1/2}) + O(\delta^4/\gamma)\} = e^{-x^2/2}[1 + O(\delta^3/\gamma^{1/2})]. \tag{2.11}$$

Соединяя (2.9), (2.10) и (2.11), получаем (2.6). Оценим теперь

$$\sum_{|x| > \delta(n)} \pi_m(n;\, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \sum_{|x| > \delta(n)} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{2.12}$$

Соседние члены ряда (2.12) соответствуют тем x, которые отличаются на $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{npq}}$. Их отношение равно

$$e^{-\frac{(x+\Delta x)^2}{2}} : e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-x\Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{2}}. \tag{2.13}$$

Поэтому ряд (2.12) может быть мажорирован геометрической прогрессией с первым членом $\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{\delta^2}{2}}$ и знаменателем $e^{-\delta\Delta x}$. Суммируя эту прогрессию, получаем:

$$\sum_{|x| > \delta(n)} \pi_m(n;\, p) \leqslant \frac{e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot\frac{1}{1 - e^{-\delta\Delta x}} = \frac{e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi npq}}\, O\left(\frac{\sqrt{npq}}{\delta}\right) = e^{-\frac{\delta^2}{2}}\, O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{2.14}$$

Если положить $\delta(n) = (2\ln\gamma)^{1/2}$, то из (2.6) и (2.14) вытекает:

$$\sum_{m=0}^{\infty} |p_m(n;\,p) - \pi_m(n;\,p)| \leqslant \sum_{|x|\leqslant\delta} |p_m - \pi_m| + \sum_{|x|>\delta} \pi_m + \sum_{|x|>\delta} p_m =$$

$$= O\left(\frac{(\ln\gamma)^{3/2}}{\gamma^{1/2}}\right) + \sum_{|x|>\delta} p_m. \tag{2.15}$$

Остается оценить эту последнюю сумму. Рассмотрим отношение

$$\frac{p_{m+1}}{p_m} = \frac{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}}{C_n^m p^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{p}{q} = \frac{1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}}{1 + x\sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{1}{np}}. \tag{2.16}$$

При всех m, соответствующих $x > \delta(n)$, имеем:

$$\frac{1}{1 - \frac{p_{m+1}}{p_m}} = \frac{1 + x\sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{1}{np}}{x\left(\sqrt{\frac{q}{np}} + \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) + \frac{1}{np}} = O\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\delta}\right). \tag{2.17}$$

Поэтому если ряд $\sum_{m\geqslant m_0} p_m$, где m_0 соответствует $x = \delta(n)$, заменить геометрической прогрессией со знаменателем $\max_{m\geqslant m_0} p_{m+1}/p_m$ и первым членом p_{m_0}, то

$$\sum_{m\geqslant m_0} p_m = p_{m_0} O\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\delta}\right) = \frac{e^{\frac{-\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi npq}}\, O\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\delta}\right) = e^{-\frac{\delta^2}{2}}\, O(1/\delta), \tag{2.18}$$

так как при $m = m_0$ еще действует оценка (2.6). Аналогично оцениваются члены, соответствующие $x \leqslant -\delta(n)$. Положив $\delta(n) = (2\ln\gamma)^{1/2}$, получим, что

$$\sum_{|x|\geqslant\delta} p_m = O(1/\gamma), \tag{2.19}$$

а из (2.15) и (2.19) вытекает утверждение (2.3) теоремы.

Перейдем к уточнению теоремы Пуассона.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть*

$$\pi_m(n;\,p) = \frac{(pn)^m}{m!} e^{-pn} \tag{2.20}$$

и

$$p \leqslant \frac{\gamma(n)}{n}, \tag{2.21}$$

где $\gamma(n) = O(\sqrt{n})$, *но* $\gamma(n) \to \infty$. *Тогда*

$$\sum_{m=0}^{\infty} |p_m(n;\,p) - \pi_m(n;\,p)| = O\left(\frac{\gamma^2 + \ln^2 n}{n}\right). \tag{2.22}$$

Доказательство. Положим $\delta(n) = \max(e^2\gamma(n), \ \ln n)$ и примем сначала, что $m \leqslant \delta(n)$. Обозначим $pn = a$. Тогда

$$p_m(n;\ p) = C_n^m p^m q^{n-m} =$$
$$= \frac{a^m}{m!} e^{-a} \left\{ \left(1 - \frac{0}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-m} \left[e^a \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n\right] \right\}. \tag{2.23}$$

Оценим отдельные сомножители:

$$\left|\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) - 1\right| \leqslant \left|\left(1 - \frac{m}{n}\right)^m - 1\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} C_m^i \left(\frac{m}{n}\right)^i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{n}\right)^i = O\left(\frac{\delta^2}{n}\right), \tag{2.24}$$

так как $C_m^i \leqslant m^i$ и при достаточно бо́льшом n величина $\frac{m^2}{n} < \frac{1}{2}$. Аналогично,

$$\left|\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-m} - 1\right| = \left|\left[1 - O\left(\frac{am}{n}\right)\right]^{-1} - 1\right| = O\left(\frac{\delta\gamma}{n}\right). \tag{2.25}$$

Наконец, так как при $x \to 0$

$$e(1-x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left\{1 + \frac{1}{x}\ln(1-x)\right\} = \exp\left\{1 + \frac{1}{x}[-x + O(x^2)]\right\} = 1 + O(x) \tag{2.26}$$

и так как $\frac{a}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$e^a\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \left[e\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n/a}\right]^a = \left[1 + O\left(\frac{a}{n}\right)\right]^a = 1 + O\left(\frac{a^2}{n}\right) =$$
$$= 1 + O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right). \tag{2.27}$$

Предпоследний знак равенства вытекает из оценки, аналогичной (2.24). Собирая (2.24), (2.25) и (2.27) и сравнивая с (2.23), имеем:

$$p_m(n;\ p) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}\left[1 + O\left(\frac{\delta^2}{n}\right)\right]. \tag{2.28}$$

Оценим «хвост» распределения Пуассона

$$\sum_{m=\delta(n)}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \tag{2.29}$$

Отношение m-го и $(m-1)$-го членов ряда (2.29) равно

$$\frac{a}{m} \leqslant \gamma / \delta \leqslant 1 / e^2.$$

Поэтому, заменяя (2.29) геометрической прогрессией, получаем, что

$$\sum_{m=\delta(n)}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = O\left(\frac{a^\delta}{\delta!} e^{-a}\right). \tag{2.30}$$

Применяя формулу Стирлинга (2.8), имеем:

$$\frac{a^{\delta}}{\delta!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}\left(\frac{ae}{\delta}\right)^{\delta}[1+O(1)]=O(e^{-\delta}), \tag{2.31}$$

так как $ae/\delta\leqslant\gamma e/\delta\leqslant e^{-1}$. Значит,

$$\sum_{m=\delta}^{\infty}\frac{a^m}{m!}e^{-a}=O(e^{-\delta})e^{-a}. \tag{2.32}$$

Далее, из (2.23) видно, что

$$p_m(n;p)\leqslant\frac{a^m}{m!}$$

и поэтому из (2.32) вытекает, что

$$\sum_{m=\delta}^{\infty}p_m(n;p)=O(e^{-\delta}). \tag{2.33}$$

Так как $\delta(n)\geqslant\ln n$, то из (2.28), (2.32) и (2.33) следует, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}|p_m(n;p)-\pi_m(n;p)|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}|p_m-\pi_m|+\sum_{m=\delta}^{\infty}\pi_m+\sum_{m=\delta}^{\infty}p_m=O\left(\frac{\delta^2}{n}\right),$$

что и требовалось доказать.

Если применить те же рассуждения к числу неуспехов, то нами будет доказана

ТЕОРЕМА 3. *Пусть*

$$\pi_m(n;p)=\frac{(qn)^{n-m}}{(n-m)!}e^{-qn}\quad\text{при } m\leqslant n,$$

$$\pi_m(n;p)=0\qquad\qquad\text{при } m>n \tag{2.34}$$

и пусть

$$q\leqslant\gamma(n)/n, \tag{2.35}$$

где $\gamma(n)=O(\sqrt{n})$, *но* $\gamma(n)\to\infty$. *Тогда*

$$\sum_{m=0}^{\infty}|p_m(n;p)-\pi_m(n;p)|=O\left(\frac{\gamma^2+\ln n}{n^2}\right). \tag{2.36}$$

Если выбрать $\pi_m(n;p)$ по формуле (2.1) при $p\geqslant n^{-1/5}$ и $q\geqslant n^{-1/5}$, по формуле (2.20) при $p<n^{-1/5}$ и по формуле (2.34) при $q<n^{-1/5}$, то из теорем 1,2 и 3 следует, что в этом случае

$$\sum_{m=0}^{\infty}|p_m(n;p)-\pi_m(n;p)|=O\left(\frac{\ln^{\frac{3}{2}}n}{n^{\frac{1}{5}}}\right). \tag{2.37}$$

Естественность* нашего выбора границ действия нормального закона

* Как мы уже отмечали в § 1 (см. стр. 299), уточнив теоремы 1, 2, 3 и в соответствии с этим по-другому выбрав границы действия отдельных законов, можно значительно усилить утверждение (2.37) (см. сноску на стр. 299).

и закона Пуассона подтверждается тем, что если обозначить эту границу через $\chi(n)$, то скорость стремления к нормальному закону «в основном» равна $(\chi\cdot n)^{-1/2}$, а к пуассоновскому — $\chi^2 n$. Приравнивая

$$(\chi\cdot n)^{-\frac{1}{2}}=\chi^2 n,$$

получаем, что

$$\chi=n^{-\frac{3}{5}}.$$

§ 3. Сходимость к распределению Купмана

ТЕОРЕМА 4. *Пусть*

$$\pi_m(n;\, p,\, \bar{p})=qe^{-\bar{q}n}L_{m-1}\left(-\frac{q\bar{q}n}{p}\right)\cdot p^{m-1}, \tag{3.1}$$

где $L_k(w)$ — *полином Лагерра порядка* k [см. (1.6)], *и пусть*

$$\bar{q}\leqslant\gamma(n)\,/\,n,\ \ q\geqslant\beta(n)\,/\,n, \tag{3.2}$$

где $\gamma^2(n)\,/\,\beta(n)\to 0$, *но* $\gamma(n)\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty}|\,p_m(n;\, p,\, \bar{p})-\pi_m(n;\, p,\, \bar{p})\,|=O\left(\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{\gamma^2+\ln^2 n}{n}\right), \tag{3.3}$$

где $p_m(n;\, p,\, \bar{p})$ — *вероятность* m *попаданий в* $\mathcal{E}_1$, *задаваемая формулой* (1.2).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть**

$$\pi_m(n;\, p,\, \bar{p})=e^{-qn}\left[L_{n-m}\left(-\frac{q\bar{q}n}{\bar{p}}\right)+L_{n-m-1}\left(-\frac{q\bar{q}n}{\bar{p}}\right)\right]\bar{p}^{\,n-m} \tag{3.4}$$

и пусть

$$q\leqslant\gamma(n)\,/\,n,\quad \bar{q}\geqslant\beta(n)\,/\,n, \tag{3.5}$$

где $\gamma^2(n)\,/\,\beta(n)\to 0$, *но* $\gamma(n)\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty}|\,p_m(n;\, p,\, p)-\pi_m(n;\, p,\, \bar{p})\,|=O\left(\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{\gamma^2+\ln^2 n}{n}\right). \tag{3.6}$$

Предпошлем доказательству сформулированных теорем две простые леммы о нашей метрике пространства распределений.

ЛЕММА 1. *Если* η *и* ζ — *две целочисленные случайные величины, то*

$$\rho(\eta,\zeta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\,P\{\eta=m\}-P\{\zeta=m\}\,|\leqslant 2P\{\eta\neq\zeta\}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$|\,P\{\eta=m\}-P\{\zeta=m\}\,|\leqslant P\{\eta=m,\,\zeta\neq m\}+P\{\eta\neq m,\,\zeta=m\}.$$

Просуммировав по всем m эти неравенства, получим (3.7).

ЛЕММА 2. *Если*

$$\begin{aligned}\eta&=\eta_1+\cdots+\eta_\nu,\\ \zeta&=\zeta_1+\cdots+\zeta_{\nu'},\end{aligned} \tag{3.8}$$

---

* Мы считаем $L_{-1}(w)=0$.

где η_i, ζ_i — *целочисленные случайные величины с общим распределением,* ν *и* ν' — *положительные случайные величины,* $\eta_i (i = 1, \ldots, \infty)$, ν *независимы в совокупности и* $\zeta_i (i = 1, \ldots, \infty)$, ν' *независимы в совокупности, то*

$$\rho(\eta, \zeta) \leqslant \rho(\nu, \nu'). \tag{3.9}$$

Доказательство. Имеем:

$$\sum_k |P\{\eta = k\} - P\{\zeta = k\}| \leqslant \sum_{k,l} |P\{\nu = l, \eta = k\} - P\{\nu' = l, \zeta = k\}| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k,l} |P\{\nu = l\} P\{\eta = k / \nu = l\} - P\{\nu' = l\} P\{\zeta = k / \nu' = l\}| =$$
$$= \sum_{k,l} P\{\eta = k / \nu = l\} |P\{\nu = l\} - P\{\nu' = l\}| = \sum_l |P\{\nu = l\} - P\{\nu' = l\}| =$$
$$= \rho(\nu, \nu').$$

Доказательство теоремы 4. Кроме величины ξ_n — числа попаданий в $\mathscr{E}_1$ за первые n шагов, введем случайную величину η_n — число попаданий в $\mathscr{E}_1$ до того момента, когда произойдет $(n+1)$-е попадание в $\mathscr{E}_2$. Очевидно, что

$$\eta_n = \sigma_0 + \cdots + \sigma_\nu,$$

где σ_i при $i \geqslant 1$ есть число моментов времени, проведенных системой в $\mathscr{E}_1$ между i-м переходом из $\mathscr{E}_2$ в $\mathscr{E}_1$ и $(i+1)$-м переходом из $\mathscr{E}_1$ в $\mathscr{E}_2$, а σ_1 — время, проведенное системой в $\mathscr{E}_1$ до первого перехода в $\mathscr{E}_2$. Случайная величина ν равна числу переходов из $\mathscr{E}_2$ в $\mathscr{E}_1$ за первые n попаданий в $\mathscr{E}_2$. Величины $\sigma_0, \ldots, \sigma_\nu$, ν взаимно независимы; случайные величины σ_i имеют геометрическое распределение

$$P\{\sigma_i = k\} = p^{k-1} q,$$

а величина ν может быть интерпретирована как число успехов в n независимых испытаниях и имеет биномиальное распределение

$$P\{\nu = l\} = C_n^l \bar{q}^l \bar{p}^{n-l}.$$

Пусть μ имеет пуассоновское распределение (2.20) с параметром $\bar{q}n$; тогда, по теореме 2,

$$\rho(\nu, \mu) = O\left(\frac{\gamma^2 + \ln^2 n}{n}\right). \tag{3.10}$$

Так как $q \leqslant 1$, то из (3.2) следует, что без ограничения общности можно считать $\beta \leqslant n$. Поэтому $\gamma^2 / n \to 0$ и условия теоремы 2 выполнены. Применяя лемму 2, мы получаем из (3.10), что

$$\rho(\eta_n, \zeta_n) = O\left(\frac{\gamma^2 + \ln^2 n}{n}\right), \tag{3.11}$$

где

$$\zeta_n = \sigma_0 + \cdots + \sigma_\mu. \tag{3.12}$$

Чтобы свести изучение искомой величины ξ_n к изучению η_n, нам остается, согласно лемме 1, оценить $P\{\xi_n \neq \eta_n\}$. Разность $\eta_n - \xi_n$ равна числу попаданий в $\mathcal{E}_1$ за испытания с номерами $n+1, n+2, \ldots, n+\eta_n$, причем за эти испытания произошло ξ_n попаданий в $\mathcal{E}_2$. Разность $\eta_n - \xi_n$ может не равняться нулю только в том случае, если:

1) за испытания с номерами $n+1, \ldots, n+\eta_n$ произойдет переход из $\mathcal{E}_1$ в $\mathcal{E}_2$ или

2) результатом $(n+1)$-го испытания было $\mathcal{E}_2$.

Так как число попаданий в $\mathcal{E}_2$ за испытания с номерами $n+1, \ldots, n+\eta_n$, равное ξ_n, не зависит от результатов этих испытаний, то применимо тождество Вольда [см. (1), стр. 333]. По этому тождеству, математическое ожидание числа переходов из $\mathcal{E}_2$ в $\mathcal{E}_1$ за испытания с номерами $n+1, \ldots, n+\eta_n$ равно $\bar{q}M\xi_n \leqslant \bar{q}M\eta_n$, так как всегда $\eta_n \geqslant \xi_n$. Но

$$\eta_n = \sigma_0 + \cdots + \sigma_\nu,$$

и снова, по тождеству Вольда,

$$M\eta_n = (M\nu + 1)\, M\sigma_i = (\bar{q}n + 1)\cdot 1/q.$$

Но для неотрицательной целочисленной величины математическое ожидание ее не меньше вероятности того, что она не равна нулю, поэтому

$$P\{\xi_n \neq \eta_n\} \leqslant \bar{q}M\xi_n + u \leqslant \frac{(\bar{q}n+1)\bar{q}}{q} + u, \tag{3.13}$$

где u — вероятность того, что результатом $(n+1)$-го испытания было $\mathcal{E}_2$. Эта последняя вероятность $u = u_1 + u_2 + \ldots$, где u_i — вероятность того, что попадание в $\mathcal{E}_2$ на $(n+1)$-м испытании является i-м в непрерывной серии попаданий в $\mathcal{E}_2$. Очевидно, что $u_i \leqslant \bar{q}\, p^{i-1}$, а $u \leqslant \bar{q}/q$. Итак,

$$P\{\xi_n \neq \eta_n\} \leqslant \frac{\bar{q}(\bar{q}n+2)}{q} = O\left(\frac{\gamma^2}{\beta}\right). \tag{3.14}$$

Из (3.14), леммы 1 и (3.11) следует, что

$$\rho(\xi_n, \zeta_n) = O\left(\frac{\gamma^2}{\beta} + \frac{\gamma^2 + \ln^2 n}{n}\right). \tag{3.15}$$

Проведя точно такие же рассуждения для числа попаданий в $\mathcal{E}_2$, мы придем к оценке (3.15) и в условиях теоремы 5, но только в этом случае

$$\zeta_n = n - [\sigma_1 + \cdots + \sigma_\mu], \tag{3.16}$$

где σ_i имеет геометрическое распределение $P\{\sigma_i = k\} = \bar{p}^{k-1}\bar{q}$, а μ — распределение Пуассона с параметром qn.

Для завершения доказательства теоремы 4 остается вычислить распределение величины ζ_n. Для этого найдем его производящую функцию $f(z)$. Из (3.12) следует, что

$$f(z) = F(\varphi(z)), \tag{3.17}$$

где $\varphi(z)$ — производящая функция величины σ_i, а $F(z)$ — величины $\mu+1$. Так как μ имеет распределение Пуассона, то

$$F(z)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\bar{q}n)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\bar{q}n}z^i=z\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\bar{q}nz)^i}{i!}e^{-\bar{q}n}=ze^{\bar{q}n(z-1)}. \quad (3.18)$$

Производящая функция величины σ, имеющей геометрическое распределение, равна

$$\varphi(z)=\sum_{i=1}^{\infty}p^{i-1}qz^i=\frac{q}{p}\sum_{i=1}^{\infty}(pz)^i=\frac{qz}{1-pz}. \quad ((3.19)$$

Отсюда, учитывая (1.6), получаем:

$$f(z)=\frac{qz}{1-pz}e^{\bar{q}n\left(\frac{qz}{1-pz}-1\right)}=e^{-\bar{q}n}\cdot qz\cdot\frac{1}{1-pz}\exp\left\{\frac{\frac{q\bar{q}n}{p}(pz)}{1-pz}\right\}=$$

$$=e^{-\bar{q}n}qz\sum_{k=0}^{\infty}L_k\left(-\frac{q\bar{q}n}{p}\right)(pz)^k=qe^{-\bar{q}n}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}z^k\left[p^{k-1}L_{k-1}\left(-\frac{q\bar{q}n}{p}\right)\right]. \quad (3.20)$$

Поэтому

$$P\{\zeta_n=m\}=\pi_m(n;\ p,\ \bar{p})=qe^{-\bar{q}n}p^{k-1}L_{k-1}\left(-\frac{q\bar{q}n}{p}\right), \quad (3.21)$$

и из (3.15) следует (3.3). Аналогичным образом из (3.16) выводится, что ζ_n имеет распределение (3.4) и тем самым доказывается теорема 5.

§ 4. Сходимость к сдвоенному распределению Пуассона

ТЕОРЕМА 6. *Пусть*

$$\pi_m(n;\ p,\ \bar{p})=e^{-(p+\bar{p})n/2}\left[\left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{\frac{\tilde{m}}{2}}I_{|\tilde{m}|}(n\sqrt{p\bar{p}})+\left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{\frac{\tilde{m}+1}{2}}I_{|\tilde{m}+1|}(n\sqrt{p\bar{p}})\right], \quad (4.1)$$

где $\tilde{m}$ *и* $\tilde{m}+1$ — *два целых решения уравнения* $\left[\frac{n+1+x}{2}\right]=m$,* *а* $I_k(w)$ — *функция Бесселя порядка* k *от чисто мнимого аргумента* [см. (1.12)], *и пусть*

$$\bar{p}\leqslant\gamma(n)/n,\quad p\leqslant\gamma(n)/n, \quad (4.2)$$

где $\gamma^2(n)/n\to 0$ *при* $n\to\infty$, *но* $\gamma(n)\to\infty$. *Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty}|p_m(n;\ p,\ \bar{p})-\pi_m(n;\ p,\ \bar{p})|=O\left(\frac{(\gamma^2+\ln^2 n}{n}\right). \quad (4.3)$$

Предпошлем доказательству теоремы следующую лемму.

---

* Символ [ ] обозначает здесь целую часть.

ЛЕММА 3. *Если η_1 и η_2, а также ζ_1 и ζ_2 — независимые целочисленные случайные величины, то*

$$\rho(\eta_1+\eta_2,\ \zeta_1+\zeta_2)\leqslant\rho(\eta_1,\ \zeta_1)+\rho(\eta_2,\ \zeta_2). \tag{4.4}$$

Доказательство. Имеем:

$$\rho(\eta_1+\eta_2,\ \zeta_1+\zeta_2)=\sum_k|P\{\eta_1+\eta_2=k\}-P\{\zeta_1+\zeta_2=k\}|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k,l}|P\{\eta_1=k,\ \eta_2=l\}-P\{\zeta_1=k,\ \zeta_2=l\}|=$$
$$=\sum_{k,l}|P\{\eta_1=k\}P\{\eta_2=l\}-P\{\eta_1=k\}P\{\zeta_2=l\}+P\{\eta_1=k\}P\{\zeta_2=l\}-$$
$$-P\{\zeta_1=k\}P\{\zeta_2=l\}\leqslant\sum_{k,l}P\{\eta_1=k\}|P\{\eta_2=l\}-P\{\zeta_2=l\}|+$$
$$+\sum_{k,l}P\{\zeta_2=l\}|P\{\eta_1=k\}-P\{\zeta_1=k\}|=\rho(\eta_2,\ \zeta_2)+\rho(\eta_1,\ \zeta_1).$$

Доказательство теоремы 6. Мы будем говорить, что после i-го испытания произошла задержка в $\mathscr{E}_1$ (соответственно в $\mathscr{E}_2$), если $\mathscr{E}_1$ было результатом как i-го, так и $(i+1)$-го испытаний. Обозначим через η_n случайную величину — число задержек в $\mathscr{E}_1$ после $(n-1)$ первых испытаний, а через ζ_n — число задержек в $\mathscr{E}_2$ после $n-1$ первых испытаний. Тогда

$$\xi_n=\left[\frac{n-(\eta_n+\zeta_n)+1}{2}\right]+\eta_n=\left[\frac{n+\eta_n-\zeta_n+1}{2}\right]. \tag{4.5}$$

Введем такие случайные величины: $\overline{\eta}_n$ — число задержек в $\mathscr{E}_1$ после $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ первых попаданий в $\mathscr{E}_1$ и $\overline{\zeta}_n$ — число задержек в $\mathscr{E}_2$ после $\left[\frac{n}{2}\right]$ первых попаданий в $\mathscr{E}_2$. Очевидно, что $\overline{\eta}_n$ имеет распределение такое же, как число успехов в $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ независимых испытаниях с вероятностью успеха в каждом испытании p, а $\overline{\zeta}_n$ — такое же, как число успехов в $\left[\frac{n}{2}\right]$ независимых испытаниях с вероятностью успеха в каждом испытании $\overline{p}$. Если обозначить через $\widetilde{\eta}_n$ и $\widetilde{\zeta}_n$ независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона с параметрами $p\left[\frac{n+1}{2}\right]$ и $\overline{p}\left[\frac{n}{2}\right]$ соответственно, то, по теореме 2,

$$\begin{aligned}\rho(\overline{\eta}_n,\ \widetilde{\eta}_n)&=O\left(\frac{\gamma^2+\ln^2 n}{n}\right),\\ \rho(\overline{\zeta}_n,\ \widetilde{\zeta}_n)&=O\left(\frac{\gamma^2+\ln^2 n}{n}\right).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Отсюда, по лемме 3,

$$\rho\left(\left[\frac{n+\overline{\eta}_n-\overline{\zeta}_n+1}{2}\right],\ \left[\frac{n+\widetilde{\eta}_n-\widetilde{\zeta}_n+1}{2}\right]\right)=O\left(\frac{\gamma^2+\ln^2 n}{n}\right). \tag{4.7}$$

Остается оценить расстояния $\rho(\eta_n, \bar{\eta}_n)$ и $\rho(\zeta_n, \bar{\zeta}_n)$. По лемме 1,

$$\rho(\eta_n, \bar{\eta}_n) \leqslant 2P\{|\eta_n - \bar{\eta}_n| \neq 0\}.$$

Но разность $|\eta_n - \bar{\eta}_n|$ представляет собой число задержек в $\mathscr{E}_1$ между $\left[\frac{n+1}{2}\right]$-м и $\left[\frac{n+\eta_n-\zeta_n+1}{2}\right]$-м попаданиями в $\mathscr{E}_1$. Так как вероятность задержки после данного попадания в $\mathscr{E}_1$ равна p, то, по тождеству Вольда,

$$P\{|\eta_n - \bar{\eta}_n| \neq 0\} \leqslant M|\eta_n - \bar{\eta}_n| = pM\left|\left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n+\eta_n-\zeta_n+1}{2}\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant p\left[M\left|\frac{\eta_n-\zeta_n}{2}\right| + 1\right] \leqslant p\,[M\eta_n + M\zeta_n + 1]. \qquad (4.8)$$

Условия применимости тождества Вольда [см. ([1]), стр. 333)] здесь выполнены, так как если

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] > \left[\frac{n+\eta_n-\zeta_n+1}{2}\right],$$

то разность

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n+\eta_n-\zeta_n+1}{2}\right]$$

не зависит от числа задержек после момента $\left[\frac{n+\eta_n-\zeta_n+1}{2}\right]$, а если

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] \leqslant \left[\frac{n+\eta_n-\zeta_n+1}{2}\right],$$

то событие, состоящее в том, что эта разность равна k, целиком определяется поведением системы до момента $\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]+k\right)$-го попадания в $\mathscr{E}_1$ и не зависит от того, произойдет ли после $\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]+l\right)$-го попадания в $\mathscr{E}_1$ задержка, если $l \geqslant k$. Так как η_n — число задержек в $\mathscr{E}_1$ за первые n испытаний — меньше, чем число задержек в $\mathscr{E}_1$ после первых n попаданий в $\mathscr{E}_1$, и аналогичное утверждение верно и для ζ_n, то

$$P\{|\eta_n - \bar{\eta}_n| \neq 0\} \leqslant p\,[M\eta_n + M\zeta_n + 1] \leqslant p\,[pn + \bar{p}n + 1] =$$

$$= O\left(\frac{\gamma^2+\gamma}{n}\right) = O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right). \qquad (4.9)$$

Аналогично,

$$P\{|\zeta_n - \bar{\zeta}_n| \neq 0\} = O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right). \qquad (4.10)$$

Применяя леммы 1 и 3 и учитывая (4.7) и (4.5), получаем, что

$$\rho\left(\xi_n, \left[\frac{n+\tilde{\eta}_n-\tilde{\eta}_n+1}{2}\right]\right) = O\left(\frac{\gamma^2+\ln^2 n}{n}\right), \qquad (4.11)$$

где η_n и ζ_n — независимые величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $p\left[\frac{n+1}{2}\right]$ и $\bar{p}\left[\frac{n}{2}\right]$.

Заметим, что если σ и $\bar{\sigma}$ — случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами λ и $\bar{\lambda}=\lambda+\varepsilon$ соответственно, то

$$\rho(\sigma, \bar{\sigma}) = O(|\varepsilon|) \tag{4.12}$$

при $\varepsilon \to 0$. Действительно, пусть для определенности $\varepsilon > 0$; тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\frac{\bar{\lambda}^k}{k!}e^{-\bar{\lambda}}\right| &= \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\bar{\lambda}}\right| + \\ +\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\bar{\lambda}}-\frac{\bar{\lambda}^k e^{-\bar{\lambda}}}{k!}\right| &\leqslant |1-e^{(\lambda-\bar{\lambda})}| \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+ \\ + e^{-\bar{\lambda}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\lambda-\bar{\lambda}|(\lambda^{k-1}+\bar{\lambda}\lambda^{k-2}+\dots+\bar{\lambda}^{k-1})}{k!} &\leqslant \\ \leqslant O(\varepsilon)+\varepsilon e^{-\bar{\lambda}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\bar{\lambda}^{k-1}}{k!}+1\right) &= O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Поэтому величины $\tilde{\eta}_n$ и $\tilde{\zeta}_n$ отличаются лишь на член порядка $O\left(\frac{\gamma}{n}\right)$ от величин $\hat{\eta}_n$ и $\hat{\zeta}_n$, распределенных по закону Пуассона с параметрами $\frac{pn}{2}$ и $\frac{\bar{p}n}{2}$. Вновь применяя лемму 3, мы получаем из (4.12), что

$$\rho\left(\xi_n, \left[\frac{n+\hat{\eta}_n-\hat{\zeta}_n+1}{2}\right]\right) = O\left(\frac{\gamma^2+\ln^2 n}{n}\right) \tag{4.14}$$

(мы считаем, что $\hat{\eta}_n$ и $\hat{\zeta}_n$ независимы).

Обозначим $\frac{pn}{2}=a$, $\frac{\bar{p}n}{2}=b$. При $k \geqslant 0$

$$\begin{aligned} P\{\hat{\eta}_n-\hat{\zeta}_n=k\} &= \sum_{i=k}^{\infty}\frac{a^i}{i!}\frac{b^{i-k}}{(i-k)!}e^{-a}e^{-b} = \\ &= e^{-(a+b)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^{i+k}}{(i+k)!}\frac{b^i}{i!} = e^{-(a+b)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{ab})^{k+2i}}{i!\,(i+k)!} = \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{2}}e^{-(a+b)}I_k(2\sqrt{ab}) = \left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{\frac{k}{2}}e^{-\frac{n(p+\bar{p})}{2}}I_k(n\sqrt{p\bar{p}}), \end{aligned} \tag{4.15}$$

где $I_k(w)$ — функция Бесселя от чисто мнимого аргумента порядка k [см. (1.12)]. Аналогично выводится, что при $k \leqslant 0$

$$P\{\hat{\eta}_n-\hat{\zeta}_n=k\} = \left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{\frac{k}{2}}e^{-\frac{n(p+\bar{p})}{2}}I_{-k}(n\sqrt{p\bar{p}}). \tag{4.16}$$

Поэтому

$$P\left\{\left[\frac{n+\hat{\eta}_n-\hat{\zeta}_n+2}{2}\right]=m\right\}=e^{-\frac{n}{2}(p+\bar{p})}\left[\left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{\frac{\tilde{m}}{2}}I_{|\tilde{m}|}(n\sqrt{p\bar{p}})+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{p}{\bar{p}}\right)^{\frac{\tilde{m}+1}{2}}I_{|\tilde{m}+1|}(n\sqrt{p\bar{p}})\right], \tag{4.17}$$

где $\tilde{m}$ и $\tilde{m}+1$ — два решения уравнения $\left[\frac{n+1+x}{2}\right]=m$, и (4.14) совпадает с (4.3), что и доказывает теорему.

§ 5. Сходимость к распределению Карпелевича-Успенского

ТЕОРЕМА 7. *Пусть*

$$\left.\begin{aligned}\pi_m(n;\ p,\ \bar{p})&=e^{-qm}e^{-\bar{q}(n-m)}\Big[qI_0\big(2\sqrt{q\bar{q}m(n-m)}\big)+\\&\quad+\sqrt{\frac{q\bar{q}m}{n-m}}\,I_1\big(2\sqrt{q\bar{q}m(n-m)}\big)\Big],\quad m\neq n,\\ \pi_n(n;\ p,\ \bar{p})&=e^{-qn},\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

где $I_0(w)$ и $I_1(w)$ — функции Бесселя [см. (1.12)], *и пусть*

$$\bar{q}\leqslant\gamma(n)/n,\quad q\leqslant\gamma(n)/n, \tag{5.2}$$

где $\gamma^2(n)/n\to 0$ при $n\to\infty$, но $\gamma(n)\to\infty$. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty}|p_m(n;\ p,\ \bar{p})-\pi_m(n;\ p,\ \bar{p})|=O\left(\frac{\gamma^2}{n}+\frac{1}{\gamma}\right). \tag{5.3}$$

Доказательство. При доказательстве этой теоремы мы будем исходить из явного выражения (1.2) для вероятностей $p_m(n;\ p,\ \bar{p})$. Обозначим

$$\begin{aligned}A_m^k&=C_{m-1}^kC_{n-m-1}^k\,p^{m-k-1}q^{k+1}\bar{p}^{n-m-k-1}\bar{q}^k,\\ U_m^k&=\frac{1}{n}\,\frac{\alpha^k\beta^k}{k!\,k!}\,a^{k+1}b^ke^{-a\alpha}e^{-b\beta},\end{aligned} \tag{5.4}$$

где $\alpha=\frac{m}{n}$, $\beta=1-\alpha=\frac{n-m}{n}$ и $a=qn$, $b=\bar{q}n$. Вычислим отношение

$$A_m^k/U_m^k=\frac{n^{2k}}{k!\,k!}\left(\frac{m-1}{n}\right)\left(\frac{m-2}{n}\right)\cdots\left(\frac{m-k-1}{n}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{n-m-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-m-k-1}{n}\right)\left(\frac{a}{n}\right)^{k+1}\left(\frac{b}{n}\right)^k\left(1-\frac{a}{n}\right)^{m-k-1}\cdot$$
$$\cdot\left(1-\frac{b}{n}\right)^{n-m-k-1}(U_m^k)^{-1}=\left(1-\frac{1}{n\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{n\beta}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{k+1}{n\beta}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^{m-(k+1)}e^{a\alpha}\left(1-\frac{b}{n}\right)^{n-m-(k+1)}e^{b\beta} \tag{5.5}$$

и оценим отдельные сомножители, полагая $k<e^3\sqrt{\min(\alpha\beta)}\cdot\gamma(n)$. По аналогии с (2.24) находим:

$$\left|\left(1-\frac{1}{n\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{n\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n\alpha}\right)-1\right|\leqslant 1-\left(1-\frac{k+1}{n\alpha}\right)^k=O\left(\frac{k(k+1)}{n\alpha}\right)=O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right). \tag{5.6}$$

Точно так же

$$\left(1-\frac{1}{n\beta}\right)\left(1-\frac{2}{n\beta}\right)\ldots\left(1-\frac{k+1}{n\beta}\right)=1+O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right) \tag{5.7}$$

и

$$\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-(k+1)}=\left[1+O\left(\frac{(k+1)a}{n}\right)\right]^{-1}=1+O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right),$$
$$\left(1-\frac{b}{n}\right)^{-(k+1)}=1+O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right). \tag{5.8}$$

Наконец, из (2.26) следует, что

$$e^{a\alpha}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{m}=\left[e\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^{a\alpha}=1+O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right),$$
$$e^{b\beta}\left(1-\frac{b}{n}\right)^{n-m}=1+O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right). \tag{5.9}$$

Собирая (5.6)—(5.9), выводим из (5.5), что

$$|A_m^k-U_m^k|=A_m^kO\left(\frac{\gamma^2}{n}\right). \tag{5.10}$$

Заметим, что из (5.5) следует:

$$A_m^k\leqslant e^{a\alpha}e^{b\beta}U_m^k. \tag{5.11}$$

Положим теперь $k_0=[e^3\sqrt{\min(\alpha,\ \beta)}\,\gamma(n)]$ и оценим

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}U_m^k. \tag{5.12}$$

Так как при $k\geqslant k_0$

$$U_m^k\,/\,U_m^{k-1}=\frac{\alpha\beta ab}{k^2}\leqslant\frac{\min(\alpha,\ \beta)\,ab}{k_0^2}<\frac{1}{2}, \tag{5.13}$$

то ряд (5.12) может быть мажорирован геометрической прогрессией и

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}U_m^k=O(U_m^{k_0}). \tag{5.14}$$

Далее, из формулы Стирлинга вытекает, что при некотором $C>0$ и при всех k

$$k!\geqslant C\left(\frac{k}{e}\right)^k\sqrt{k}. \tag{5.15}$$

Поэтому

$$U_m^{k_0}\leqslant\frac{a}{n}\left(\frac{\alpha\beta abe^2}{k_0^2}\right)^{k_0}\frac{1}{k_0C^2}\,e^{-a\alpha}e^{-b\beta}.$$

Так как

$$\frac{\alpha\beta}{k_0^2}ab\leqslant\frac{\min(\alpha,\ \beta)\,\gamma^2}{k_0^2}\leqslant\frac{1}{e^3},$$

то при некотором $C'<\infty$, не зависящем от m и n, имеет место

$$e^{a\alpha}e^{b\beta}U_m^{k_0}\leqslant C'\,\frac{a}{n}\,e^{-k_0}\leqslant C'\,\frac{a}{n}\,e^{-\sqrt{\min(\alpha,\ \beta)}\,\gamma}. \tag{5.16}$$

Суммируя (5.16) по всем $m \leqslant \frac{1}{2} n$, выводим из (5,14), что при некотором $C'' < \infty$

$$\sum_{m \leqslant \frac{1}{2} n} \sum_{k > \sqrt{\sigma\delta}} e^{a\alpha} e^{b\beta} U_m^k \leqslant C'' \frac{a}{n} \sum_{m \leqslant \frac{1}{2} n} e^{-\sqrt{\alpha}\,\gamma(n)}. \tag{5.17}$$

Положив $\frac{m}{n} \gamma^2 = x_m$ и учитывая, что $\Delta x = x_m - x_{m-1} = \frac{\gamma^2}{n}$, получаем:

$$\frac{a}{n} \sum_{m \leqslant \frac{1}{2} n} e^{-\sqrt{\alpha}\gamma} = \frac{a}{\gamma^2} \sum_{m \leqslant \frac{1}{2} n} e^{-\sqrt{x_m}} \Delta x = O\left(\frac{a}{\gamma^2}\right) = O\left(\frac{1}{\gamma}\right), \tag{5.18}$$

так как последняя сумма представляет собой интегральную сумму сходящегося интеграла $\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx$. Оценив аналогично члены, соответствующие $m \geqslant \frac{1}{2} n$, получаем из (5.17) и (5.18), что

$$\sum_m \sum_{k \geqslant k_0} U_m^k = O\left(\frac{1}{\gamma}\right). \tag{5.19}$$

Кроме того, учитывая (5.11) и (5.17), находим аналогично, что

$$\sum_m \sum_{k \geqslant k_0} A_m^k = O\left(\frac{1}{\gamma}\right). \tag{5.20}$$

Рассмотрим вторую часть выражения (1.2). Обозначим

$$\begin{aligned} B_m^k &= C_{m-1}^k C_{n-m-1}^{k-1} p^{m-k-1} q^k \bar{p}^{n-m-k} \bar{q}^k, \\ V_m^k &= \frac{1}{n} \frac{\alpha^k \beta^{k-1}}{k!\,(k-1)!} a^k b^k e^{-a\alpha} e^{-b\beta}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Аналогичными рассуждениями получаем:

$$\begin{aligned} |B_m^k - V_m^k| &= B_m^k O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right) \text{ при } k \leqslant k_0 = [e^3 \gamma \sqrt{\min(\alpha, \beta)}], \\ \sum_m \sum_{k \geqslant k_0} B_m^k &= O\left(\frac{1}{\gamma}\right), \quad \sum_m \sum_{k \geqslant k_0} V_m^k = O\left(\frac{1}{\gamma}\right). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Отдельно оцениваем $p_n(n;\, p,\, \bar{p})$:

$$p_n(n;\, p,\, \bar{p}) = B_n^0 = p^{n-1} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-1} = e^{-an}\left[1 + O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right)\right]. \tag{5.23}$$

Далее, имеем:

$$\sum_{k=0}^\infty U_m^k + \sum_{k=1}^\infty V_m^k = \frac{1}{n} e^{-a\alpha} e^{-b\beta} \left[\sum_{k=0}^\infty \frac{\alpha^k \beta^k}{k!\,k!} a^{k+1} b^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^\infty \frac{\alpha^k \beta^{k-1}}{k!\,(k-1)!} a^k b^k\right] = \frac{1}{n} e^{-a\alpha} e^{-b\beta} \left[a \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha\beta ab)^k}{k!\,k!} + \alpha ab \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha\beta ab)^k}{k!\,(k+1)!}\right] =$$

$$= e^{-qm} e^{-\bar{q}(n-m)} \left[q I_0 (2\sqrt{q\bar{q}m(n-m)}) + \sqrt{\frac{q\bar{q}m}{n-m}} I_1 (2\sqrt{q\bar{q}m(n-m)})\right] =$$

$$= \pi_m(n;\, p,\, \bar{p}). \tag{5.24}$$

Поэтому из (5.10), (5.19), (5.20) и (5.22) следует, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} |p_m(n;\ p,\ \bar{p}) - \pi_m(n;\ p,\ \bar{p})| \leqslant \sum_{m} \sum_{k=0}^{\infty} |U_m^k - A_m^k| +$$

$$+ \sum_{m} \sum_{k \geqslant k_0} U_m^k + \sum_{m} \sum_{k \geqslant k_0} A_m^k + \sum_{m} \sum_{k=0}^{k_0} |V_m^k - B_m^k| + \sum_{m} \sum_{k \geqslant k_0} V_m^k +$$

$$+ \sum_{m} \sum_{k \geqslant k_0} B_m^k + |p_n(n;\ p,\ \bar{p}) - e^{-an}| \leqslant \Big[\sum_{m,\ k} A_m^k + \sum_{m,\ k} B_m^k\Big] O\left(\frac{\gamma^2}{n}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\gamma}\right) = O\left(\frac{\gamma^2}{n} + \frac{1}{\gamma}\right), \tag{5.25}$$

так как $\sum A_m^k + \sum B_m^k = 1$, чем и закончено доказательство теоремы.

§ 6. Сходимость к нормальному распределению. Основной случай

Хотя нормальный закон равномерно действует во всей области I (см. схему 2), но приходится разбирать отдельно случай цепей, соответствующих точкам в «середине» квадрата (область I), и цепей, соответствующих точкам, близким к нижней и левой границам квадрата (области I' и I''). В этом параграфе доказывается следующая

ТЕОРЕМА 8. *Пусть*

$$\pi_m(n;\ p,\ \bar{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n D}} e^{-\frac{(m-nM)^2}{2nD}}, \tag{6.1}$$

где

$$M = \frac{\bar{q}}{q + \bar{q}}, \quad D = \frac{q\bar{q}\,(p + \bar{p})}{(q + \bar{q})^3}, \tag{6.2}$$

и пусть

$$n\bar{q}p \geqslant \gamma(n), \quad nq\bar{p} \geqslant \gamma(n), \tag{6.3}$$

где $\gamma(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |p_m(n;\ p,\ \bar{p}) - \pi_m(n;\ p,\ \bar{p})| = O\left(\frac{\ln^{\frac{3}{2}} \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{6.4}$$

Доказательство. Положим

$$m = nM + z\sqrt{nD} \tag{6.5}$$

и ограничимся сначала такими m, при которых $|z| \leqslant 2\sqrt{\ln \gamma}$. Тогда

$$\frac{m}{nM} = 1 + z\frac{\sqrt{nD}}{nM} = 1 + z\sqrt{\frac{1}{n}\frac{q}{\bar{q}}\frac{p+\bar{p}}{q+\bar{q}}} = 1 + z\sqrt{\frac{q}{q+\bar{q}}}\sqrt{p+\bar{p}}\sqrt{\frac{1}{n\bar{q}}} =$$

$$= 1 + O\left(\frac{z}{\sqrt{n\bar{q}}}\right) = 1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}} \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{6.6}$$

и аналогично

$$\frac{n-m}{n(1-M)} = 1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{6.7}$$

Рассмотрим величину

$$C_{m-1}^{k} p^{m-k-1} q^{k+1} = q C_{m-1}^{k} p^{m-1-k} q^{k}, \tag{6.8}$$

входящую в явное выражение (1.2) для изучаемых вероятностей $p_m(n;\ p,\ \bar{p})$. С точностью до множителя q она представляет собой член биномиального распределения. Проверим, выполнены ли условия теоремы 1.

Из (6.6) следует, что $m-1 = nM(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$. Кроме того,

$$nM = \frac{n\bar{q}}{q+\bar{q}} \geqslant \frac{1}{2}\gamma(n) \to \infty$$

при $n \to \infty$. Значит, и $m-1 \to \infty$ при $n \to \infty$. Условия (2.2) выполнены, так как, обозначив $\tilde{q} = \min(q,\ \bar{q})$, $\tilde{\tilde{q}} = \max(q,\ \bar{q})$, имеем:

$$\begin{gathered} (m-1)\,q = qnM(1+\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{nq\bar{q}}{q+\bar{q}} \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{n\tilde{q}\tilde{\tilde{q}}}{2\tilde{\tilde{q}}} = \frac{1}{4}\,n\tilde{q} = \frac{1}{4}\gamma(n), \\ (m-1)\,p = pnM(1+\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{np\bar{q}}{q+\bar{q}} \geqslant \frac{1}{4}\,np\bar{q} \geqslant \frac{1}{4}\gamma(n). \end{gathered} \tag{6.9}$$

Поэтому из утверждения (2.6) теоремы 1 вытекает, что если положить

$$k = (m-1)\,q + t\sqrt{(m-1)\,pq} \tag{6.10}$$

и предположить, что $|t| \leqslant 8\ln^{\frac{1}{2}}\gamma$, то

$$C_{m-1}^{k} p^{m-k-1} q^{k+1} = \frac{q e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi(m-1)\,pq}}\left[1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{3}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)\right]. \tag{6.11}$$

Аналогично, при

$$k = (n-m-1)\,\bar{q} + u\sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q}} \tag{6.12}$$

и $|u| \leqslant 8\ln^{\frac{1}{2}}\gamma$ выполнено соотношение

$$C_{n-m-1}^{k} \bar{p}^{n-m-1-k} \bar{q}^{k} = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q}}}\left[1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{3}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)\right]. \tag{6.13}$$

Поэтому, обозначив для краткости

$$A_m^k = C_{m-1}^{k} p^{m-k-1} q^{k+1} C_{n-m-1}^{k} \bar{p}^{n-m-k-1} \bar{q}^{k}, \tag{6.14}$$

мы получаем, что при $|z| < 2\sqrt{\ln\gamma}$

$$\sum_{\max(|t|,|u|)\leqslant 8\ln^{\frac{1}{2}}\gamma} A_m^k =$$

$$= \left(\sum_{\max(|t|,|u|)\leqslant 8\ln^{\frac{1}{2}}\gamma} \frac{q e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\,pq\bar{p}\bar{q}}} \right) \left[1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{3}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \right) \right]. \tag{6.15}$$

Ниже [см. лемму 5 и утверждение (6.65)] будет показано, что суммами

$$\sum_{\max(|t|,|u|)\geqslant 8\ln^{\frac{1}{2}}\gamma} A_m^k, \qquad \sum_{\max(|t|,|u|)\geqslant 8\ln^{\frac{1}{2}}\gamma} \frac{q e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\,pq\bar{p}\bar{q}}} \tag{6.16}$$

можно пренебречь.

Изучим асимптотическое поведение выражения

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{q e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\,pq\bar{p}\bar{q}}}, \tag{6.17}$$

где t пробегает арифметическую прогрессию с разностью $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{(m-1)\,pq}}$, а u выражается через t по формуле

$$u = \frac{1}{\sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q}}}\left[(m-1)\,q - (n-m-1)\,\bar{q} + t\sqrt{(m-1)\,pq}\right], \tag{6.18}$$

вытекающей из (6.10) и (6.12). Преобразуем величину $\frac{t^2+u^2}{2}$. Выражая u через t, затем заменяя m по формуле (6.5) и делая тождественные преобразования, получаем:

$$\frac{t^2+u^2}{2} = \frac{1}{2}\left\{ t^2 + \frac{1}{(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q}}\left[(q+\bar{q})\,z\sqrt{nD} + t\sqrt{(m-1)\,pq} + q - \bar{q}\right]^2 \right\} =$$

$$= \frac{A^2}{2}(t+B)^2 + C^2, \tag{6.19}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= \frac{(n-\bar{m}-1)\,pq + (\bar{m}-1)\,pq}{(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q}}, \\ B &= \frac{(q+\bar{q})\sqrt{(m-1)\,pq}}{(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q} + (m-1)\,pq}\left(z\sqrt{nD} + \frac{q-\bar{q}}{q+\bar{q}}\right), \\ C^2 &= \frac{\left(z\sqrt{nD} + \frac{q-\bar{q}}{q+\bar{q}}\right)^2 (q+\bar{q})^2}{2\left[(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q} + (m-1)\,pq\right]}. \end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

Поэтому выражение (6.17) переписывается следующим образом:

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{q e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\,pq\bar{p}\bar{q}}} = \frac{q e^{-C^2} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{A^2(t+B)^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\,pq\bar{p}\bar{q}}}. \tag{6.21}$$

Положим

$$v = A(t + B). \tag{6.22}$$

Тогда

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{A^2(t+B)^2}{2}} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}, \tag{6.23}$$

где v пробегает бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью

$$\Delta v = A\Delta t = \sqrt{\frac{(n-m-1)\overline{p}\overline{q} + (m-1)pq}{(n-m-1)\overline{p}\overline{q}\cdot(m-1)pq}}. \tag{6.24}$$

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\Delta s > 0$, $(i+1)\Delta s \geqslant s_i \geqslant i\Delta s$ *и пусть* $f(s)$ *имеет производную, абсолютно интегрируемую на отрезке* $[a, b]$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$; *тогда при* $\Delta s \to 0$

$$\left| \sum_{a \leqslant s_i < b} f(s_i)\Delta s - \int_a^b f(s)\,ds \right| = O(\Delta s). \tag{6.25}$$

Доказательство. Применяя дважды теорему о среднем значении, имеем:

$$\left| \sum_{a \leqslant s_i < b} f(s_i)\Delta s - \int_a^b f(s)\,ds \right| \leqslant \sum_{a \leqslant s_i < b} \left| f(s_i)\Delta s - \int_{i\Delta s}^{(i+1)\Delta s} f(s)\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \Delta s \sum_{a \leqslant s_i < b} |f(s_i) - f(\tilde{s}_i)| \leqslant \Delta s \sum_{a \leqslant s_i < b} f'(\tilde{\tilde{s}}_i)\Delta s_i, \tag{6.26}$$

где

$$(i+1)\Delta s \geqslant \tilde{s}_i \geqslant i\Delta s \quad \text{и} \quad (i+1)\Delta s \geqslant \tilde{\tilde{s}}_i \geqslant i\Delta s.$$

Так как функция $f'(s)$ интегрируема, то ее интегральные суммы равномерно ограничены и утверждение леммы вытекает из (6.26). В частности, можно положить $f(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}$ при $a = -\infty$, $b = \infty$.

Оценим скорость стремления Δv к нулю. Из (6.6) и (6.7) следует, что $(m-1) \sim nM$ и $n - m - 1 \sim n(1 - M)$. Поэтому

$$\Delta v \sim \sqrt{\frac{n(1-M)\overline{p}\overline{q} + nMpq}{n(1-M)\overline{p}\overline{q}\cdot nMpq}} = \sqrt{\frac{1}{n}\frac{(q+\overline{q})(p+\overline{p})}{pq\overline{p}\overline{q}}}. \tag{6.27}$$

По соображениям симметрии имеются только два существенно различных случая. Первый, когда $q \leqslant 1/2$, $\overline{q} \leqslant 1/2$, и второй, когда $q \leqslant 1/2$, $\overline{p} \leqslant 1/2$. В первом случае, обозначив $\tilde{q} = \max(q, \overline{q})$, $\tilde{\tilde{q}} = \min(q, \overline{q})$, имеем:

$$\sqrt{\frac{(q+\overline{q})(p+\overline{p})}{npq\overline{p}\overline{q}}} \leqslant 4\sqrt{\frac{q+\overline{q}}{nq\overline{q}}} \leqslant \frac{4}{\sqrt{n\tilde{\tilde{q}}}}\sqrt{1 + \frac{\tilde{\tilde{q}}}{\tilde{q}}} \leqslant \frac{8}{\sqrt{\gamma}}, \tag{6.28}$$

во втором —

$$\sqrt{\frac{(q+\bar{q})(p+\bar{p})}{npq\bar{p}\bar{q}}} \leqslant \frac{8}{\sqrt{nq\bar{p}}} \leqslant \frac{8}{\sqrt{\gamma(n)}}. \tag{6.29}$$

Поэтому

$$\Delta v = O(1/\sqrt{\gamma}), \tag{6.30}$$

и, применяя лемму 4, мы получаем, в силу известного равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \sqrt{2\pi}, \tag{6.31}$$

что и

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-v^2}{2}} = \sqrt{2\pi}(1 + O(1/\gamma)). \tag{6.32}$$

Следовательно, (6.21) перепишется в виде:

$$\frac{qe^{-C^2}}{2\pi\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q} + (m-1)pq}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \Delta v e^{-\frac{v^2}{2}} = \frac{qe^{-C^2}[1 + O(1/\gamma)]}{\sqrt{2\pi[(n-m-1)\bar{p}\bar{q} + (m-1)pq]}}. \tag{6.33}$$

Оценим теперь

$$1 - \frac{(n-m-1)\bar{p}\bar{q} + (m-1)pq}{(q+\bar{q})^2 nD} = \frac{z(\bar{p}\bar{q} - pq)\sqrt{nD} - (pq + \bar{p}\bar{q})}{nD(q+\bar{q})^2} =$$

$$= \frac{zp(\sqrt{nD}-1)}{n(1-M)} - \frac{z\bar{p}(\sqrt{nD}+1)}{nM} = O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{6.34}$$

Последнее равенство вытекает из (6.6) и (6.7). Рассмотрим величину C^2:

$$C^2 = \frac{z^2 nD(q+\bar{q}) + 2z\sqrt{nD}(q-\bar{q})^2 + (q-\bar{q})^2}{2[(n-m-1)\bar{p}\bar{q} + (m-1)pq]}. \tag{6.35}$$

Так как

$$(n-m-1)\bar{p}\bar{q} + (m-1)pq \sim nD(q+\bar{q})^2,$$

то

$$\frac{2z\sqrt{nD}(q-\bar{q})^2 + (q-\bar{q})^2}{2[(n-m-1)\bar{p}\bar{q} + (m-1)pq]} \sim \frac{(2z\sqrt{nD}+1)(q-\bar{q})^2}{nD(q+\bar{q})^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2z\sqrt{nD+1}}{nD} = O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{6.36}$$

Применяя для оценки главной части C^2 равенство (6.34), получаем:

$$C^2 = \frac{z^2}{2} + O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{6.37}$$

Отсюда, используя (6.21), (6.33) и (6.34), находим:

$$\sum_{t=-\infty}^{t=\infty} \frac{q e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi \sqrt{(m-1)(n-m-1)\bar{p}\bar{q}pq}} = \frac{q}{q+\bar{q}} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi nD}}\left[1+O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)\right]. \quad (6.38)$$

Введем обозначение для членов второго из рядов, входящих в явное выражение (1.2) для вероятностей $p_m(n;\ p,\ \bar{p})$:

$$B_m^k = C_{m-1}^k C_{n-m-1}^{k-1} p^{m-k-1} q^k \bar{p}^{n-m-k} \bar{q}^k. \quad (6.39)$$

При помощи совершенно аналогичных рассуждений можно показать, что при $|z| < 2\sqrt{\ln\gamma}$ и $\max(|t|,\ |u|) \leqslant 8\sqrt{\ln\gamma}$

$$B_m^k = \frac{\bar{q} e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi \sqrt{(m-1)(n-m-1)pq\bar{p}\bar{q}}}\left[1+O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)\right] \quad (6.40)$$

и что

$$\sum_{t=-\infty}^{t=\infty} \frac{\bar{q} e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi \sqrt{(m-1)(n-m-1)pq\bar{p}\bar{q}}} = \frac{\bar{q}}{q+\bar{q}} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi nD}}\left[1+O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)\right]. \quad (6.41)$$

Оценим «хвосты» наших распределений.

ЛЕММА 5. *При* $|z| < 2\sqrt{\ln\gamma}$

$$\sum_{\max(u,\,t)\geqslant 8\sqrt{\ln\gamma}} \frac{(q+\bar{q})\, e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)pq\bar{p}\bar{q}}} = O\left(\frac{1}{\gamma^2\sqrt{nD}}\right). \quad (6.42)$$

Аналогичное утверждение верно и для такой же суммы, взятой по $\min(u,\ t) \leqslant 8\sqrt{\ln\gamma}$.

Доказательство. В сумме (6.42) t пробегает арифметическую прогрессию с разностью $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{(m-1)\bar{p}q}}$, а u — с разностью $\Delta u = \frac{1}{\sqrt{(n-m-1)p\bar{q}}}$. Поэтому отношение двух соседних членов ряда (6.42) равно

$$e^{-\frac{[(t+\Delta t)^2+(u+\Delta u)^2]}{2}} : e^{-\frac{t^2+u^2}{2}} = e^{-(t\Delta t+u\Delta u)-\frac{\Delta t^2}{2}-\frac{\Delta u^2}{2}} < e^{-(t\Delta t+u\Delta u)}. \quad (6.43)$$

Обозначим через t_0 и u_0 значения t и u, соответствующие первому члену ряда (6.42). Очевидно, что

$$\max(t_0,\ u_0) \approx 8\sqrt{\ln\gamma}.$$

Покажем, что при $t \geqslant t_0$, $u \geqslant u_0$ и достаточно большом n

$$t\Delta t + u\Delta u \geqslant \alpha(\Delta t + \Delta u), \quad (6.44)$$

где $\alpha > 0$ — постоянная, не зависящая от z и от выбора p и $\bar{p}$ при выполнении условия (6.3). Значению $t = 0$ соответствует [см. (6.10)]

$k_1=(m-1)\,q$, а значению $u=0$ соответствует [см. (6.12)] $k_2=(n-m-1)\,\bar{q}$. Рассмотрим их разность. Используя (6.5) и (6.2), имеем:

$$k_1-k_2=(m-1)\,q-(n-m-1)\,\bar{q}=$$

$$=n\,[Mq-(1-M)\,\bar{q}]+z\,(q+\bar{q})\,(\sqrt{nD}+1)=z\,(q+\bar{q})\,(\sqrt{nD}+1). \quad (6.45)$$

Кроме того, как видно из (6.9),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}&=\sqrt{(m-1)\,pq}\sim\sqrt{\frac{nq\bar{p}q}{q+\bar{q}}}\to\infty,\\ \frac{1}{\Delta u}&=\sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q}}\sim\sqrt{\frac{nq\bar{p}\bar{q}}{q+\bar{q}}}\to\infty. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Чтобы доказать (6.44), достаточно показать, что

$$t_0\Delta t+u_0\Delta u\geqslant 2\alpha\max(\Delta t,\ \Delta u). \quad (6.47)$$

Для определенности предположим, что $\max(\Delta t,\ \Delta u)=\Delta t$; тогда

$$\frac{t_0\Delta t+u_0\Delta u}{\max(\Delta t,\ \Delta u)}=t_0+u_0\,\frac{\Delta u}{\Delta t}\,. \quad (6.48)$$

Точке k_1 соответствует значение $\tilde{u}$ такое, что при больших n имеет место:

$$|\,\tilde{u}\,|=|\,k_1-k_2\,|\,\Delta u\sim\frac{|\,z\,|\,(\sqrt{nD}+1)\,(q+\bar{q})}{\sqrt{\frac{nq\bar{p}\bar{q}}{q+\bar{q}}}}\leqslant$$

$$\leqslant|\,z\,|\left(\sqrt{\frac{p+\bar{p}}{p}}+2\Delta u\right)\sim|\,z\,|\left(\sqrt{1+\frac{\Delta u}{\Delta t}}+2\Delta u\right)<2\,(|\,z\,|+1)<5\sqrt{\ln\gamma}. \quad (6.49)$$

Обозначим через $\tilde{k}$ значение k, соответствующее u_0 и t_0. Тогда

$$t_0=(\tilde{k}-k_1)\,\Delta t \quad \text{и} \quad u_0=(\tilde{k}-k_2)\,\Delta u.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k_1\leqslant\tilde{k}\leqslant k_2$. В этом случае $u_0\leqslant 0$, $t_0=8\sqrt{\ln\gamma}$ и из (6.49) следует, что

$$|\,u_0\,|<|\,\tilde{u}\,|\leqslant 5\sqrt{\ln\gamma}\,.$$

Поэтому

$$t_0+u_0\,\frac{\Delta u}{\Delta t}\geqslant t_0-|\,u_0\,|\geqslant 3\sqrt{\ln\gamma}>\alpha>0. \quad (6.50)$$

Если же $k_1\leqslant k_2\leqslant\tilde{k}$, то

$$(\tilde{k}-k_1)\,\Delta t\geqslant(\tilde{k}-k_2)\,\Delta u=u_0$$

(так как $\tilde{k}-k_2>0$ и $\Delta t\geqslant\Delta u$). Поэтому $t_0=8\sqrt{\ln\gamma}$, $u_0\geqslant 0$ и (6.47) выполнено.

Пусть теперь $k_2\leqslant k_1$. В этом случае $\tilde{k}\geqslant k_2$ (иначе и t_0 и u_0 были бы отрицательны). Поэтому $u_0\geqslant 0$. Покажем, что $t_0\geqslant 1$. Действительно, $t=1$ соответствует $\tilde{\tilde{k}}=k_1+\frac{1}{\Delta t}$ и поэтому ему соответствует

$$\tilde{u}=\left(k_1-k_2+\frac{1}{\Delta t}\right)\Delta u=(k_1-k_2)\,\Delta u+\frac{\Delta u}{\Delta t}\leqslant 5\sqrt{\ln\gamma}+1.$$

Так как $\max(u_0, t_0) = 8\sqrt{\ln\gamma}$, то точка, соответствующая t_0 и u_0, лежит на оси k правее, чем $\bar{\bar{k}}$, и поэтому $t_0 \geqslant 1$. Но раз $t_0 \geqslant 1$ и $u_0 \geqslant 0$, то, как следует из (6.48), доказываемое утверждение (6.47) верно и в этом случае.

Итак, мы доказали неравенство (6.44). Из него следует, что

$$e^{-(t\Delta t + u\Delta u)} < e^{-\alpha(\Delta t + \Delta u)}. \tag{6.51}$$

Поэтому из (6.43) вытекает, что ряд (6.42) может быть мажорирован геометрической прогрессией со знаменателем $e^{-\alpha(\Delta t+\Delta u)}$. Итак,

$$\sum_{\max(u,t)\geqslant 8\sqrt{\ln\gamma}} \frac{(q+\bar{q})\, e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\, pq\bar{p}\bar{q}}} \leqslant \frac{(q+\bar{q})\, e^{-\frac{t_0^2+u_0^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\, pq\bar{p}\bar{q}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{1-e^{-\alpha(\Delta t+\Delta u)}} = \frac{(q+\bar{q})\, e^{-\frac{t_0^2+u_0^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\, pq\bar{p}\bar{q}}} \cdot O\left(\frac{1}{\Delta u+\Delta t}\right). \tag{6.52}$$

В силу (6.46), $\Delta u \to 0$ и $\Delta t \to 0$. Но

$$\frac{1}{\Delta u+\Delta t} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{(m-1)\,\bar{p}q}} + \frac{1}{\sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q}}}} = \frac{\sqrt{(m-1)(n-m-1)\, pq\bar{p}\bar{q}}}{\sqrt{(m-1)\,pq} + \sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q}}}. \tag{6.53}$$

Поэтому выражение (6.52) оказывается равным

$$e^{-\frac{t_0^2+u_0^2}{2}}\, O\left(\frac{q+\bar{q}}{\sqrt{(m-1)\,pq} + \sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q}}}\right). \tag{6.54}$$

Нетрудно проверить, что всегда при $a\to\infty$ и $b\to\infty$ величины $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и $\sqrt{a+b}$ являются бесконечно большими одного и того же порядка. Поэтому, учитывая (6.34), имеем:

$$O\left(\frac{q+\bar{q}}{\sqrt{(m-1)\,pq} + \sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\bar{q}}}\right) = O\left(\frac{q+\bar{q}}{\sqrt{(m-1)\,pq + (n-m-1)\,\bar{p}\bar{q}}}\right) =$$
$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{nD}}\right). \tag{6.55}$$

Так как $\max(t_0, u_0) = 8\sqrt{\ln\gamma}$, то из (6.54) и (6.55) следует утверждение леммы.

Всего имеется $\frac{1}{\Delta z}4\sqrt{\ln\gamma} = 4\sqrt{\ln\gamma}\sqrt{nD}$ значений m, соответствующих $|z| \leqslant 2\sqrt{\ln\gamma}$. Поэтому из доказанной леммы следует, что

$$\sum_{|z|\geqslant 2\sqrt{\ln\gamma}} \left(\sum_{\max(|u|,|t|)\geqslant 8\sqrt{\ln\gamma}} \frac{(q+\bar{q})\, e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\, pq\bar{p}\bar{q}}}\right) = O\left(\frac{\sqrt{\ln\gamma}}{\gamma^2}\right). \tag{6.56}$$

Из утверждения (2.14) § 2 следует, что

$$\sum_{|z|\geqslant 2\sqrt{\ln\gamma}} \pi_m(n;\, p,\, \bar{p}) = O\left(e^{-2\ln\gamma}\right) = O(\gamma^{-2}). \tag{6.57}$$

Хотя величины $\{\pi_m(n;\ p,\ \bar{p})\}$ и не образуют распределения вероятностей, но, по лемме 4, учитывая (6.41), получаем, что

$$\sum_z \frac{1}{\sqrt{2\pi nD}} e^{-\frac{z^2}{2}} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{nD}}\right) = 1 + O\left(1 / \gamma^{\frac{1}{2}}\right), \tag{6.58}$$

где z пробегает бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью $1/\sqrt{nD}$. Так как, согласно оценке (2.14), сумма членов ряда (6.41), не являющихся $\{\pi_m\}$, равняется $O(1/\gamma^2)$, то

$$\sum_{m=1}^{\infty} \pi_m(n;\ p,\ \bar{p}) = 1 + O\left(1 / \gamma^{\frac{1}{2}}\right) + O(1/\gamma^2) = 1 + O\left(1 / \gamma^{\frac{1}{2}}\right). \tag{6.59}$$

Суммируя (6.38) и (6.41), получаем, что при $|z| \leqslant 2\sqrt{\ln\gamma}$

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{(q+\bar{q})\, e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\, pq\bar{p}\bar{q}}} = \pi_m(n;\ p,\ \bar{p})\left[1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)\right]. \tag{6.60}$$

Суммируя по $|z| \leqslant 2\sqrt{\ln\gamma}$ равенства (6.60) и учитывая (6.59) и (6.57), находим:

$$\sum_{|z|\leqslant 2\sqrt{\ln\gamma}}\ \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{(q+\bar{q})\, e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\, pq\bar{p}\bar{q}}} = 1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{6.61}$$

и, наконец, отсюда и из (6.56) вытекает, что

$$\sum_{|z|\leqslant 2\sqrt{\ln\gamma}}\ \sum_{\max(u,t)\leqslant 8\sqrt{\ln\gamma}} \frac{(q+\bar{q})\, e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\, pq\bar{p}\bar{q}}} = 1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{6.62}$$

Далее, из (6.15), (6.40) и (6.62) следует, что также и

$$\sum_{|z|\leqslant 2\sqrt{\ln\gamma}}\ \sum_{\max(|u|,\,|t|)\leqslant 8\sqrt{\ln\gamma}} (A_m^k + B_m^k) = 1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{3}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right), \tag{6.63}$$

а так как

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_k (A_m^k + B_m^k) = \sum_{m=1}^{n} p_m(n; p, \bar{p}) = 1, \tag{6.64}$$

то

$$\sum_{|z|\leqslant 2\sqrt{\ln\gamma}}\ \sum_{\max(|u|,\,|t|)\geqslant 8\sqrt{\ln\gamma}} (A_m^k + B_m^k) + \\ + \sum_{|z|\geqslant 2\sqrt{\ln\gamma}} p_m(n; p, p) = O\left(\frac{\ln^{\frac{3}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{6.65}$$

Наконец, мы имеем (первый знак неравенства вытекает из (6.57) и (6.61), второй — из (6.65) и (6.56) и третий — из (6.15) и (6.40)):

$$\sum_{m=1}^{\infty} |p_m(n; p, \bar{p}) - \pi_m(n; p, \bar{p})| \leqslant \sum_{|z| \geqslant 2\sqrt{\ln \gamma}} p_m(n; p, \bar{p}) +$$

$$+ \sum_{|z| < 2\sqrt{\ln \gamma}} \left| p_m(n; p, \bar{p}) - \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{(q+\bar{q})\, e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\,pq\bar{p}\bar{q}}} \right| + O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}} \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|z| < 2\sqrt{\ln \gamma}} \left| \sum_{\max(|u|, |t|) \leqslant 8\sqrt{\ln \gamma}} \left(A_m^k + B_m^k - \frac{(q+\bar{q})\, e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}}{2\pi\sqrt{(m-1)(n-m-1)\,pq\bar{p}\bar{q}}} \right) \right| +$$

$$+ O\left(\frac{\ln^{\frac{3}{2}} \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right) = O\left(\frac{\ln^{\frac{3}{2}} \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right), \tag{6.66}$$

что и требовалось доказать.

§ 7. Сходимость к нормальному распределению. Особый случай

ТЕОРЕМА 9. *Если* $\pi_m(n; p, \bar{p})$ *определены так же, как и в теореме* 8, *и если*

$$n\bar{q}p \leqslant \lambda(n), \quad n\bar{q}q\bar{p} \geqslant \gamma(n) \tag{7.1}$$

или

$$nq\bar{p} \leqslant \lambda(n), \quad nq\bar{q}p \geqslant \gamma(n), \tag{7.2}$$

где $\lambda(n) \to \infty, \gamma(n) \leqslant n,\ \dfrac{\lambda \ln^{\frac{3}{2}} \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |p_m(n; p, \bar{p}) - \pi_m(n; p, \bar{p})| = O\left(\frac{\lambda \ln^{\frac{3}{2}} \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{7.3}$$

Доказательство. Мы ограничимся случаем, когда выполнено условие (7.1). Второй случай разбирается совершенно аналогично. Так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, положим

$$m = nM + z\sqrt{nD} \tag{7.4}$$

и будем считать сначала, что $|z| \leqslant 2\sqrt{\ln \gamma}$. Так как из (7.1) следует что $nq \geqslant \gamma(n)$ и $n\bar{q} \geqslant \gamma(n)$, то остаются в силе утверждения (6.6) и (6.7) и

$$\frac{m}{nM} = 1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}} \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$$\frac{n-M}{n(1-M)} = 1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}} \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{7.5}$$

Рассуждая так же, как и при выводе неравенств (6.9), мы найдем, что

$$(n-m-1)\bar{q} \geqslant \frac{1}{4}\gamma(n), \quad (n-m-1)\bar{p} \geqslant \frac{1}{4}\gamma(n) \tag{7.6}$$

и поэтому, применяя утверждение (2.6) § 2, мы получаем, что если положить

$$k = (n-m-1)\bar{q} + u\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}} \tag{7.7}$$

и ограничиться $|u| \leqslant a \ln^{\frac{1}{2}}\gamma$, где постоянная a будет выбрана в дальнейшем, то

$$C_{n-m-1}^{k}\,\bar{p}^{\,n-m-1-k}\,\bar{q}^{\,k} = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi(n-m-1)\bar{p}\bar{q}}}\left[1 + O\left(\frac{\ln^{\frac{3}{2}}\gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)\right]. \tag{7.8}$$

Обозначим

$$k = m-1-x \tag{7.9}$$

и будем считать, что $x \leqslant \lambda(n)\ln\gamma$. В таком случае

$$u = \frac{k-(n-m-1)\bar{q}}{\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}}} = \frac{m-1-x-(n-m-1)\bar{q}}{\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}}} =$$

$$= \frac{n-(n-m)(1+\bar{q})-x+\bar{q}-1}{\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}}} = \frac{\frac{np\bar{q}}{q+\bar{q}} - z(1+\bar{q})\sqrt{nD} - x + \bar{q} - 1}{\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}}}. \tag{7.10}$$

Оценим теперь

$$1 - \frac{(1+\bar{q})\sqrt{nD}}{\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}}} = \frac{\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}} - (1+\bar{q})\sqrt{nD}}{\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}}} \cdot \frac{(n-m-1)\bar{p}\bar{q} - (1+\bar{q})^2 nD}{\sqrt{(n-m+1)\bar{p}\bar{q}} + (1+\bar{q})\sqrt{nD}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}}} \cdot \frac{n(1-M)\bar{p}\bar{q} - (1+\bar{q})^2 nD - z\bar{p}\bar{q}\sqrt{nD} - \bar{p}\bar{q}}{\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}} + (1+\bar{q})\sqrt{nD}}. \tag{7.11}$$

Изучим числитель этой дроби:

$$n(1-M)\bar{p}\bar{q} - (1+\bar{q})^2 nD = \frac{nq\bar{q}}{(q+\bar{q})^3}\left[p(1+\bar{q}-p)^2 - (p+\bar{p})(1+\bar{q})^2\right] =$$

$$= \frac{nq\bar{q}p}{(q+\bar{q})^3}\left[-(1+\bar{q})^2 - 2p(1+\bar{q}) + p\bar{p}\right] = O(\lambda), \tag{7.12}$$

так как из условий (7.1) следует, что при достаточно большом n величина $q \geqslant {}^1/_2$ и, значит, $(q+\bar{q})^3 \geqslant {}^1/_8$. Далее, из (7.5) следует, что

$$\sqrt{(n-m-1)\bar{p}\bar{q}} \sim \sqrt{\frac{nq\bar{p}\bar{q}}{q+\bar{q}}} \geqslant 2\gamma^{\frac{1}{2}}(n). \tag{7.13}$$

Легко видеть, что

$$\frac{z\bar{p}\,\bar{q}\sqrt{nD}}{\sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\,\bar{q}}+(1+\bar{q})\sqrt{nD}} \leqslant \frac{z\bar{p}\,\bar{q}}{1+q} = O\left(\sqrt{\ln \gamma}\right). \tag{7.14}$$

Таким образом, окончательно получаем, что

$$1-\frac{(1+\bar{q})\sqrt{nD}}{\sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\,\bar{q}}} = O\left(\frac{\lambda+\sqrt{\ln \gamma}}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right). \tag{7.15}$$

Аналогично доказывается, что

$$1-\frac{(q+\bar{q})\sqrt{nD}}{\sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\,\bar{q}}} = O\left(\frac{\lambda \ln^{\frac{2}{2}} \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{7.16}$$

Используя (7.10) и (7.15), имеем:

$$u = -z\left\{1-\left[1-\frac{(1+\bar{q})\sqrt{nD}}{\sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\,\bar{q}}}\right]\right\}+\frac{\frac{np\bar{q}}{q+\bar{q}}-x+\bar{q}+1}{\sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\,\bar{q}}} =$$

$$= -z\left[1+O\left(\frac{\lambda+\sqrt{\ln \gamma}}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)\right]+O\left(\frac{\lambda+\lambda \ln \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right) = -z+O\left(\frac{\lambda \ln \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{7.17}$$

Из (7.8), (7.16), (7.17) следует, что

$$C_{n-m-1}^{k}\,\bar{p}^{\,n-m-1-k}\,\bar{q}^{k} = \frac{e^{-z^2/2}\left[1+O\left(\frac{\lambda \ln^{\frac{3}{2}} \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)\right]}{(q+\bar{q})\sqrt{2\pi nD}}. \tag{7.18}$$

Это равенство выведено в предположении, что

$$|u| \leqslant a \ln^{\frac{1}{2}} \gamma \quad \text{и} \quad x = m-1-k \leqslant \lambda \ln \gamma.$$

Покажем, что из неравенства $|x| \leqslant \lambda \ln \gamma$ следует, что и $|u| \leqslant a \ln^{\frac{1}{2}} \gamma$. Действительно, учитывая (7.13) и (7.15), имеем:

$$u = \frac{k-(n-m-1)\,\bar{q}}{\sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\,\bar{q}}} = \frac{\frac{n\bar{q}p}{q+\bar{q}}+z(1+\bar{q})\sqrt{nD}-x-(1+\bar{q})}{\sqrt{(n-m-1)\,\bar{p}\,\bar{q}}} =$$

$$= O\left(\frac{\lambda}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)+O(z)+O\left(\frac{\lambda \ln \gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right)+O\left(\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}}}\right) = O\left(\sqrt{\ln \gamma}\right). \tag{7.19}$$

Выбрав постоянную a достаточно большой, мы получаем, что $|u| \leqslant a \ln^{\frac{1}{2}} n$.

Так как все члены биномиального распределения меньше центрального и при $u=0$ выполнено (7.18), то из (7.18) следует, что при всех k

$$C_{n-m-1}^{k}\,\bar{p}^{\,n-m-1-k}\,\bar{q}^{k} = O\left(\frac{1}{\sqrt{nD}}\right). \tag{7.20}$$

Заметим, что из оценки (2.33) § 2 следует, в силу $nq \leqslant \lambda(n)$ и $\frac{\lambda \ln \gamma}{\lambda} \to \infty$, что

$$\sum_{k \geqslant m-1-\lambda \ln \gamma} C_{n-1}^k \; p^{m-k-1} q^k = O(e^{-\lambda \ln \gamma}) = O(\gamma^{-\lambda}) = O(\gamma^{-2}), \qquad (7.21)$$

так как $\lambda \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$\sum_{x \geqslant \lambda \ln \gamma} C_{m-1}^k C_{n-m-1}^k \, p^{m-k-1} \, q^{k+1} \, \bar{p}^{n-m-k-1} \, \bar{q}^k =$$

$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{nD}}\right) \sum_{x \geqslant \lambda \ln \gamma} C_{m-1}^k \, p^{m-k-1} \, q^k = O\left(\frac{1}{\gamma^2 \sqrt{nD}}\right). \qquad (7.22)$$

Так как $|z| \leqslant 2 \ln^{\frac{1}{2}} \gamma$ соответствует не больше, чем $4\sqrt{nD} \ln^{\frac{1}{2}} \gamma$ значений m, то

$$\sum_{|z| \leqslant 2\ln^{1/2}\gamma} \; \sum_{x \geqslant \lambda \ln \gamma} C_{m-1}^k C_{n-m-1}^k \, p^{m-k-1} \, q^{k+1} \, \bar{p}^{n-m-k-1} \, \bar{q}^k = \left(\tfrac{1}{\gamma^2}\right). \qquad (7.23)$$

Из (7.18) и (7.21) следует, что при $|z| \leqslant 2\ln^{1/2}\gamma$

$$\sum_{\substack{|x| \leqslant \lambda \ln \gamma \\ |u| \leqslant a \ln^{1/2} \gamma}} C_{m-1}^k C_{n-m-1}^k \, p^{m-k-1} \, q^{k+1} \, \bar{p}^{n-m-k-1} \, \bar{q}^k =$$

$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{(q+\bar{q})\sqrt{2\pi nD}} \left(\sum_{|x| \leqslant \lambda \ln \gamma} C_{m-1}^k \, p^{m-k-1} \, q^{k+1} \right) \left(1 + O\left(\frac{\lambda \ln^{3/2} \gamma}{\gamma^{1/2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\bar{q} e^{-\frac{z^2}{2}}}{(q+\bar{q})\sqrt{2\pi nD}} \left[1 + O\left(\frac{\lambda \ln^{3/2} \gamma}{\gamma^{1/2}}\right)\right]. \qquad (7.24)$$

Точно таким же путем можно получить аналогичные (7.23) и (7.24) оценки для второго члена явного выражения (1.2) изучаемых вероятностей. Наша теорема выводится из этих оценок так же, как это делалось в конце § 6.

§ 8. Доказательство локальной предельной теоремы

Дадим обоснование естественности нашего выбора границ областей действия отдельных предельных законов (см. схему 2) в локальной предельной теореме (этот выбор, однако, не является окончательным; см. стр. 299).

На схеме 2 вблизи верхнего правого угла квадрата смыкаются области сходимостей трех законов: нормального, Купмана и Карпелевича-Успенского. Если обозначить расстояния граничной точки этих трех областей до границ квадрата через q и $\bar{q}$ и положить $\mu = nq$, $\nu = n\bar{q}$, то скорость сходимости к предельным законам будет, как это видно из теорем 8, 4 и 7, определяться «в основном» членами: для нормального закона

$O\left(\frac{1}{\nu^{\frac{1}{2}}}\right)$, для закона Купмана $O(\nu^2/\mu)$ и для закона Карпелевича-Успенского $O(\mu^2/n)$. Естественно надеяться, что выбор точки стыка будет наивыгоднейшим, если в ней эти остаточные члены будут иметь одинаковый порядок. Приравнивая

$$1/\nu^{1/2} = \nu^2/\mu = \mu^2/n, \tag{8.1}$$

мы имеем в качестве решения $\nu = n^{2/11}$, $\mu = n^{5/11}$; поэтому точку $q = n^{-6/11}$, $\bar{q}^{-9/11}$ мы выберем точкой стыка областей II, V и I.

В области I сходимости к нормальному закону нам нужно выделить подобласти I′ и I″ (на схеме 2 их границы обозначены пунктиром), в которых сходимость вытекает не из основной теоремы 8, а из теоремы 9. Точки стыка в остальных трех углах квадрата выбираются, исходя из тех же соображений, что и в верхнем правом углу, и окончательно мы выбираем за область I ту часть квадрата, где $\bar{p} \geqslant n^{-7/18}$, $\bar{q} \geqslant n^{-7/18}$, и $q \leqslant n^{-4/18}$, если $\bar{p} \leqslant 1/2$, и где $q \leqslant n^{-4/18}$, если $\bar{p} \geqslant \frac{1}{2}$. За область I″ выбираем ту часть квадрата, где $p \geqslant n^{-7/18}$, $q \geqslant n^{-7/18}$ и $\bar{q} \leqslant n^{-11/18}$, если $\bar{p} \leqslant 1/2$, и где $\bar{q} \leqslant n^{-4/18}$, если $p \geqslant 1/2$. На самом деле, «наивыгоднейшими» границами областей были бы некоторые кривые линии, соединяющие точки стыка, однако для простоты мы заменили эти кривые линии зигзагообразными.

Для того чтобы окончательно убедиться в том, что сформулированная в § 1 теорема действительно доказана, достаточно взять области I—VII, границы которых описаны в § 1, и I′, I″, описанные только что, и, сравнив их с условиями теорем 4—9, заметить, что в каждой из них остаточный член имеет порядок не больше $\frac{\ln^{3/2} n}{n^{1/18}}$.

§ 9. Доказательство интегральной предельной теоремы

Покажем, как из доказанных нами теорем 4—9 следует сформулированная в § 1 интегральная предельная теорема.

Мы уже отмечали в § 1, что если η_n и ζ_n — две последовательности случайных величин такие, что $\rho(\eta_n, \zeta_n) \to 0$ и последовательность η_n имеет при некоторой нормировке предельное распределение, то при той же нормировке будет иметь то же самое предельное распределение и последовательность ζ_n.

Если случайная величина ζ_n имеет распределение вероятностей $\{\pi_m(n, p, \bar{p})\}$, $m = 1, \ldots, \infty$, определенное формулой (6.1), и p и $\bar{p}$ зависят от n таким образом, что $nD \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$P\left\{\frac{\eta_n - nM}{\sqrt{nD}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx. \tag{9.1}$$

Действительно,

$$P\left\{\frac{\eta_n - nM}{\sqrt{nD}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi nD}} \sum e^{-\frac{z_m^2}{2}}, \tag{9.2}$$

где z_m пробегает арифметическую прогрессию с разностью $1/\sqrt{nD}$ и суммирование производится по всем $z_0 < z_m < x$, где $z_0 = -\frac{nM}{\sqrt{nD}} \to \infty$. Поэтому условие (9.1) следует из леммы 4 § 6.

Предположим теперь, что последовательность ξ_n имеет распределение (1.2) и для нее выполнены условия утверждения I доказываемой теоремы. Выберем $\alpha(n)$ так, чтобы $\alpha(n) \to \infty$, $qn \geqslant \alpha(n)$, $\bar{q}n \geqslant \alpha(n)$ и $\max(pn, \bar{p}n) \geqslant \alpha(n)$. Положим $\lambda(n) = \sqrt[4]{\alpha(n)}$. Последовательность ξ_n разобьем на три подпоследовательности: первая, для которой $n\bar{q}p \geqslant \lambda(n)$ и $nq\bar{p} \geqslant \lambda(n)$, вторая, для которой $n\bar{q}p \leqslant \lambda(n)$, и третья, для которой $nq\bar{p} \leqslant \lambda(n)$. Для первой из подпоследовательностей выполнены, очевидно, условия теоремы 8 и поэтому из предыдущего рассуждения следует, что она асимптотически нормальна с нужными нам параметрами.

Покажем, что вторая подпоследовательность удовлетворяет условиям (7.1) теоремы 9. Так как $n\bar{q}p \leqslant \alpha^{-1/4}$, но $n\bar{q} \geqslant \alpha$, то $p \to 0$ и, значит, при больших n величина

$$nq\bar{q}\bar{p} \geqslant \frac{1}{2} n\bar{q}\bar{p}.$$

Так как $\bar{p} + \bar{q} = 1$, то для того чтобы установить, что

$$n\bar{q}q\bar{p} \geqslant \frac{1}{2} \alpha,$$

достаточно показать, что $n\bar{p} \geqslant \alpha$. Но если бы это было не так, то

$$\max(pn, \bar{p}n) = np > \alpha$$

и для того чтобы $n\bar{q}p \leqslant \alpha^{-1/4}$ необходимо, чтобы $\bar{q} \to 0$. Мы пришли к противоречию. Условия (7.1) выполнены при $\gamma(n) = \alpha(n)$, так как $\frac{\alpha^{1/4} \ln^{3/2} \alpha}{\alpha^{1/2}} \to 0$. Аналогично показывается, что третья подпоследовательность удовлетворяет условиям (7.2). Значит, каждая из трех подпоследовательностей асимптотически нормальна. Поэтому асимптотически нормальна и сама последовательность.

Из теоремы 7 § 5 следует, что для того чтобы доказать утверждение VII нашей основной теоремы, достаточно показать, что

$$\sum_{m \leqslant xn} \pi_m(n;\, p, \bar{p}) \to F(x), \tag{9.3}$$

где величины $\{\pi_m\}$ определяются формулой (5.1), а $F(x)$ — формулой (1.13). Но легко видеть, что сумма (9.3) представляет собой записанную в других обозначениях интегральную сумму интеграла, через который определялось $F(x)$, и поэтому стремится к $F(x)$.

Еще проще доказываются утверждения II, III и VI. Действительно, если, как предполагается в II, $\overline{q}n \to b > \infty$ и $p \to \widetilde{p} < 1$, то величины $\pi_m(n; p, \overline{p})$, определяемые в (3.1), стремятся к ненулевым пределам и поэтому утверждение II сразу следует из теоремы 4. Аналогично, утверждение III вытекает из теоремы 5, а утверждение VI — из теоремы 6.

Для того чтобы доказать утверждения IV и V, заметим, что если случайная величина $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_\nu$, где ξ_i и ν — независимые величины и $\zeta = \widetilde{\xi}_1 + \cdots + \widetilde{\xi}_{\widetilde{\nu}}$, где ξ_i и $\widetilde{\nu}$ — независимые случайные величины, и распределение случайных величин $\widetilde{\xi}_i$ сходится к распределению величин ξ_i, а распределение $\widetilde{\nu}$ сходится к распределению ν, то и распределение ζ сходится к распределению величины η. Это нетрудно показать, например, заменив сходимость наших случайных величин сходимостью их характеристических функций. Но из теоремы 4 следует, что в условиях утверждения IV асимптотическое поведение изучаемой случайной величины совпадает с асимптотическим поведением величины $\zeta = \sigma_0 + \cdots + \sigma_\mu$, где σ_i и μ независимы, $P\{\sigma_i = k\} = p^{k-1} q$, а μ имеет распределение Пуассона с параметром $\overline{q}n$. Нас интересует асимптотика величины $q\zeta = q\sigma_0 + \cdots + q\sigma_\mu$. Как известно, геометрическое распределение сходится к показательному, если его параметр стремится к единице. Поэтому из сделанного ранее замечания вытекает, что предельное распределение величины $q\zeta$ совпадает с распределением величины $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_\nu$, где ξ_i и ν независимы, и $P\{\xi_i > x\} = e^{-x}$, а $\nu - 1$ имеет распределение Пуассона с параметром b. Функция $F(x)$, вводимая в (1.8), и представляет собой функцию распределения величины η. Аналогично доказывается утверждение V.

Чтобы показать, что случаями I—VII исчерпываются все случаи существования предельного распределения у последовательности ξ_n, заметим, что если ни одно из условий I—VII не выполнено, то из последовательности ξ_n можно выделить две подпоследовательности, для каждой из которых существует при соответствующей нормировке предельное распределение. Но, просмотрев наши предельные распределения, указанные в I—VII, легко увидеть, что любые два из них принадлежат к разным типам распределений, и поэтому вся последовательность ξ_n ни при какой нормировке не может иметь предельное распределение.

В заключение автор приносит искреннюю благодарность своему учителю А. Н. Колмогорову, поставившему перед ним изученную здесь задачу и руководившему ее решением.

Поступило
6.XII.1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко, Б. В., Курс теории вероятностей, М.—Л., 1950.

[2] Козуляев П. А., Асимптотический анализ одной основной формулы теории вероятностей, Учен. зап. МГУ, 15 (1939), 182.

[3] Колмогоров А. Н., Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова., Изв. Ак. Наук СССР, серия математ., 13 (1949), 281—300.

[4] Koopman B. O., A generalization of Poisson distribution for Markoff chains, Proc. Nat. Ac. Sci., 36 (1950), 202—207.

[5] Марков А. А., Исследование замечательного случая зависимых испытаний, Изв. Акад. наук 6, 1 (1907), 61—80.

[6] Pepper D., Asymptotic expression for the probability of trials connected in a chain, Ann. Math., 28 (1927), 318—326.
[7] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, М.—Л., 1951.
[8] Хинчин А. Я., Асимптотические законы теории вероятностей, М. Л., ОНТИ, 1936.
[9] Прохоров Ю. В., Асимптотическое поведение биномиального распределения, Успехи мат. наук, т. VIII (1953), 135—142.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 331—364

Б. М. ЛЕВИТАН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе изучается асимптотическое поведение спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, заданного на всей прямой или на полупрямой. Основным вспомогательным средством являются тауберовы теоремы и оценки остатков в этих теоремах, изложенные в работе [1]. Полученные асимптотические формулы для спектральной функции применены к изучению сходимости разложений по собственным функциям.

Введение

Рассмотрим в интервале $(0, \infty)$ дифференциальное уравнение

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0. \tag{0.1}$$

Коэффициент $q(x)$ предполагается действительным и суммируемым в каждом конечном интервале $(0, a)$, $a < \infty$. Обозначим через $\omega_h(x, \lambda)$ решение уравнения (0, 1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h. \tag{0.2}$$

Как известно [см. ([6])], при данном h существует по крайней мере одна монотонная, ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$ такая, что для каждой функции $f(x) \in L_2(0, \infty)$ справедливо равенство Парсеваля:

$$\int_0^\infty f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty E^2(\lambda)\,d\rho(\lambda), \qquad E(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\,\omega_h(x, \lambda)\,dx.$$

Рассмотрим функцию от трех переменных x, y и λ:

$$\theta(x, y; \lambda) = \begin{cases} \int_0^\lambda \omega_h(x, \nu)\,\omega_h(y, \nu)\,d\rho(\nu), & \text{если } \lambda > 0, \\ -\int_0^\lambda \omega_h(x, \nu)\,\omega_h(y, \nu)\,d\rho(\nu), & \text{если } \lambda < 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Будем называть функцию $\theta(x, y; \lambda)$ спектральной функцией уравнения (0.1) (при начальных условиях (0.2)). Эта терминология отличается от

принятой нами в работе ([1]), однако лучше соответствует терминологии в спектральной теории линейных операторов. В работе ([1]) спектральной функцией мы называли функцию $\rho(\lambda)$, т. е. $\theta(0, 0; \lambda)$.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения спектральной функции $\theta(x, y; \lambda)$. Основными средствами являются тауберовы теоремы и оценки остатков в этих теоремах, полученные в работе ([1]). Приведем один из основных результатов работы:

Пусть выполнены следующие условия:

1. *Коэффициент* $q(x)$ *в уравнении* (0.1) *ограничен в каждом конечном интервале.*

2. *Оператор* (0.1) (*при начальных условиях* (0.2)) *не имеет отрицательного спектра.*

Положим

$$\theta^*(x, y; \lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} \cos\sqrt{\nu}\,x \cos\sqrt{\nu}\,y\,\frac{d\nu}{\sqrt{\nu}},$$

$$\Phi(x, y; \lambda) = \theta(x, y; \lambda) - \theta^*(x, y; \lambda).$$

Тогда для $\lambda > 0$ *справедлива оценка*

$$|\Phi(x, y; \lambda) < C, \tag{0.3}$$

причем константа C *зависит от интервала изменения* x *и* y *и не зависит от* λ.

Изучение асимптотического поведения спектральной функции уравнения (0.1) тесно связано с изучением разложения по собственным функциям этого уравнения.

Основываясь на оценке (0.3), мы доказываем следующую теорему разложения:

Пусть выполняются условия 1) *и* 2) *предыдущей теоремы. Пусть* $f(x) \in L_2(0, \infty)$. *Тогда разность между обобщенным интегралом Фурье и обычным интегралом Фурье для функции* $f(x)$ *стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.*

Последняя теорема аналогична классической теореме Хаара о разложении по собственным функциям уравнения Штурма-Лиувилля и дает окончательное решение вопроса о сходимости разложений по собственным функциям уравнения (0.1) в случае бесконечного интервала $(0, \infty)$.

Аналогичные результаты имеют место в случае интервала $(-\infty, \infty)$, причем последний случай изучается даже проще, чем случай полупрямой.

В заключение заметим, что на протяжении всей работы буквой C обозначается константа не обязательно одна и та же, однако мы будем каждый раз оговаривать, от каких переменных та или иная константа зависит.

§ 1. Оценка решения задачи Коши. Случай всей прямой

1. Пусть действительная функция $q(x)$ определена в интервале $(-\infty, \infty)$ и суммируема в каждом конечном интервале (a, b) $(-\infty < a < b < \infty)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\,y = 0. \tag{1.1}$$

Обозначим через h произвольное действительное число и через $\omega_h(x, \lambda)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h. \tag{1.2}$$

Если $h = \infty$, то под $\omega_\infty(x, \lambda)$ будем понимать решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{\lambda}.$$

Обозначим через t произвольное действительное число и рассмотрим произведение $\omega_h(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\, t$. Как известно [см. (3), стр. 78], справедлива формула

$$\omega_h(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\, t = \frac{1}{2}[\omega_h(x+t, \lambda) + \omega_h(x-t, \lambda)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds. \tag{1.3}$$

Функция $w(x, t, s)$ строится по функции Римана уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

и во всяком случае, даже если коэффициент $q(x)$ в уравнении (1.1) разрывен, непрерывна.

Формула (1.3) играет в дальнейшем фундаментальную роль. В настоящем параграфе будут получены некоторые важные оценки для функции $w(x, t, s)$, годные для малых t.

ЛЕММА 1.1. *Пусть коэффициент $q(x)$ в уравнении* (1.1) *есть суммируемая функция в каждом конечном интервале. Тогда для $t > 0$ справедлива оценка:*

$$|w(x, t, s)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}|q(r)|\,dr\,\exp\left(\frac{1}{2}t\int_{x-t}^{x+t}|q(r)|\,dr\right). \tag{1.4}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1.5}$$

Обозначим через $f(x)$ дважды дифференцируемую для всех действительных x функцию и через $u(x, t, f)$ — решение уравнения (1.5), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{1.6}$$

Как известно [см., например, (3), стр. 14], справедлива формула

$$u(x, t; f) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s)\,f(s)\,ds. \tag{1.7}$$

Полагая, в частности, $f(x) = \omega_h(x, \lambda)$, мы получим формулу (1.3). Перепишем уравнение (1.5) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -q(x)u. \tag{1.5'}$$

Рассматривая в уравнении (1.5′) правую часть как известную функцию, мы можем заменить его, совместно с граничными условиями (1.6), следующим интегральным уравнением [см. ([4]), стр. 456]:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]-\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\left[\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z)\,u(z,\tau)\,dz\right]. \qquad (1.8)$$

Уравнение (1.8) можно решать методом последовательных приближений. Положим

$$u_0(x,t;f)=\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)],$$

$$u_k(x,t;f)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\left[\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z)\,u_{k-1}(z,\tau)\,dz\right] \quad (k=1,2,\ldots);$$

тогда

$$u(x,t;f)=u_0(x,t;f)-u_1(x,t;f)+u_2(x,t;f)-\cdots . \qquad (1.9)$$

Покажем, что каждую из функций $u_k(x,t;f)$ $(k=1,2,\ldots)$ можно представить в виде

$$u_k(x,t;f)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w_k(x,t,s)\,f(s)\,ds\,. \qquad (1.10)$$

При $k=1$ имеем:

$$u_1(x,t;f)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\left\{\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z)\,\frac{1}{2}[f(z+\tau)+f(z-\tau)]\,dz\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z)\,f(z+\tau)\,dz+\frac{1}{4}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z)\,f(z-\tau)\,dz=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^t d\tau\int_{x-t+2\tau}^{x+t} q(s-\tau)\,f(s)\,ds+\frac{1}{4}\int_0^t d\tau\int_{x-t}^{x+t-2\tau} q(s+\tau)\,f(s)\,ds.$$

Меняя порядок интегрирования, найдем:

$$u_1(x,t;f)=\frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t} f(s)\,ds\int_0^{\frac{1}{2}(s-x+t)} q(s-\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t} f(s)\,ds\int_0^{\frac{1}{2}(x+t-s)} q(s+\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f(s)\,\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}(s-x+t)} q(s-\tau)\,d\tau+\int_0^{\frac{1}{2}(x+t-s)} q(s+\tau)\,d\tau\right\}ds\,.$$

Таким образом, мы получим формулу (1.10), положив

$$w_1(x,t,s)=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}(s-x+t)} q(s-\tau)\,d\tau+\int_0^{\frac{1}{2}(x+t-s)} q(s+\tau)\,d\tau\right\}. \qquad (1.11)$$

Допустим теперь, что для $k=1, 2, \ldots, n-1$ формула (1.10) уже доказана. Докажем ее для $k=n$. Мы имеем:

$$u_n(x, t; f) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \left\{ \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(z) \left[\frac{1}{2} \int_{z-\tau}^{z+\tau} w_{n-1}(z, \tau, s) f(s)\, ds \right] dz \right\}. \quad (1.12)$$

Изменим порядок интегрирования так, чтобы внешний интеграл брался по s. Так как $z-\tau \leqslant s \leqslant z+\tau$ и $x-t+\tau \leqslant z \leqslant x+t-\tau$, то $x-t \leqslant s \leqslant x+t$. Поэтому пределы интегрирования по s будут от $x-t$ до $x+t$. Мы получим:

$$u_n(x, t; f) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f(s)\, ds \, \frac{1}{2} \iint_{\sigma_{\tau z}} w_{n-1}(z, \tau, s)\, q(z)\, dz\, d\tau,$$

где $\sigma_{\tau z}$ — некоторая область плоскости (τ, z) (зависящая от x и t), точный вид которой в дальнейшем нам не понадобится. Таким образом, формула (1.10) доказана для $k=n$, причем

$$w_n(x, t, s) = \frac{1}{2} \iint_{\sigma_{\tau z}} w_{n-1}(z, \tau, s)\, q(z)\, dz\, d\tau. \quad (1.13)$$

Докажем теперь следующие неравенства:

$$|w_k(x, t, s)| \leqslant \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} |q(s)|\, ds \right\}^k \quad (k=1, 2, \ldots). \quad (1.14)$$

Рассмотрим сначала случай $k=1$. Из формулы (1.11) находим:

$$w_1(x, t, s) = -\frac{1}{2} \int_s^{\frac{1}{2}(s+x-t)} q(r)\, dr + \frac{1}{2} \int_s^{\frac{1}{2}(s+x+t)} q(r)\, dr = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}(s+x-t)}^{\frac{1}{2}(s+x+t)} q(r)\, dr.$$

Так как $x-t \leqslant s \leqslant x+t$, то из последней формулы следует оценка:

$$|w_1(x, t, s)| \leqslant \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} |q(r)|\, dr,$$

т. е. оценка (1.14).

Предположим теперь, что неравенство (1.14) доказано уже для всех $k=1, 2, \ldots, n-1$. Докажем его для $k=n$.

Из формулы (1.13) и оценки (1.14) следует оценка:

$$|w_n(x, t, s)| \leqslant \frac{1}{2} \iint_{\sigma_{\tau z}} |w_{n-1}(z, \tau, s)|\, |q(z)|\, dz\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \iint_{\sigma_{\tau z}} |q(z)| \frac{\tau^{n-2}}{(n-2)!} \left\{ \frac{1}{2} \int_{z-\tau}^{z+\tau} |q(r)|\, dr \right\}^{n-1} dz\, d\tau.$$

Так как [см. формулу (1.12)] $x-t+\tau \leqslant z \leqslant x+t-\tau$, то $x-t \leqslant z-\tau \leqslant z+\tau \leqslant x+t$. Поэтому из последней оценки следует неравенство

$$|w_n(x, t, s)| \leqslant \frac{1}{2(n-2)!} \left\{ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} |q(r)|\, dr \right\}^{n-1} \iint_{\sigma_{\tau z}} |q(z)|\, \tau^{n-1} dz\, d\tau. \quad (1.15)$$

Далее, так как $0 \leqslant \tau \leqslant t$ и $x-t+\tau \leqslant z \leqslant x+t-\tau$, то $x-t \leqslant z \leqslant x+t$ и, следовательно, область $\sigma_{\tau z}$ содержится в прямоугольнике

$0 \leqslant \tau \leqslant t$; $x-t \leqslant z \leqslant x+t$. Поэтому из неравенства (1.15) следует оценка:

$$|w_n(x, t, s)| \leqslant \frac{1}{2(n-2)!}\left\{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}|q(r)|\,dr\right\}^{n-1}\int_0^t \tau^{n-2}d\tau \int_{x-t}^{x+t}|q(z)|\,dz =$$

$$= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}|q(r)|\,dr\right\}^n,$$

т. е. оценка (1.14).

Из неравенства (1.14) неравенство (1.4) следует непосредственно. В самом деле, в силу формулы (1.9),

$$w(x, t, s) = -w_1(x, t, s) + w_2(x, t, s) - \cdots.$$

Поэтому

$$|w(x, t, s)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|w_k(x, t, s)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\left\{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}|q(r)|\,dr\right\}^k =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}|q(r)|\,dr \cdot \exp\left[\frac{1}{2}t\int_{x-t}^{x+t}|q(r)|\,dr\right],$$

что и требовалось доказать.

2. Делая различные предположения относительно поведения функции $q(x)$, можно получить различные оценки для функции $w(x, t, s)$ при малых t.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если коэффициент $q(x)$ в уравнении (1.1) суммируем в каждом конечном интервале, то для любого фиксированного конечного интервала (x_0, x_1) и любого фиксированного числа $t_0 > 0$ можно указать константу $C = C(x_0, x_1; t_0)$ такую, что при $x \in (x_0, x_1)$ и $0 < t \leqslant t_0$ справедливо неравенство:*

$$|w(x, t, s)| < C.$$

Доказательство следует непосредственно из оценки (1.4)

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть в некотором интервале (x_0, x_1) коэффициент $q(x)$ удовлетворяет следующему условию: существуют положительные константы $C = C(x_0, x_1)$ и $\alpha = \alpha(x_0, x_1)$ такие, что при $t \leqslant t_0$ (t_0 — фиксированное число) и $x \in (x_0, x_1)$ справедливо неравенство*

$$\int_{x-t}^{x+t}|q(r)|\,dr < Ct^{\alpha}. \tag{1.16}$$

Тогда можно указать константу C, зависящую от константы неравенства (1.16) и не зависящую от t, такую, что для $x \in (x_0, x_1)$ и $t \leqslant t_0$ выполняется неравенство

$$|w(x, t, s)| < Ct^{\alpha}. \tag{1.17}$$

Доказательство следует непосредственно из оценки (1.4).

Замечание. Для оценки (1.16) достаточно, чтобы существовали константы $C = C(x_0, x_1; t_0)$ и $p = p(x_0, x_1; t_0) > 1$ такие, что для $x \in (x_0 - t_0, x_1 + t_0)$ выполняется неравенство

$$\left\{\int_{x-t_0}^{x+t_0}|q(r)|^p dr\right\}^{\frac{1}{p}} < C.$$

В самом деле, в силу неравенства Гельдера $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, при $t<t_0$

$$\int\limits_{x-t}^{x+t}|q(r)|\,dr\leqslant\left\{\int\limits_{x-t_0}^{x+t_0}|q(r)|^p\,dr\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{x-t}^{x+t}dr\right\}^{\frac{1}{q}}<Ct^{\frac{1}{q}}.$$

§ 2. Оценка решения задачи Коши. Случай полупрямой

1. Предположим, что уравнение (1.1) задано на полупрямой $(0, \infty)$. Если число h в граничном условии (1.2) равно 0 или ∞, то вместо полупрямой можно рассматривать всю прямую.

Действительно, пусть $h=0$. Продолжим функцию $q(x)$, заданную вначале на положительной полуоси $(0, \infty)$, на отрицательную полуось $(-\infty, 0)$ по четному закону. Легко видеть, что в этом случае функция $\omega_0(x, \lambda)$ также продолжается четно. Поэтому произведение $\omega_0(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,t$ представляется по формуле (1.3) при произвольных x и t.

Если $h=\infty$, то при четном продолжении функции $q(x)$ функция $\omega_\infty(x, \lambda)$ продолжится нечетно. Как и прежде, произведение $\omega_\infty(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,t$ представляется по формуле (1.3) при произвольных x и t.

2. Итак, мы можем считать, что $h\neq 0$ и $h\neq\infty$. Выберем фиксированное положительное число x. Если $0<t\leqslant x$, то формула (1.3) применима. Поэтому имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.1. *Если коэффициент $q(x)$ в уравнении (1.1) удовлетворяет условию одной из теорем предыдущего параграфа, то при $0<t\leqslant x$ для $w(x, t, s)$ справедливо заключение соответствующей теоремы.*

3. Выведем формулу для произведения $\omega_h(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,t$, годную при $t>x$. Положим

$$\varphi(x, \lambda)=\omega_0(x, \lambda), \quad \psi(x, \lambda)=\omega_\infty(x, \lambda).$$

Тогда

$$\omega_h(x, \lambda)=\varphi(x, \lambda)+\frac{h}{\sqrt{\lambda}}\psi(x, \lambda).$$

Продолжим функцию $q(x)$ на отрицательную полуось $(-\infty, 0)$ по четному закону. Так как при этом функция $\varphi(x, \lambda)$ продолжится четно, а функция $\psi(x, \lambda)$ — нечетно, то

$$\omega_h(-x, \lambda)=\varphi(x, \lambda)-\frac{h}{\sqrt{\lambda}}\psi(x, \lambda),$$

т. е.

$$\omega_h(-x, \lambda)=\omega_{-h}(x, \lambda).$$

Далее [см. ([3]), стр. 78],

$$\omega_h(x, \lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,x+\int\limits_0^x K_h(x, t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt, \tag{2.1}$$

$$\omega_{-h}(x, \lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,x+\int\limits_0^x K_{-h}(x, t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt, \tag{2.2}$$

причем [см. ([1]), стр. 346] при $x\to 0$

$$K_h(x, t)=h+O\left(\int\limits_0^x|q(s)|\,ds\right). \tag{2.3}$$

Обращая формулу (2.1), получим:

$$\cos\sqrt{\lambda}\,x = \omega_h(x, \lambda) - \int_0^x K_h^*(x, t)\,\omega_h(t, \lambda)\,dt, \tag{2.4}$$

где при $x \to 0$

$$K_h^*(x, t) = K_h(x, t) + o\left(\int_0^x |q(s)|\,ds\right).$$

Подставляя (2.4) в (2.2), найдем:

$$\omega_{-h}(x, \lambda) = \omega_h(x, \lambda) - \int_0^x K_h^*(x, t)\,\omega_h(t, \lambda)\,dt +$$

$$+\int_0^x K_{-h}(x, t)\,dt \int_0^t K_h^*(t, s)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds = \omega_h(x, \lambda) -$$

$$-h\int_0^x \omega_h(s, \lambda)\,ds + \int_0^x L_h(x, s)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds, \tag{2.5}$$

причем при $x \to 0$

$$L_h(x, s) = O\left(\int_0^x |q(s)|\,ds\right). \tag{2.6}$$

Пусть функция $w(x, t, s)$ строится по функции $q(x)$, продолженной на всю ось четно. Из формулы (1.3) следует для произвольных x и t:

$$\omega_h(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,t = \frac{1}{2}[\omega_h(x+t; \lambda) + \omega_h(x-t; \lambda)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds.$$

Если $t > x$, то $\omega_h(x-t, \lambda) = \omega_{-h}(t-x, \lambda)$ и поэтому из последней формулы, а также из формулы (2.5) выводим, что

$$\omega_h(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,t = \frac{1}{2}[\omega_h(x+t, \lambda) + \omega_h(t-x, \lambda)] + \frac{1}{2}h\int_0^{t-x} \omega_h(s, \lambda)\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t-x} L_h(t-x; s)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds + \frac{1}{2}\int_{x-t}^0 w(x, t, s)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{x+t} w(x, t, s)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds. \tag{2.7}$$

Заменяя в предпоследнем интеграле s на $-s$, мы получим (снова прибегая к формуле (2.5)):

$$\int_{x-t}^0 w(x, t, s)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds = \int_0^{t-x} w(x, t, -s)\,\omega_{-h}(s, \lambda)\,ds =$$

$$= \int_0^{t-x} w(x, t, -s)\left[\omega_h(s, \lambda) + h\int_0^s \omega_h(u, \lambda)\,du + \int_0^s L_h(s, u)\,\omega_h(u, \lambda)\,du\right]ds.$$

Меняя порядок интегрирования, находим:

$$\int_0^{t-x} w(x, t, -s)\,ds\int_0^s \omega_h(u, \lambda)\,du = \int_0^{t-x} \omega_h(u, \lambda)\,du\int_u^{t-x} w(x, t, -s)\,ds,$$

$$\int_0^{t-x} w(x, t, -s)\, ds \int_0^s L_h(s, u)\, \omega_h(u, \lambda)\, du =$$
$$= \int_0^{t-x} \omega_h(u, \lambda)\, du \int_u^{t-x} w(x, t, -s)\, L_h(s, u)\, ds,$$

поэтому из формулы (2.7) следует формула ($t > x$):

$$\omega_h(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}\, t = \frac{1}{2}[\omega_h(x+t, \lambda) + \omega_h(t-x, \lambda)] =$$
$$+ \frac{1}{2} h \int_0^{t-x} \omega_h(s, \lambda)\, ds + \frac{1}{2} \int_0^{t+x} w^*(x, t, s)\, \omega_h(s, \lambda)\, ds, \tag{2.8}$$

причем

$$w^*(x, t, s) = \begin{cases} \frac{1}{2} w(x, t, s) + L_h(t-x, s) + w(x, t, -s) + \\ \qquad + \int_s^{t-x} w(x, t, -u)\, du + \int_s^{t-x} w(x, t, -u)\, L_h(u, s)\, du, \\ \qquad\qquad 0 \leqslant s \leqslant t-x, \\ \frac{1}{2} w(x, t, s), \qquad t-x \leqslant s \leqslant t+x. \end{cases} \tag{2.9}$$

Так как для функции $w(x, t, s)$ справедлива оценка (1.4), а для функции $L_h(x, s)$ — оценка (2.6), то из формулы (2.9) непосредственно следует

ТЕОРЕМА 2.2. *Если t_0 — произвольное фиксированное положительное число, то для положительных $t \leqslant t_0$ и $x < t$ справедлива оценка*

$$|w^*(x, t, s)| < C \int_0^{2t} |q(s)|\, ds. \tag{2.10}$$

В частности, если можно указать такие константы C и α, что при $t \leqslant t_0$ $\int_0^t |q(s)|\, ds < Ct^\alpha$, то при $t \leqslant t_0$ и $x < t$ справедлива оценка

$$|w^*(x, t, s)| < Ct^\alpha. \tag{2.11}$$

§ 3. Вывод вспомогательных формул и предварительная оценка спектральной функции. Случай всей прямой

1. Предположим, что уравнение (1.1) задано на всей прямой и коэффициент $q(x)$ суммируем в каждом конечном интервале. Положим

$$\omega_0(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda), \quad \omega_\infty(x, \lambda) = \psi(x, \lambda).$$

Как известно [см. ([5])], существуют монотонные, ограниченные в каждом конечном интервале функции $\xi(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$ и функция с ограниченным в каждом конечном интервале изменением $\eta(\lambda)$ такие, что если $f(x)$ и $g(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, то имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)\, G_1(\lambda)\, d\xi(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)\, G_2(\lambda)\, d\eta(\lambda) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\lambda)\, G_1(\lambda)\, d\eta(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\lambda)\, G_2(\lambda)\, d\zeta(\lambda). \tag{3.1}$$

Функции $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$, $G_1(\lambda)$, $G_2(\lambda)$ называются преобразованиями Фурье функции $f(x)$, соответственно $g(x)$, и определяются по формулам

$$F_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx, \quad F_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\psi(x, \lambda)\,dx,$$
$$G_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx, \quad G_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\psi(x, \lambda)\,dx. \tag{3.2}$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ обращаются в нуль вне некоторого конечного интервала, то интегралы в формулах (3.2) существуют в обычном смысле. В противном случае равенства (3.2) следует понимать в некотором обобщенном смысле [см. ([5])].

2. Положим в формуле (1.7) функцию $f(x)$ последовательно равной $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$. Мы получим, в силу единственности решения задачи Коши, формулы:

$$\varphi(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,t = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t, \lambda) + \varphi(x-t, \lambda)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s)\,\varphi(s, \lambda)\,ds, \tag{3.3}$$

$$\psi(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,t = \frac{1}{2}\left[\psi(x+t, \lambda) + \psi(x-t, \lambda)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(x; t, s)\,\psi(s, \lambda)\,ds. \tag{3.4}$$

Обозначим через $g_\varepsilon(t)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

a) $g_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(-t)$:

b) $g_\varepsilon(t) = 0$ для $|t| > 2\varepsilon$;

c) $g_\varepsilon(t)$ имеет ограниченную вторую производную.

Положим

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} g_\varepsilon(t)\cos\mu t\,dt.$$

Из условия c) следует, что для больших $\mu > 0$ имеет место оценка:

$$\psi_\varepsilon(\mu) = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \tag{3.5}$$

Помножим обе части формулы (3.3) на $g_\varepsilon(t)$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до 2ε. Изменив порядок интегрирования, мы получим:

$$\varphi(x, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}) = \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} \varphi(s, \lambda)\,g_\varepsilon(s-x)\,ds + \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} \chi_\varepsilon(x, s)\,\varphi(s, \lambda)\,ds, \tag{3.6}$$

где

$$\chi_\varepsilon(x, s) = \int_{|x-s|}^{2\varepsilon} w(x, t, s)\,g_\varepsilon(t)\,dt.$$

Аналогично,

$$\psi(x, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}) = \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} \psi(s, \lambda)\,g_\varepsilon(s-x)\,ds + \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} \chi_\varepsilon(x, s)\,\psi(s, \lambda)\,ds. \tag{3.6'}$$

Формулы (3.6) и (3.6′) показывают, что при фиксированном x функции $\varphi(x, \lambda)\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda})$ и $\psi(x, \lambda)\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda})$ суть преобразования Фурье функции $\lambda_\varepsilon(x, s)$, равной $[g_\varepsilon(s-x)+\chi_\varepsilon(x, s)]$ в интервале $(x-2\varepsilon,\ x+2\varepsilon)$ и равной нулю вне этого интервала.

Пусть $f(s) \in L_2(-\infty, \infty)$. Обозначая через $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ преобразования Фурье функции $f(s)$ и применяя к функциям $f(s)$ и $\lambda_\varepsilon(x, s)$ равенство Парсеваля (равенство (3.1)), получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda})\{F(\lambda)\varphi(x, \lambda)\,d\xi(\lambda) + [F(\lambda)\psi(x, \lambda)+G(\lambda)\varphi(x, \lambda)]\,d\eta(\lambda) +$$

$$+ G(\lambda)\psi(x, \lambda)\,d\zeta(\lambda)\} = \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\,g_\varepsilon(s-x)\,ds + \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\,\chi_\varepsilon(x, s)\,ds. \tag{3.7}$$

3. Положим

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}(2\varepsilon-|t|), & \text{если } 0 \leqslant |t| \leqslant 2\varepsilon, \\ 0, & \text{если } |t| > 2\varepsilon. \end{cases}$$

Функция $g_\varepsilon(t)$ условию c) не удовлетворяет. Однако легко видеть из непосредственного вычисления, что оценка (3.5) для нее выполняется. Обозначим через a произвольное действительное число и положим

$$g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t)\cos at.$$

Как показано в работе (1) (стр. 345),

$$\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a) = \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} g_\varepsilon(t, a)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt = \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda}+a)\varepsilon}{\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)}\right]^2 + \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda}-a)\varepsilon}{\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)}\right]^2.$$

Формулы (3.6) и (3.6′) принимают вид

$$\varphi(x, \lambda)\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a) = \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} g_\varepsilon(s-x, a)\varphi(s, \lambda)\,ds + \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} \chi_\varepsilon(x, s; a)\varphi(s, \lambda)\,ds, \tag{3.8}$$

$$\psi(x, \lambda)\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a) = \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} g_\varepsilon(s-x, a)\psi(s, \lambda)\,ds + \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} \chi_\varepsilon(x, s; a)\psi(s, \lambda)\,gs, \tag{3.8′}$$

причем

$$\chi_\varepsilon(x, s; a) = \int_{|x-s|}^{2\varepsilon} w(x, t, s)\,g_\varepsilon(t, a)\,dt. \tag{3.9}$$

Заменяя в формулах (3.8) и (3.8′) x на y и применяя равенство Парсеваля, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon^2(\sqrt{\lambda}, a)\{\varphi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)\,d\xi(\lambda) + [\varphi(x, \lambda)\psi(y, \lambda)+\psi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)]\,d\eta(\lambda) +$$

$$+ \psi(x, \lambda)\psi(y, \lambda)\,d\zeta(\lambda)\} = \int_{\Delta_{xy}} \{g_\varepsilon(s-x, a)+\chi_\varepsilon(x, s; a)\}\cdot$$

$$\cdot\{g_\varepsilon(s-y, a)+\chi_\varepsilon(y, s; a)\}\,ds, \tag{3.10}$$

где Δ_{xy} есть пересечение интервалов $(x-2\varepsilon,\ x+2\varepsilon)$ и $(y-2\varepsilon,\ y+2\varepsilon)$. Формула (3.10) принимает более сокращенный вид, если ввести в рассмотрение спектральную функцию уравнения (1.1):

$$\theta(x, y; \lambda) =$$

$$= \begin{cases} \int_0^\lambda \varphi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)\,d\xi(\lambda) + [\varphi(x, \lambda)\psi(y, \lambda) + \varphi(y, \lambda)\psi(x, \lambda)]\,d\eta(\lambda) + \\ \qquad + \psi(x, \lambda)\psi(y, \lambda)\,d\zeta(\lambda), \quad \lambda > 0, \\ -\int_0^\lambda \varphi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)\,d\xi(\lambda) + [\varphi(x, \lambda)\psi(y, \lambda) + \varphi(y, \lambda)\psi(x, \lambda)]\,d\eta(\lambda) + \\ \qquad + \psi(x, \lambda)\psi(y, \lambda)\,d\zeta(\lambda), \quad \lambda < 0, \\ 0, \qquad \lambda = 0. \end{cases}$$

Пользуясь функцией $\theta(x, y; \lambda)$, можно формулу (3.10) записать в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon^2(\sqrt{\lambda}, a)\, d_\lambda\theta(x, y; \lambda) =$$

$$= \int_{\Delta_{xy}} \{g_\varepsilon(s-x, a) + \chi_\varepsilon(x, s; a)\}\{g_\varepsilon(s-y, a) + \chi_\varepsilon(y, s; a)\}\,ds. \qquad (3.11)$$

В частности, если $x = y$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon^2(\sqrt{\lambda}, a)\, d_\lambda\theta(x, x; \lambda) = \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} \{g_\varepsilon(s-x, a) + \chi_\varepsilon(x, s; a)\}^2\,ds. \qquad (3.12)$$

Как мы уже отмечали, функция $\theta(x, y; \lambda)$ называется спектральной функцией уравнения (1.1). В настоящем параграфе мы дадим, опираясь на формулу (3.12), некоторые важные оценки для спектральной функции. В дальнейшем мы изучим асимптотическое поведение спектральной функции уравнения (1.1) при $\lambda \to +\infty$.

4. Функция $\theta(x, y; \lambda)$ дает разложение единицы оператора (1.1) и поэтому обладает следующими свойствами [см., например, (6), гл. VII)]:

1) Положительность: обозначим через Δ интервал $(\lambda, \lambda+\Delta)$ и положим

$$\theta(x, y; \Delta) = \theta(x, y; \lambda+\Delta) - \theta(x, y; \lambda).$$

Для $\Delta > 0$ $\theta(x, x; \Delta) \geqslant 0$.

2) Ортогональность: для любых двух интервалов $\Delta = (\lambda, \lambda+\Delta)$ и $\Delta' = (\mu, \mu+\Delta')$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, t; \Delta)\,\theta(t, y; \Delta')\,dt = \theta(x, y; \Delta.\Delta'), \qquad (3.13)$$

где через $\Delta.\Delta'$ обозначено пересечение интервалов Δ и Δ'.

Если положить $\Delta = \Delta'$, то из формулы (3.13) и неравенства Коши-Буняковского следует оценка:

$$|\theta(x, y; \Delta)| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \theta^2(x, t; \Delta)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \theta^2(t, y; \Delta)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= [\theta(x, x; \Delta)\,\theta(y, y; \Delta)]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}[\theta(x, x; \Delta) + \theta(y, y; \Delta)]. \qquad (3.14)$$

5. ЛЕММА 3.1. *Пусть ε_0 — произвольное положительное число и (x_0, x_1) — произвольный конечный интервал действительной оси. Суще-*

ствует константа $C = C(x_0, x_1; \varepsilon_0)$ *такая, что если* x *и* y *принадлежат интервалу* (x_0, x_1), *то имеет место неравенство*

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon_0 \sqrt{|\lambda|}} |d_\lambda \theta(x, y; \lambda)| < C.$$

В частности, при любых конечных ε, x *и* y

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon \sqrt{|\lambda|}} |d_\lambda \theta(x, y; \lambda)| < \infty.$$

Доказательство. Из формулы (3.12) при $a = 0$ вытекает оценка

$$\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\operatorname{sh} \varepsilon \sqrt{|\lambda|}}{\varepsilon \sqrt{|\lambda|}}\right)^4 d\lambda_\lambda \theta(x, x; \lambda) < \frac{1}{4} \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} [g_\varepsilon(s - x, 0) + \chi_\varepsilon(x, s; 0)]^2 ds. \quad (3.15)$$

Положим $\varepsilon \sqrt{|\lambda|} = u$. Из формулы Лагранжа следует, что

$$\operatorname{sh} u = \operatorname{sh} u - \operatorname{sh} 0 = u \operatorname{ch} \theta u > u,$$

поэтому из оценки (3.15) выводим:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{sh} \varepsilon \sqrt{|\lambda|}}{\sqrt{|\lambda|}} d_\lambda \theta(x,x;\lambda) < \frac{\varepsilon}{4} \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} [g_\varepsilon(s - x, 0) + \chi_\varepsilon(x, s; 0)]^2 gs. \quad (3.16)$$

Пусть $\varepsilon = \varepsilon_0 + 1$. Легко видеть, что при $|\lambda| > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{\operatorname{sh} \varepsilon \sqrt{|\lambda|}}{\sqrt{|\lambda|}} > e^{\varepsilon_0 \sqrt{|\lambda|}},$$

поэтому из неравенства (3.16) следует оценка:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon_0 \sqrt{|\lambda|}} d_\lambda \theta(x, x; \lambda) < \frac{\varepsilon}{4} \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} [g_\varepsilon(s - x, 0) + \chi_\varepsilon(x, s; 0)]^2 ds +$$

$$+ \int_{-1}^{0} e^{\varepsilon_0 \sqrt{|\lambda|}} d_\lambda \theta(x, x; \lambda). \quad (3.17)$$

Оценка (3.17) и теорема 1.1 доказывают лемму при $x = y$. Случай $x \neq y$ сводится к случаю $x = y$ при помощи неравенства (3.14). Таким образом, лемма доказана полностью.

6. Положим

$$H(x, y; a, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{0} \psi_\varepsilon^2 (\sqrt{\lambda}, a) d_\lambda \theta(x, y; \lambda). \quad (3.18)$$

Из формулы

$$\psi_\varepsilon(\lambda, a) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} (2\varepsilon - |t|) \cos \sqrt{\lambda} t . \cos at \, dt$$

для $\lambda < 0$ следует оценка (a — действительное число):

$$\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a) \leqslant 8 \operatorname{ch} 2 \sqrt{|\lambda|} . \varepsilon,$$

поэтому

$$H(x, y; a, \varepsilon) < 64 \int_{-\infty}^{0} \operatorname{ch}^2 2 \sqrt{|\lambda|} \varepsilon |d_\lambda \theta(x, y; \lambda)|.$$

Из этой оценки и предыдущей леммы непосредственно следует

ЛЕММА 3.2. *Если коэффициент $q(x)$ в уравнении (1.1) суммируем в каждом конечном интервале и если (x_0, x_1) — произвольный конечный интервал действительной оси и ε_0 — произвольное положительное число, то существует константа $C = C(x_0, x_1; \delta_0)$, не зависящая от a, такая, что для $x, y \in (x_0, x_1)$ и $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ выполняется неравенство:*

$$|H(x, y; a, \varepsilon)| < C. \tag{3.19}$$

7. Равенство (3.11) можно записать в виде

$$\int\limits_0^\infty \psi_\varepsilon^2(\sqrt{\lambda}, a)\, d_\lambda \theta(x, y; \lambda) =$$

$$= \int\limits_{\Delta_{xy}} \{g_\varepsilon(s-x, a) + \chi_\varepsilon(x, s; a)\}\{g_\varepsilon(s-y, a) + \chi_\varepsilon(y, s; a)\} ds - H(x, y; a, \varepsilon), \tag{3.20}$$

где функция $H(x, y; a, \varepsilon)$ определяется по формуле (3.18).

Положим для $\lambda > 0$ $\lambda = \mu^2$, $\theta(x, y; \lambda) = \theta(x, y; \mu^2) = \theta_1(x, y; \mu)$ и продолжим при фиксированных x и y функцию $\theta_1(x, y; \mu)$ на отрицательную полуось нечетно. Формула (3.20) примет вид:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \psi_\varepsilon^2(\mu, a)\, d_\mu \theta_1(x, y; \mu) = 2 \int\limits_{\Delta_{xy}} \{g_\varepsilon(s-x, a) + \chi_\varepsilon(x, s; a)\} \cdot$$

$$\cdot \{g_\varepsilon(s-y, a) + \chi_\varepsilon(y, s; a)\} ds - 2H(x, y; a, \varepsilon). \tag{3.20'}$$

В частности, при $x = y$ получим:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \psi_\varepsilon^2(\mu, a)\, d_\mu \theta_1(x, x; \mu) =$$

$$= 2 \int\limits_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} \{g_\varepsilon(s-x, a) + \chi_\varepsilon(x, s; a)\}^2 ds - 2H(x, x; a, \varepsilon). \tag{3.21}$$

ЛЕММА 3.3. *Если коэффициент $q(x)$ уравнения (1.1) суммируем в каждом конечном интервале и (x_0, x_1) — произвольный конечный интервал действительной оси, то существует константа $C = C(x_0, x_1)$ такая, что для $x, y \in (x_0, x_1)$ выполняется неравенство:*

$$\sup_{-\infty < \mu < \infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{\theta_1(x, y; \mu)\} < C. \tag{3.22}$$

Доказательство. Положим в формуле (3.21) $\varepsilon = 1$. Мы получим:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \left[\frac{\sin^2(\mu+a)}{(\mu+a)^2} + \frac{\sin^2(\mu-a)}{(\mu-a)}\right]^2 d_\mu \theta_1(x, x; \mu) =$$

$$= 2 \int\limits_{x-2}^{x+2} \{g_1(s-x, a) + \chi_1(x, s; a)\}^2 ds - 2H(x, x; a, 1). \tag{3.23}$$

В силу теоремы 1.1 и леммы 3.2, существует такая константа $C = C(x_0, x_1)$, что если $x \in (x_0, x_1)$, то правая часть равенства (3.23) не превосходит C. Таким образом, из равенства (3.23) следует оценка:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin^4(\mu-a)}{(\mu-a)^4}\, d_\mu \theta_1(x, x; \mu) < C,$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \mu}{\mu^4} d_\mu \theta_1 (x, x; \mu + a) < C$$

и, значит, тем более,

$$\int_{0}^{1} \frac{\sin^4 \mu}{\mu^4} d_\mu \theta_1 (x, x; \mu + a) < C. \tag{3.24}$$

Как известно, для $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\frac{\sin \mu}{\mu} \geqslant \frac{2}{\pi}$. Поэтому

$$\int_{0}^{1} \frac{\sin^4 \mu}{\mu^4} d_\mu \theta_1 (x, x; \mu + a) \geqslant \frac{16}{\pi^4} [\theta_1 (x, x; a + 1) - \theta_1(x, x; a)]. \tag{3.25}$$

Неравенства (3.24) и (3.25) доказывают лемму при $x = y$. Случай $x \neq y$ при помощи оценки (3.14) сводится к случаю $x = y$.

8. Возвратимся к общей формуле (3.7). Пусть $f(s) \in L_2(-\infty, \infty)$. Учитывая формулы (3.2), мы получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda})\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \theta(x, s; \lambda)\, ds =$$

$$= \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\, g_\varepsilon (x - s)\, ds + \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\, \chi_\varepsilon (x, s)\, ds. \tag{3.26}$$

Так как функция $f(s)$ произвольна, то из последней формулы следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda})\, d_\lambda \theta (x, s; \lambda) = \begin{cases} g_\varepsilon (x - s) + \chi_\varepsilon (x, s), & |x - s| \leqslant 2\varepsilon, \\ 0, & |x - s| > 2\varepsilon. \end{cases} \tag{3.27}$$

Сходимость интеграла слева следует из лемм 3.1 и 3.2, а также из оценки (3.5).

Формулу (3.26) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon (\mu)\, d_\mu S_1 (x, \mu) = 2 \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\, g_\varepsilon (x - s)\, ds + 2 \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\, \chi_\varepsilon (x, s)\, ds -$$

$$- 2 \int_{-\infty}^{0} \psi_\varepsilon \sqrt{\lambda})\, d_\lambda \dot{S} (x, \lambda), \tag{3.28}$$

где положено

$$S (x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \theta (x, s; \lambda)\, ds, \quad S_1 (x, \mu) = S (x, \mu^2), \quad \mu > 0,$$

$$S_1 (x, \mu) = - S_1 (x, -\mu), \quad \mu < 0.$$

Аналогично, формулу (3.27) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon (\mu)\, d_\mu \theta_1 (x, s; \mu) =$$

$$= \begin{cases} 2g_\varepsilon (x - s) + 2\chi_\varepsilon (x, s) - 2 \int_{-\infty}^{0} \psi_\varepsilon \sqrt{\lambda})\, d_\lambda\, \theta (, s; \lambda), & |x - s| \leqslant 2\varepsilon, \\ - 2 \int_{-\infty}^{0} \psi_\varepsilon (\sqrt{\lambda})\, d_\lambda \theta (x, s; \lambda), & |x - s| > 2\varepsilon. \end{cases} \tag{3.29}$$

Заменяя в формулах (3.28) и (3.29) функцию $g_\varepsilon(t)$ на $g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t)\cos at$, мы получим формулы:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{\psi_\varepsilon(\mu+a)+\psi_\varepsilon(\mu-a)\}d_\mu S_1(x,\mu) = 2\int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\,g_\varepsilon(x-s,\ a)\,ds + $$
$$+2\int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\,\chi_\varepsilon(x,\ s;\ a)\,ds - 2\int_{-\infty}^{0}\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda},\ a)\,d_\lambda S(x,\lambda), \tag{3.30}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{\psi_\varepsilon(\mu+a)+\psi_\varepsilon(\mu-a)\}\,d_\mu\theta_1(x,\ s;\ \mu) =$$
$$=\begin{cases} 2g_\varepsilon(x-s)+2\chi_\varepsilon(x,\ s;\ a)-2\int_{-\infty}^{0}\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda},\ a)\,d_\varepsilon\theta(x,\ s;\ \lambda), & |x-s|\leqslant 2\varepsilon,\\ -2\int_{-\infty}^{0}\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda},\ a)\,d_\lambda\theta(x,\ s;\ \lambda), & |x-s|>2\varepsilon. \end{cases} \tag{3.31}$$

Так как функции $S_1(x, \mu)$ и $\theta_1(x, s; \mu)$ нечетны, а функция $\psi_\varepsilon(\mu)$ четна, то формулам (3.30) и (3.31) можно придать вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu S_1(x,\ \mu) = 2\int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\,g_\varepsilon(x-s,a)\,ds +$$
$$+2\int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\,\chi_\varepsilon(x,\ s;\ a)\,ds - 2\int_{-\infty}^{0}\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda},\ a)\,d_\lambda S(x,\ \lambda), \tag{3.30'}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu\theta_1(x,\ s;\ \mu) =$$
$$=\begin{cases} 2g_\varepsilon(x-s;\ a)+2\chi_\varepsilon(x,\ s;a)-2\int_{-\infty}^{0}\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda},a)\,d_\lambda\theta(x,s;\lambda), & |x-s|\leqslant 2\varepsilon,\\ -2\int_{-\infty}^{0}\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda},\ a)\,d_\lambda\theta(x,\ s;\ \lambda), & |x-s|>2\varepsilon. \end{cases} \tag{3.31'}$$

Если в уравнении (1.1) $q(x)\equiv 0$, то $w(x,\ t,\ s)\equiv 0$ и, следовательно, $\chi_\varepsilon(x,\ s;\ a)\equiv 0$. Поэтому формулы (3.30′) и (3.31′) принимают вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu S_1^*(x,\ \mu) = 2\int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\,g_\varepsilon(x-s,\ a)\,ds, \tag{3.32}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu\theta_1^*(x,\ s;\ \mu) = \begin{cases} 2g_\varepsilon(x-s,a), & |x-s|\leqslant 2\varepsilon,\\ 0, & |x-s|>2\varepsilon, \end{cases} \tag{3.33}$$

где положено

$$\theta_1^*(x,\ s;\ \mu) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\mu(x-s)}{x-s}, \qquad S_1^*(x,\ \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\theta_1^*(x,\ s;\ \mu)\,ds.$$

Вычитая из равенства (3.30′) равенство (3.32), получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu R(x,\ \mu;\ f) = 2\int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\,\chi_\varepsilon(x,\ s;\ a) -$$
$$-2\int_{-\infty}^{0}\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda},\ a)\,d_\lambda S(x,\ \lambda), \tag{3.34}$$

причем

$$R(x, \mu; f) = S_1(x, \mu) - S_1^*(x, \mu).$$

Вычитая из равенства (3.31′) равенство (3.33), мы получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \Phi(x, s; \mu) =$$

$$= \begin{cases} 2\chi_\varepsilon(x, s; a) - 2\int_{-\infty}^{0} \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a)\, d_\lambda\, \theta(x, s; \lambda), & |x - s| \leqslant 2\varepsilon, \\ -2\int_{-\infty}^{0} \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a)\, d_\lambda \theta(x, s; \lambda), & |x - s| > 2\varepsilon, \end{cases} \tag{3.35}$$

причем

$$\Phi(x, s; \mu) = \theta_1(x, s; \mu) - \theta_1^*(x, s; \mu).$$

Формулы (3.34) и (3.35) играют в дальнейшем фундаментальную роль. В случае, если уравнение (1.1) не имеет отрицательного спектра, то формулы (3.34) и (3.35) упрощаются и принимают вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu R(x, \mu; f) = 2\int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\, \chi_\varepsilon(x, s; a)\, ds, \tag{3.36}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \Phi(x, s; \mu) = \begin{cases} 2\chi_\varepsilon(x, s; a), & |x - s| \leqslant 2\varepsilon, \\ 0, & |x - s| > 2\varepsilon. \end{cases} \tag{3.37}$$

§ 4. Вывод вспомогательных формул и предварительная оценка спектральной функции. Случай полупрямой

1. В настоящем параграфе мы распространим леммы 3.1, 3.2 и 3.3 на случай полупрямой $(0, \infty)$. Кроме этого, мы перенесем на случай полупрямой формулы (3.34) и (3.35).

Обозначим через $\omega_h(x, \lambda)$ решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям (1.2).

Как известно [см., например, ([6])], существует монотонная, ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$ такая, что для любых двух функций $f(x)$, $g(x) \in L_2(0, \infty)$ справедливо равенство Парсеваля:

$$\int_0^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) G(\lambda)\, d\rho(\lambda), \tag{4.1}$$

где

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\, \omega_h(x, \lambda)\, dx, \quad G(\lambda) = \int_0^{\infty} g(x)\, \omega_h(x, \lambda)\, dx. \tag{4.2}$$

Функцию $F(\lambda)$ (соответственно $G(\lambda)$) мы будем в дальнейшем называть обобщенным преобразованием Фурье функции $f(x)$ (соответственно $g(x)$) в отличие от обычного преобразования Фурье по косинусам, которое получается при $q(x) = 0$ и $h = 0$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ обращаются в нуль вне некоторого конечного интервала, то интегралы в формулах (4.2) существуют в обыч-

ном смысле. В противном случае равенства (4.2) следует понимать в среднем квадратичном [см. ([6])].

Выберем произвольное положительное число x и рассмотрим произведение $\omega_h(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}t$ $(t>0)$. Если $t\leqslant x$, то можно пользоваться формулой (1.3). Пусть $\varepsilon<\frac{x}{2}$ и $g_\varepsilon(t, a)$ выбрана так же, как и в предыдущем параграфе. Помножим обе части формулы (1.3) на $g_\varepsilon(t, a)$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до 2ε. Мы получим:

$$\omega_h(x, \lambda)\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a)=\int\limits_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon}\omega_h(s, \lambda)\{g_\varepsilon(s-x, a)+\chi_\varepsilon(x, s; a)\}\,ds, \quad (4.3)$$

где

$$\chi_\varepsilon(x, s; a)\doteq\int\limits_{|x-s|}^{2\varepsilon}w(x, t, s)\,g_\varepsilon(t, a)\,dt. \quad (4.4)$$

2. Чтобы получить формулу для $\omega_h(x, \lambda)\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a)$ в случае, когда $x<2\varepsilon$, следует использовать формулу (2.8).

Рассмотрим при фиксированном x интеграл

$$\int\limits_0^{2\varepsilon}\omega_h(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}t\; g_\varepsilon(t, a)\,dt=\frac{1}{2}\omega_h(x, \lambda)\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a).$$

Если $t<x$, то можно пользоваться формулой (1.3). Если же $t>x$, то формула (1.3) не применима и следует пользоваться формулой (2.8). Таким образом,

$$\frac{1}{2}\omega_h(x, \lambda)\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a)=\int\limits_0^x\Big\{\frac{1}{2}[\omega_h(x+t, \lambda)+\omega_h(x-t, \lambda)]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}w(x, t, s)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds\Big\}g_\varepsilon(t, a)\,dt+$$
$$+\int\limits_x^{2\varepsilon}\Big\{\frac{1}{2}[\omega_h(x+t, \lambda)+\omega_h(t-x, \lambda)+\frac{1}{2}h\int\limits_0^{t-x}\omega_h(s, \lambda)\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+x}w^*(x, t, s)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds\Big\}g_\varepsilon(t, a)\,dt.$$

Заменяя переменные интегрирования и меняя порядок интегрирования, мы получим формулу:

$$\frac{1}{2}\omega_h(x, \lambda)\psi_\varepsilon(\lambda, a)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}g_\varepsilon(s-x, a)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\chi_\varepsilon(x, s; a)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{2x}^{2\varepsilon+x}g_\varepsilon(s-x, a)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\varepsilon-x}g_\varepsilon(s+x, a)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}h\int\limits_0^{2\varepsilon-x}\omega_h(s,\lambda)\,ds\int\limits_{s+x}^{2\varepsilon}g_\varepsilon(t,a)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\omega_h(s,\lambda)\,ds\int\limits_x^{2\varepsilon}w^*(x,t,s)\,g_\varepsilon(t,a)\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{2x}^{2\varepsilon+x}\omega_h(s, \lambda)\,ds\int\limits_{s-x}^{2\varepsilon}w^*(x, t, s)\,g_\varepsilon(t, a)\,dt, \quad (4.5)$$

причем функция $\chi_\varepsilon(x, s; a)$ определяется по формуле (4.4).

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_\varepsilon(x, s; a) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g_\varepsilon(s-x, a) + g_\varepsilon(s+x, a)], & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant 2\varepsilon - x, \\ \frac{1}{2} g_\varepsilon(s-x, a), & \text{если } 2\varepsilon - x \leqslant s \leqslant 2\varepsilon + x, \\ 0 & \text{для других } s; \end{cases}$$

$$\mu_\varepsilon(x, s; a) = \begin{cases} \frac{h}{2}\int\limits_{s+x}^{2\varepsilon} g_\varepsilon(t, a)\,dt, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant 2\varepsilon - x, \\ 0 & \text{для других } s; \end{cases}$$

$$\nu_\varepsilon(x, s; a) = \begin{cases} \frac{1}{2}\chi_\varepsilon(x, s; a) + \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{2\varepsilon} w^*(x, t, s)\, g_\varepsilon(t, a)\,dt, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant 2x, \\ \frac{1}{2}\int\limits_{s-x}^{2\varepsilon} w^*(x, t, s)\, g_\varepsilon(t, a)\, gt, & \text{если } 2x \leqslant s \leqslant 2\varepsilon + x, \\ 0 & \text{для других } s. \end{cases}$$

Далее, положим

$$\pi_\varepsilon(x, s; a) = \lambda_\varepsilon(x, s; a) + \mu_\varepsilon(x, s; a) + \nu_\varepsilon(x, s; a).$$

В этих обозначениях формула (4.5) принимает вид:

$$\frac{1}{2}\omega_h(x, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a) = \int\limits_0^{2\varepsilon+x} \pi_\varepsilon(x, s; a)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds. \tag{4.6}$$

Формула (4.6) показывает, что $\omega_h(x, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a)$ есть преобразование Фурье (по собственным функциям $\omega_h(s, \lambda)$) функции $2\pi_\varepsilon(x, s; a)$.

Формулы (4.3) и (4.6) позволяют перенести леммы 3.1, 3.2 и 3.3 на случай полупрямой.

3. Перенесем теперь на случай полупрямой формулы (3.34) и (3.35).

Пусть $f(s) \in L_2(0, \infty)$. Обозначим через $F(\lambda)$ обобщенное преобразование Фурье функции $f(s)$, т. е. положим $F(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(s)\,\omega_h(s, \lambda)\,ds$.

Если $x \geqslant 2\varepsilon$, то из формулы (4.3) и равенства Парсеваля следует

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a) + \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)\}\,\omega_h(x, \lambda)\,F(\lambda)\,d\rho(\lambda) =$$

$$= \int\limits_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\{g_\varepsilon(x-s, a) + \chi_\varepsilon(x, s; a)\}\,ds. \tag{4.7}$$

Введем в рассмотрение спектральную функцию уравнения (1.1) в случае полупрямой:

$$\theta(x, y; \lambda) = \begin{cases} \int\limits_0^\lambda \omega_h(x, \lambda)\,\omega_h(y, \lambda)\,d\rho(\lambda), & \lambda > 0, \\ -\int\limits_0^\lambda \omega_h(x, \lambda)\,\omega_h(y, \lambda)\,d\rho(\lambda), & \lambda < 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Положим

$$S(x, \lambda) = \int\limits_0^\infty f(s)\,\theta(x, s; \lambda)\,ds.$$

Тогда формула (4.7) принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)\}\, d_\lambda S(x, \lambda) =$$
$$= 2\int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\{g_\varepsilon(x-s, a)+\chi_\varepsilon(x, s; a)\}\, ds. \tag{4.7'}$$

В силу произвольности функции $f(s)$, из последней формулы следует формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)\}\, d_\lambda \theta(x, s; \lambda) =$$
$$= \begin{cases} 2g_\varepsilon(x-s, a)+2\chi_\varepsilon(x,s;a), & |x-s|\leqslant 2\varepsilon, \\ 0, & |x-s|>2\varepsilon. \end{cases} \tag{4.8}$$

4. Если $x<2\varepsilon$, то следует пользоваться формулой (4.6). Учитывая вид функции $\pi_\varepsilon(x, s; a)$, мы получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)\}\, d_\lambda S(x, \lambda) =$$
$$= 2\int_{0}^{2\varepsilon-x} f(s)\{g_\varepsilon(x-s, a)+g_\varepsilon(x+s, a)\}\, ds +$$
$$+ 2\int_{2\varepsilon-x}^{2\varepsilon+x} f(s)\, g_\varepsilon(x-s, a)\, ds + h\int_{0}^{2\varepsilon-x} f(s)\, ds \int_{s+x}^{2\varepsilon} g_\varepsilon(t, a)\, dt +$$
$$+ 2\int_{0}^{2\varepsilon+x} f(s)\, \nu_\varepsilon(x, s; a)\, ds. \tag{4.9}$$

В силу произвольности функции $f(s)$, из последней формулы следует $(x<2\varepsilon)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)+\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)\}\, d_\lambda \theta(x, s; \lambda) =$$
$$= \begin{cases} 2g_\varepsilon(x-s, a)+2g_\varepsilon(x+s, a)+h\int_{s+x}^{2\varepsilon} g_\varepsilon(t, a)\, dt+2\nu_\varepsilon(x, s; a), & 0\leqslant s\leqslant 2\varepsilon-x, \\ 2g_\varepsilon(s-x, a)+2\nu_\varepsilon(x, s; a), & 2\varepsilon-x\leqslant s\leqslant 2\varepsilon+x, \\ 0, & s>2\varepsilon+x. \end{cases} \tag{4.10}$$

5. Если $q(x)\equiv 0$, то $w(x, t, s)\equiv 0$, $\chi_\varepsilon(x, s; a)\equiv 0$, $\nu_\varepsilon(x, s; a)\equiv 0$. Обозначим через $\theta^*(x, s; \lambda)$ спектральную функцию уравнения

$$y''+\lambda y=0$$

с граничным условием

$$y'(0)-hy(0)=0 \tag{4.11}$$

и тем же числом h, что и в условии (1.2).

Функция $\theta^*(x, s; \lambda)$ вычисляется в явном виде [см. ([6]), стр. 79].

Положим

$$S^*(x, \lambda) = \int_0^\infty f(s)\, d_\lambda \theta^*(x, s; \lambda),$$

$$R(x, \lambda; f) = S(x, \lambda) - S^*(x, \lambda),$$

$$\Phi(x, s; \lambda) = \theta(x, s; \lambda) - \theta^*(x, s; \lambda).$$

Выписывая для функций $S^*(x, \lambda)$ и $\theta^*(x, s; \lambda)$ формулы, аналогичные формулам (4.7), (4.9), (4.8) и (4.10), и вычитая их из упомянутых формул, мы получим следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a) + \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)\}\, dR(x, \lambda; f) =$$

$$= \begin{cases} 2\int\limits_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\, \chi_\varepsilon(x, s; a)\, ds, & x \geqslant 2\varepsilon \\ 2\int\limits_{0}^{2\varepsilon+x} f(s)\, \nu_\varepsilon(x, s; a)\, ds, & x < 2\varepsilon, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a) + \psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)\}\, d_\lambda \Phi(x, s; \lambda) =$$

$$= \begin{cases} 2\chi_\varepsilon(x, s; a), & x \geqslant 2\varepsilon, \quad |x-s| \leqslant 2\varepsilon, \\ 0, & x \geqslant 2\varepsilon, \quad |x-s| \geqslant 2\varepsilon, \\ 2\nu_\varepsilon(x, s; a), & x < 2\varepsilon, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\varepsilon + x, \\ 0, & x < 2\varepsilon, \quad s > 2\varepsilon + x. \end{cases} \tag{4.13}$$

Так как функция $\nu_\varepsilon(x, s; a)$ подчиняется такой же оценке, что и функция $\chi_\varepsilon(x, s; a)$ (см. теорему 2.2), то из формул (4.12) и (4.13) следует, что при изучении асимптотического поведения спектральной функции уравнения (1.1) нет существенной разницы между случаем всей прямой и случаем полупрямой, если только в случае полупрямой в качестве простейшей спектральной функции брать спектральную функцию задачи (1.1) — (4.11) с тем же h, что и в условии (1.2). Более того, ввиду локального характера правых частей формул (4.12) и (4.13) наши результаты легко переносятся на тот случай, когда уравнение (1.1) задано в конечном интервале (a, b). При этом функция $q(x)$ в окрестности точек a и b может быть несуммируемой функцией.

Поэтому в дальнейшем мы ограничимся изучением случая всей прямой, так как этот случай несколько проще. Все полученные в дальнейшем теоремы легко переносятся на случай полупрямой и на случай конечного интервала.

§ 5. Асимптотическое поведение спектральной функции

1. В настоящем параграфе мы изучим асимптотическое поведение спектральной функции уравнения (1.1).

Начиная с этого параграфа, мы наложим на функцию $g_\varepsilon(t)$ более жесткие условия, чем это было сделано прежде. А именно, мы будем предполагать, что функция $g_\varepsilon(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $g_\varepsilon(-t) = g_\varepsilon(t)$;
2) $g_\varepsilon(t) = 1$, если $|t| \leqslant \varepsilon$;
3) $g_\varepsilon(t) = 0$, если $|t| \geqslant 2\varepsilon$;
4) $g_\varepsilon(t)$ ограничена равномерно по ε и t;
5) $g_\varepsilon(t)$ имеет непрерывную четвертую производную.

Обозначим через a произвольное действительное число и положим

$$g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t)\cdot\cos at, \quad \psi_\varepsilon(\mu) = \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} g_\varepsilon(t)\cos\mu\, dt,$$

$$\psi_\varepsilon(\mu, a) = \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} g_\varepsilon(t, a)\cos\mu t\, dt = \frac{1}{2}\{\psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a)\}.$$

ЛЕММА 5.1. *Предположим, что коэффициент $q(x)$ в уравнении* (1.1) *есть суммируемая функция в каждом конечном интервале. Обозначим через (x_0, x_1) произвольный конечный интервал. Существует константа $C = C(x_0, x_1)$ такая, что если $x, s \in (x_0, x_1)$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$, то имеет место оценка*

$$\int_{-\infty}^{0} |\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a)|\,|d_\lambda \theta(x, s; \lambda)| < C\varepsilon. \tag{5.1}$$

Доказательство. Так как

$$|\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a)| = O\left(\int_0^{2\varepsilon} \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt\right) = O\left(\varepsilon e^{2\sqrt{|\lambda|}\,\varepsilon}\right),$$

то оценка (5.1) следует непосредственно из леммы 3.1.

2. Для $\lambda > 0$ положим: $\lambda = \mu^2$, $\theta(x, s, \lambda) = \theta_1(x, s; \mu)$. Далее, положим (определение функции $\Phi(x, s; \mu)$ см. в § 3)

$$I_\varepsilon(x, s; a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu \Phi(x, s; \mu),$$

$$I_\varepsilon^{(1)}(x, s, \mu) = \int_0^{\mu} I_\varepsilon(x, s; a)\, da,$$

$$\sigma_\varepsilon(x, s, \mu) = \Phi(x, s; \mu) - I_\varepsilon^{(1)}(x, s; \mu).$$

При фиксированных x, s и ε функция $I_\varepsilon(x, s; a)$ четна и, следовательно, функция $I_\varepsilon^{(1)}(x, s; \mu)$ нечетна. Из леммы 1.2 (следствие 3) работы ([1]) следует, что преобразования Бохнера-Стильтьеса функций $\Phi(x, s; \mu)$ и $I_\varepsilon^{(1)}(x, s; \mu)$ в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 2-эквивалентны. Поэтому преобразование Бохнера-Стильтьеса функции $\sigma_\varepsilon(x, s; \mu)$ в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 2-эквивалентно нулю. Далее, мы имеем:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\{\Phi(x, s; \mu) - \sigma_\varepsilon(x, s; \mu)\} = \int_{\mu}^{\mu+1} |I_\varepsilon(x, s; a)|\, da.$$

Из этого равенства и предыдущей леммы легко получить следующую важную лемму:

ЛЕММА 5.2. *Пусть коэффициент $q(x)$ в уравнении* (1.1) *есть суммируемая функция в каждом конечном интервале. Обозначим через*

(x_0, x_1) произвольный конечный интервал действительной оси. Существует константа $C = C(x_0, x_1)$ такая, что если $x, s \in (x_0, x_1)$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$, то

$$\mathop{V}_{\mu}^{\mu+1} \{\Phi(x, s; \mu) - \sigma_\varepsilon(x, s; \mu)\} < C\varepsilon. \tag{5.2}$$

Доказательство. В силу формулы (3.35),

$$\int_{\mu}^{\mu+1} |I_\varepsilon(x, s; a)|\, da < \frac{1}{\pi} \sup_{a} |\chi_\varepsilon(x, s; a)| +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sup_{a} \int_{-\infty}^{0} |\psi_\varepsilon(\sqrt{\lambda}, a)|\, |d_\lambda \theta(x, s; \lambda)|. \tag{5.3}$$

Далее, в силу теоремы 1.1, существует константа $C = C(x_0, x_1)$ такая, что если $0 \leqslant t \leqslant 1$, то

$$|w(x, t, s)| < C.$$

Поэтому

$$|\chi_\varepsilon(x, s; a)| \leqslant C \int_{|x-s|}^{2\varepsilon} |g_\varepsilon(t, a)|\, dt < C\varepsilon.$$

Из последней оценки и оценки (5.3), а также из предыдущей леммы оценка (5.2) следует непосредственно. Из доказанной леммы и теоремы 3.2 работы ([1]) непосредственно следует

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть коэффициент $q(x)$ есть суммируемая функция в каждом конечном интервале. Обозначим через (x_0, x_1) произвольный конечный интервал. Существуют константы $C_1 = C_1(x_0, x_1)$ и $C_2 = C_2(x_0, x_1)$ такие, что если $x, s \in (x_0, x_1)$, то*

$$\left|\int_0^{\mu} \Phi(x, s; \nu)\, d\nu\right| < C_1 |\mu| + C_2.$$

3. Более точную асимптотическую формулу для спектральной функции уравнения (1.1) можно получить, накладывая дальнейшие ограничения на коэффициент $q(x)$.

ЛЕММА 5.3 *Пусть коэффициент $q(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *для любого конечного интервала (x_0, x_1) можно указать положительные числа $\alpha = \alpha(x_0, x_1)$ и $C = C(x_0, x_1)$ такие, что если $x \in (x_0, x_1)$, $0 < t \leqslant 1$, то*

$$\int_{x-t}^{x+t} |q(s)|\, ds < Ct^{\alpha}.$$

2) *Уравнение* (1.1) *не имеет отрицательного спектра. При выполнении этих условий можно указать константу $C_1 = C_1(x_0, x_1)$ такую, что для $0 < \varepsilon \leqslant 1$ выполняется неравенство*

$$\mathop{V}_{\mu}^{\mu+1} \{\Phi(x, s; \mu) - \sigma_\varepsilon(x, s; \mu)\} < C_1 \varepsilon^{1+\alpha}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Из формулы (3.35) и определения функции

$\sigma_\varepsilon(x,\ s;\ \mu)$ следует оценка

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\{\Phi(x,\ s;\ \mu)-\sigma_\varepsilon(x,\ s;\ \mu)\}=\int_\mu^{\mu+1}|I_\varepsilon(x,\ s;\ a)|\,da\leqslant\frac{1}{\pi}\sup_a|\chi_\varepsilon(x,\ s;\ a)|.$$

С другой стороны, в силу теоремы 1.2, существует константа $C=C(x_0,\ x_1)$ такая, что

$$|w(x,\ t,\ s)|<C\cdot t^\alpha.$$

Поэтому

$$|\chi_\varepsilon(x,\ s;\ a)|<C\varepsilon^{1+\alpha},$$

что и доказывает лемму.

Из последней леммы и теоремы 3.1 работы (¹) непосредственно следует

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть коэффициент $q(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы. Существует константа $C=C(x_0,\ x_1)$ такая, что если $x,s\in(x_0,\ x_1)$, то для всех μ выполняется оценка*

$$|\Phi(x,\ s;\ \mu)|<C.$$

§ 6. Вспомогательные аппроксимационные теоремы

В настоящем параграфе мы докажем две теоремы, которые являются развитием теоремы 3.1 работы (¹).

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть функция $\sigma(\mu)$ определена для всех действительных μ и удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\sigma(\mu)$ *нечетна;*

2) $$\sup_{-\infty<\mu<\infty}\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\{\sigma(\mu)\}<C_1<\infty. \qquad (6.1)$$

Предположим, далее, что для каждого положительного числа $\varepsilon\leqslant1$ можно указать функцию $\sigma_\varepsilon(\mu)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) *преобразование Бохнера-Стильтьеса функции $\sigma_\varepsilon(\mu)$ в интервале $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ линейно;*

2) $\sigma_\varepsilon(\mu)$ *нечетна и*

3) *справедлива оценка*

$$\sup_\mu\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\{\sigma(\mu)-\sigma_\varepsilon(\mu)\}<C_2\,\varepsilon^{1+\alpha}, \qquad (6.2)$$

где $0<\alpha<1$.

При выполнении этих условий для всех действительных μ имеет место оценка

$$\left|\int_0^\mu\sigma(\nu)\,d\nu\right|<C_3|\mu|^{1-\alpha}+C_4, \qquad (6.3)$$

причем

$$C_i=K\max(C_1,\ C_2)\quad(i=3,\ 4), \qquad (6.4)$$

где K — некоторая абсолютная постоянная величина.

Доказательство. Чтобы доказать настоящую теорему, следует лишь несколько уточнить рассуждение в доказательстве теоремы 3.1 работы (¹). Так же, как и в этой работе, положим

$$\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\quad\sigma_k(\mu)=\sigma_{\varepsilon_k}(\mu),$$

$$\tau_k(\mu)=\sigma_k(\mu)-\sigma_{k-1}(\mu)\quad(k=1,\ 2,\ \ldots),\quad(\tau_0(\mu)=\sigma_0(\mu)).$$

Из неравенства (6.2) непосредственно следует, что в каждой точке непрерывной функции $\sigma(\mu)$ имеет место равенство

$$\tau_0(\mu) + \tau_1(\mu) + \cdots = \lim_{k\to\infty} \sigma_k(\mu) = \sigma(\mu) + C, \tag{6.5}$$

где C — постоянная величина. Покажем, что в нашем случае $C = 0$. В самом деле, заменим в равенстве (6.6) μ на $-\mu$. Мы получим, в силу нечетности функций $\tau_k(\mu)$ и $\sigma(\mu)$:

$$-\tau_0(\mu) - \tau_1(\mu) - \cdots = -\sigma(\mu) + C. \tag{6.5'}$$

Складывая равенства (6.5) и (6.5'), мы получим $C = 0$. Итак,

$$\tau_0(\mu) + \tau_1(\mu) + \cdots = \sigma(\mu). \tag{6.6}$$

Из определения функции $\tau_k(\mu)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ следует, что преобразование Бохнера-Стильтьеса этой функции линейно в интервале $\left(-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right)$. Так как, по условию теоремы, функции $\tau_k(\mu)$ нечетны, то, как показано в нашей работе (1) (см. § 2, замечание 2, стр. 336), преобразование Бохнера для функции $\tau_k(\mu)$ в интервале $\left(-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right)$ также линейно. Поэтому из неравенства (2.3) работы (1), а также из неравенства [см. (1), стр. 338]

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \left\{\tau_k(\mu)\right\} < \frac{2C_2}{2^{k(1+\alpha)}}$$

следует неравенство

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} |\tau_k(\mu)| < \frac{C \cdot C_2}{2^{k\alpha}}.$$

Здесь C — некоторая абсолютная постоянная, а постоянная C_2 — та же, что и в неравенстве (6.2).

Интегрируя равенство (6.2) и проводя дальше оценки так же, как и при доказательстве теоремы 3.1 работы (1), мы получим, основываясь на оценках (6.1) и (6.7), оценку (6.3). Равенство (6.4) для констант C_3 и C_4 следует непосредственно из проведенных оценок.

Аналогичным образом, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 3.1 работы (1), можно доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть функция $\sigma(\mu)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Предположим, что, каково бы ни было положительное число $\varepsilon \leqslant 1$, можно указать функцию $\sigma_\varepsilon(\mu)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) *преобразование Бохнера-Стильтьеса функции $\sigma_\varepsilon(\mu)$ в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ линейно;*

2) *$\sigma_\varepsilon(\mu)$ нечетна и*

3) *справедлива оценка*

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \left\{\sigma(\mu) - \sigma_\varepsilon(\mu)\right\} < C_2\varepsilon^{2+\alpha},$$

где $\alpha \geqslant 0$.

Тогда, если $\alpha > 0$, *то для всех действительных* μ *имеет место оценка:*

$$\left| \int_0^\mu \sigma(\nu)\, d\nu \right| < C_5,$$

а если $\alpha = 0$, *то*

$$\left| \int_0^\mu \sigma(\nu) d\nu \right| < C_6 \ln|\mu| + C_7,$$

причем

$$C_i = K \max(C_1, C_2) \quad (i = 5, 6, 7),$$

где K — *абсолютная постоянная.*

§ 7. Асимптотическое поведение обобщенных интегралов Фурье

1. Пусть $\theta(x, s; \lambda)$ — спектральная функция уравнения (1.1) и $\theta^*(x, s; \lambda)$ — спектральная функция уравнения (1.1) при $q(x) \equiv 0$. Пусть $f(s) \in L_2(-\infty, \infty)$. Положим

$$S(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \theta(x, s; \lambda)\, ds.$$

$$S^*(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \theta^*(x, s; \lambda)\, ds.$$

Далее, положим для $\lambda > 0$:

$$\lambda = \mu^2, \quad \theta(x, s; \lambda) = \theta_1(x, s; \mu),$$

$$\theta^*(x, s; \lambda) = \theta_1^*(x, s; \mu), \quad S(x, \lambda) = S_1(x, \mu), \quad S^*(x, \lambda) = S_1^*(x, \mu),$$

$$R(x, \mu; f) = S_1(x, \mu) - S_1^*(x, \mu).$$

В случае, если уравнение (1.1) не имеет отрицательного спектра, функция $R(x, \mu; f)$ есть разность между обобщенным интегралом Фурье и обычным интегралом Фурье функции $f(x)$.

В настоящем параграфе изучается асимптотическое поведение функции $R(x, \mu; f)$ при фиксированном x и $\mu \to \infty$.

ЛЕММА 7.1. *Пусть коэффициент* $q(x)$ *есть суммируемая функция в каждом конечном интервале. Обозначим через* (x_0, x_1) *произвольный конечный интервал действительной оси. Существует положительная константа* $C = C(x_0, x_1)$ *такая, что если* $x \in (x_0, x_1)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$, *то справедлива оценка*

$$\left| \int_{-\infty}^{0} \psi_\varepsilon\left(\sqrt{\lambda} \pm a\right) d_\lambda S(x, \lambda) \right| < C\varepsilon \|f\|; \tag{7.1}$$

здесь

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

и $\psi_\varepsilon(\mu)$ *имеет то же значение, что и в* § 5.

Доказательство. Обозначим через $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ преобразования Фурье функции $f(s)$. Применяя сначала неравенство Коши-Буняковского, а затем равенство Парсеваля, мы получим, пользуясь леммой 5.1:

$$\left| \int_{-\infty}^{0} \psi_\varepsilon\left(\sqrt{\lambda} \pm a\right) F(\lambda)\, \varphi(x, \lambda)\, d\xi(\lambda) + [F(\lambda)\, \psi(x, \lambda) + G(\lambda)\, \varphi(x, \lambda)]\, d\eta(\lambda) + \right.$$

$$\left. + G(\lambda)\, \psi(x, \lambda)\, d\zeta(\lambda) \right| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{0} \psi_\varepsilon^2\left(\sqrt{\lambda} \pm a\right) \{\varphi^2(x, \lambda)\, d\xi(\lambda) + 2\varphi(x, \lambda)\, \psi(x, \lambda)\, d\eta(\lambda) + \right.$$

$$\left. + \psi^2(x, \lambda)\, d\zeta(\lambda)\}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\, d\xi(\lambda) + 2F(\lambda)\, G(\lambda)\, d\eta(\lambda) + G^2(\lambda)\, d\zeta(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\varepsilon \|f\|,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 7.2. *Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Обозначим через (x_0, x_1) произвольный конечный интервал действительной оси. Существует константа $C = C(x_0, x_1)$ такая, что если $x \in (x_0, x_1)$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$, то*

$$\left| \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\, \chi_\varepsilon(x, s; a)\, ds \right| < C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|f\|. \tag{7.2}$$

Доказательство. При доказательстве леммы 5.2 мы показали, что справедлива оценка

$$|\chi_\varepsilon(x, s; a)| < C\varepsilon.$$

Поэтому, применяя неравенство Коши-Буняковского, мы получим:

$$\left| \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\, \chi_\varepsilon(x, s; a)\, ds \right| < C\varepsilon \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} |f(s)|\, ds < C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|f\|,$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть функции $g_\varepsilon(t)$ и $\psi_\varepsilon(\mu)$ определены так же, как и в § 5. Положим

$$I_\varepsilon(x, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu - a)\, d_\mu R(x, \mu; f),$$

$$I_\varepsilon^{(1)}(x, \mu) = \int_0^\mu I_\varepsilon(x, a)\, da,$$

$$\sigma_\varepsilon(x, \mu) = R(x, \mu; f) - I_\varepsilon^{(1)}(x, \mu).$$

Так же, как и прежде, преобразование Бохнера-Стильтьеса функции $\sigma_\varepsilon(x, \mu)$ в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 2-эквивалентно нулю.

ЛЕММА 7.3. *Пусть коэффициент $q(x)$ суммируем в каждом конечном интервале. Обозначим через (x_0, x_1) произвольный конечный интервал. Существует константа $C = C(x_0, x_1)$ такая, что если $x \in (x_0, x_1)$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$, то*

$$\overset{2\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{R(x, \mu; f) - \sigma_\varepsilon(x, \mu)\} < C\varepsilon \|f\|. \tag{7.3}$$

Если уравнение (1.1) не имеет отрицательного спектра, то имеет место более точная оценка:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{R(x, \mu; f) - \sigma_\varepsilon(x, \mu)\} < C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|f\|. \tag{7.4}$$

Доказательство этой леммы следует непосредственно из предыдущих двух лемм и формулы (3.34) (см. также доказательство леммы 5.2).

3. В дальнейшем нам понадобится оценка величины

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{\sigma_\varepsilon(x, \mu)\},$$

которая дается в следующей лемме.

ЛЕММА 7.4. *Предположим, что коэффициент* $q(x)$ *в уравнении* (1.1) *суммируем в каждом конечном интервале. Обозначим через* (x_0, x_1) *произвольный конечный интервал действительной оси. Существует положительная константа* $C = C(x_0, x_1)$ *такая, что если* $x \in (x_0, x_1)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$, *то*

$$\sup_{-\infty\leqslant\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{\sigma_\varepsilon(x, \mu)\} < C\|f\|. \tag{7.5}$$

Доказательство. Так как $\sigma_\varepsilon(x, \mu) = R(x, \mu; f) - I_\varepsilon^{(1)}(x, \mu)$, то достаточно доказать оценку (7.5) для $R(x, \mu; f)$ и $I_\varepsilon^{(1)}(x, \mu)$. Для $I_\varepsilon^{(1)}(x, \mu)$ оценка (7.5) следует непосредственно из определения этой функции и оценки (7.3).

Докажем теперь оценку (7.5) для функции $R(x, \mu; f)$. Так как

$$R(x, \mu; f) = S_1(x, \mu) - S_1^*(x, \mu),$$

то достаточно доказать оценку (7.5) для каждой из функций $S_1(x, \mu)$ и $S_1^*(x, \mu)$. Рассмотрим $S_1(x, \mu)$ *.

Обозначим через (a, b) произвольный конечный интервал действительной оси. Рассмотрим в интервале (a, b) классическую задачу Штурма-Лиувилля, определяемую уравнением (1.1) и произвольными однородными граничными условиями в точках a и b. Обозначим через λ_n собственные значения и через $\omega_n(x) = \omega(x, \lambda_n)$ — нормированные собственные функции этой задачи. Далее, положим:

$$c_n = \int_a^b f(t)\,\omega_n(t)\,dt,$$

$$\theta(x, t; \lambda; a, b) = \sum_{\lambda_n<\lambda} \omega_n(x)\,\omega_n(t) \quad (\lambda > 0),$$

$$\theta_1(x, t; \mu; a, b) = \theta(x, t; \mu^2; a, b),$$

$$S_1(x, \mu; a, b; f) = \int_a^b f(t)\,\theta_1(x, t; \mu; a, b)\,dt = \sum_{\lambda_n<\mu^2} c_n\omega_n(x).$$

В силу неравенства Коши-Буняковского,

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{S_1(x, \mu; a, b; f)\} = \sum_{\mu^2\leqslant\lambda_n<(\mu+1)^2} |c_n\omega_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\mu^2\leqslant\lambda_n<(\mu+1)^2} \omega_n^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\| \{\theta_1(x, x; \mu+1; a, b) - \theta_1(x, x; \mu; a, b)\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7.6}$$

Из доказательства леммы 3.3 следует, что если интервал (x_0, x_1) целиком содержится внутри интервала (a, b), то найдется такая константа $C = C(x_0, x_2)$ (не зависящая от интервала (a, b)), что если $x \in (x_0, x_1)$,

* Для $S_1^*(x, \mu)$ оценку (7.5) можно получить непосредственно, ибо $S_1^*(x, \mu)$ легко выражается через обычное преобразование Фурье.

то справедливо неравенство:

$$\theta_1(x, x;\ \mu+1;\ a, b) - \theta_1(x, x;\ \mu;\ a, b) < C.$$

Поэтому из оценки (7.6) следует оценка:

$$\operatorname*{V}_{\mu}^{\mu+1}\{S_1(x, \mu;\ a, b;\ f)\} < C\|f\|. \tag{7.7}$$

Из результатов работы ([5]) следует, что при $a \to -\infty$ и $b \to \infty$

$$S_1(x, \mu;\ a, b;\ f) \to S_1(x, \mu)$$

в каждой точке непрерывности последней функции *. Поэтому из оценки (7.7) в пределе получаем оценку (7.5) для функции $S_1(x, \mu)$. В случае интервала $(0, \infty)$ результат получается проще.

В самом деле, в этом случае для $\lambda > 0$ имеем

$$S(x, \lambda) = \int_0^\lambda E(\nu)\,\omega_n(x, \nu)\,d\rho(\nu).$$

Полагая $\lambda = \mu^2$, мы получим:

$$S_1(x, \mu) = \int_0^{\mu^2} E(\nu)\,\omega_n(x, \nu)\,d\rho(\nu) = \int_0^{\mu} E(t^2)\,\omega_n(x, t^2)\,d\sigma(t).$$

Поэтому

$$\operatorname*{V}_{\mu}^{\mu+1}\{S_1(x, \mu)\} \leqslant \int_{\mu}^{\mu+1} |E(t^2)|\,|\omega_n(x, t^2)|\,d\sigma(t) \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\int_{\mu}^{\mu+1} E^2(t^2)\,d\sigma(t)\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_{\mu}^{\mu+1} \omega_n(x, t^2)\,d\sigma(t)\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|\{\theta_1(x, x;\ \mu+1) - (x, x;\ \mu)\}.$$

4. Основываясь на предыдущих леммах, докажем две теоремы, при помощи которых мы получим в следующем параграфе теоремы разложения по собственным функциям уравнения (1.1).

ТЕОРЕМА 7.1. *Предположим, что коэффициент $q(x)$ суммируем в каждом конечном интервале. Обозначим через (x_0, x_1) произвольный конечный интервал действительной оси. Существуют константы $C_1 = C_1(x_0, x_1)$ и $C_2 = C_2(x_0, x_1)$ такие, что если $x \in (x_0, x_1)$, то для всех μ справедлива оценка*

$$\left|\int_0^{\mu} R(x, \nu; f)\,d\nu\right| < (C_1|\mu| + C_2)\|f\|. \tag{7.8}$$

Доказательство. Из теоремы 3.2 работы ([1]) и леммы 7.3 следует, что справедлива оценка

$$\left|\int_0^{\mu} R(x, \nu; f)\,d\nu\right| < K_1|\mu| + K_2 \tag{7.9}$$

с некоторыми константами K_1 и K_2. Из доказательства упомянутой выше теоремы 3.2 работы ([1]) непосредственно следует, что константы в нера-

* Точнее, из множества функций $S_1(x, \mu;\ a, b;\ f)$ можно выбрать подпоследовательность, обладающую этим свойством. Заметим еще, что в работе ([5]) рассматриваются функции, равные нулю вне конечного интервала. Но, получив вначале неравенство (7.5) для функций, равных нулю вне конечного интервала, нетрудно затем распространить его на произвольные функции при помощи предельного перехода.

венстве (7.9) пропорциональны наибольшей из констант в неравенствах (7.3) и (7.5). Поэтому неравенство (7.8) доказано.

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *коэффициент $q(x)$ суммируем в каждом конечном интервале;*

2) *уравнение* (1.1) *не имеет отрицательного спектра.*

Обозначим через (x_0, x_1) произвольный конечный интервал действительной оси. Существует константа $C = C(x_0, x_1)$ такая, что если $x \in (x_0, x_1)$, то

$$|R(x, \mu; f)| < C\|f\|. \tag{7.10}$$

Доказательство следует непосредственно из оценки (7.4) и теоремы 3.1 работы ([1]) (см. также теорему 6.1).

§ 8. Доказательство теоремы разложения

1. Результаты § 5 и 7 позволяют полностью исследовать вопрос о разложении по собственным функциям уравнения (1.1).

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть коэффициент $q(x)$ удовлетворяет двум условиям леммы* 5.3. *Пусть $f(s) \in L_2(-\infty, \infty)$. Тогда равномерно в каждом конечном интервале*

$$\lim_{\mu\to\infty} R(x, \mu; f) = 0,$$

т. е. разность между обобщенным интегралом Фурье и обычным интегралом Фурье стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. Обозначим через A произвольное положительное число и положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |x| \leqslant A, \\ 0, & \text{если } |x| > A, \end{cases}$$

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

Тогда

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$R(x, \mu; f) = R(x, \mu; f_1) + R(x, \mu; f_2).$$

Выберем произвольное положительное число ε и подберем число A так, чтобы выполнялось неравенство $\|f_2\| < \varepsilon$, что возможно, ибо $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Из теоремы 7.2 следует оценка

$$|R(x, \mu; f)| < C\varepsilon, \tag{8.1}$$

причем постоянная C зависит от интервала изменения x и не зависит от μ.

Обозначим через η произвольное положительное число. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(x)$ обращается в нуль вне интервала $(-A, A)$;

2) $\varphi(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{-A}^{A} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \eta; \tag{8.2}$$

3) $\varphi(x)$ настолько регулярна, что для нее как обычный интеграл Фурье, так и обобщенный интеграл Фурье] сходится равномерно в каждом конечном интервале.

Мы имеем:

$$R(x, \mu; f_1) = R(x, \mu; f_1 - \varphi) + R(x, \mu; \varphi) = i_1 + i_2.$$

i_2 есть разность между обобщенным интегралом Фурье и обычным интегралом Фурье для функции $\varphi(x)$.

Так как оба эти интеграла сходятся к одному и тому же пределу, то при достаточно большом μ будет иметь место неравенство

$$|i_2| < \varepsilon. \tag{8.3}$$

Остается оценить i_1. В силу теоремы (5.2) и оценки (8.2),

$$|i_1| < \int_{-A}^{A} |f(s) - \varphi(s)|\, |\Phi(x, s; \mu)|\, ds < C_1\eta.$$

В последнем неравенстве константа C_1 зависит от интервала изменения точек x и s, и так как s меняется в интервале $(-A, A)$, то, значит, C_1 зависит от ε. Так как, однако, число η выбирается независимо от числа ε, то, выбрав ε, можно затем взять η настолько малым, что будет иметь место неравенство

$$|i_1| < \varepsilon. \tag{8.4}$$

Из (8.1), (8.3) и (8.4) следует оценка

$$|R(x, \mu; f)| < \varepsilon(2 + C),$$

что, в силу произвольности числа ε, доказывает теорему.

2. Аналогичным образом, опираясь на теоремы 5.1 и 7.1, можно доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 8.2. *Пусть коэффициент $q(x)$ в уравнении (1.1) есть суммируемая функция в каждом конечном интервале. Пусть $f(s) \in L_2(-\infty, \infty)$. Положим*

$$r(x, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\{\theta(x, s; \nu) - \theta(x, s, -\nu) - \theta^*(x, s, \nu)\}\, ds,$$

$$r_1(x, N) = \frac{1}{N}\int_0^N r(x, \nu)\, d\nu.$$

Тогда равномерно в каждом конечном интервале

$$\lim_{N\to\infty} r_1(x, N) = 0,$$

т. е. разность между средними арифметическими первого порядка обобщенного интеграла Фурье и обычного интеграла Фурье стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

§ 9. Суммирование разложений по собственным функциям

1. Если в уравнении (1.1) отрицательный спектр отсутствует, то можно оценить разность между средними арифметическими любого положительного порядка $\delta \leqslant 1$ обобщенного интеграла Фурье и обычного интеграла Фурье.

ЛЕММА 9.1. *Предположим, что коэффициент $q(x)$ удовлетворяет первому условию леммы 5.3. Обозначим через (x_0, x_1) произвольный конечный интервал действительной оси. Существует константа $C = C(x_0, x_1)$*

такая, что если $x \in (x_0, x_1)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$, *то*

$$\left| \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\, \chi_\varepsilon(x, s; a)\, ds \right| < C\varepsilon^{\frac{3}{2}+\alpha} \|f\|. \tag{9.1}$$

Доказательство. В силу теоремы 1.2, справедлива оценка

$$|w(x, t, s,| < C \cdot t^\alpha.$$

Следовательно,

$$|\chi_\varepsilon(x, s, a)| < C\varepsilon^{1+\alpha}.$$

Поэтому из неравенства Коши-Буняковского следует:

$$\left| \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} f(s)\, \chi_\varepsilon(x, s; a)\, ds \right| < C\varepsilon^{1+\alpha} \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} |f(s)|\, ds < C\varepsilon^{\frac{3}{2}+\alpha} \|f\|,$$

что и требовалось доказать.

Из предыдущей леммы и равенства (3.34) следует

ЛЕММА 9.2. *Пусть коэффициент* $q(x)$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *леммы* 5.3. *Пусть* $f(s) \in L_2(-\infty, \infty)$ *и функция* $R(x, \mu; f)$ *определена так же, как и в* § 7. *Каково бы ни было положительное число* $\varepsilon \leqslant 1$ *и фиксированное число* x, *можно указать функцию* $\sigma_\varepsilon(x, \mu; f)$, *преобразование Бохнера-Стильтьеса которой в интервале* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 2-*эквивалентно нулю и которая удовлетворяет неравенству*

$$\mathop{\mathrm{V}}_{\mu}^{\mu+1} \{R(x, \mu; f) - \sigma_\varepsilon(x, \mu; f)\} < C\varepsilon^{\frac{3}{2}+\alpha} \|f\|.$$

Константа C *в последнем неравенстве зависит от величины интервала изменения* x *и не зависит от* μ *и функции* $f(x)$.

Из леммы 9.2 и теорем 6.1 и 6.2 следует

ЛЕММА 9.3. *Пусть коэффициент* $q(x)$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *леммы* 5.3. *Пусть* $f(s) \in L_2(-\infty, \infty)$ *и функция* $R(x, \mu; f)$ *определена так же, как и в* § 7. *Существуют константы* $C_1 = C_1(x_0, x_1)$ *и* $C_2 = C_2(x_0, x_1)$ *такие, что если* $x \in (x_0, x_1)$, *то имеют место оценки:*

1) *если* $\alpha < \frac{1}{2}$, *то*

$$\left| \int_0^\mu R(x, \nu; f)\, d\nu \right| < [C_1 |\mu|^{\frac{1}{2}-\alpha} + C_2] \|f\|,$$

2) *если* $\alpha = \frac{1}{2}$, *то*

$$\left| \int_0^\mu R(x, \nu; f)\, d\nu \right| < [C_1 \ln|\mu| + C_2] \|f\|,$$

3) *если* $\alpha > \frac{1}{2}$, *то*

$$\left| \int_0^\mu R_1(x, \nu; f)\, d\nu \right| < C_1 \|f\|. \tag{9.2}$$

2. Выберем произвольное положительное число $\delta \leqslant 1$ и произвольное положительное число n и положим

$$R^{(\delta)}(x, n; f) = \int_0^n \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^\delta d_\mu R(x; \mu; f). \tag{9.3}$$

$R^{(\delta)}(x, n; f)$ есть разность между средними арифметическими порядка δ для обобщенного интеграла Фурье и для обычного интеграла Фурье функции $f(x)$.

Основываясь на предыдущей лемме, докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть коэффициент $q(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5.3. Тогда существует константа $C = C(x_0, x_1)$ такая, что для $x \in (x_0, x_1)$ имеют место оценки:*

1) *если* $\alpha < \frac{1}{2}$, *то*

$$|R^{(\delta)}(x, n; f)| < \frac{C\|f\|}{n^{\alpha+\delta-\frac{1}{2}}},$$

2) *если* $\alpha = \frac{1}{2}$, *то*

$$|R^{(\delta)}(x, n; f)| < \frac{C \cdot \|f\| \ln n}{n^{\delta}},$$

3) *если* $\alpha > \frac{1}{2}$, *то*

$$|R^{(\delta)}(x, n; f)| < \frac{C \cdot \|f\|}{n^{\delta}}. \tag{9.4}$$

В частности, если функция $q(x)$ ограничена в каждом конечном интервале, то в неравенстве (9.1) можно принять $\alpha = 1$ и, следовательно, имеет место неравенство (9.4), из которого, в частности, следует, что в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ среднее арифметическое любого порядка $\delta > 0$ обобщенного интеграла Фурье функции $f(x)$ сходится к значению функции.

Последний результат был ранее получен Титчмаршем [7].

Доказательство. Рассмотрим подробно случай $\alpha > \frac{1}{2}$. Интегрируя по частям, мы получим:

$$R^{(\delta)}(x, n; f) = \int_0^n \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{\delta} d_{\mu} R(x, \mu; f) =$$

$$= \frac{\delta}{n} \int_0^n \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{\delta-1} R(x, \mu; f)\, d\mu = \frac{\delta}{n} \int_0^{n-1} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{\delta-1} R(x, \mu; f)\, d\mu +$$

$$+ \frac{\delta}{n} \int_{n-1}^{n} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{\delta-1} R(x, \mu; f)\, d\mu = I_1 + I_2.$$

Из оценки (7.10) следует оценка

$$|I_2| < \frac{\delta}{n} C\|f\| \int_{n-1}^{n} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{\delta-1} d\mu = C\|f\| \frac{1}{n^{\delta}}. \tag{9.5}$$

Чтобы оценить I_1, интегрируем еще раз по частям. Мы получим:

$$I_1 = \frac{\delta}{n^{\delta}} \int_0^{n-1} R(x, \nu; f)\, d\nu +$$

$$+ \frac{\delta(\delta-1)}{n^2} \int_0^{n-1} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{\delta-2} \left\{\int_0^{\mu} R(x, \nu; f)\, d\nu\right\} d\mu = I_{11} + I_{12}.$$

Из оценки (9.2) следуют оценки

$$|I_{11}| < \frac{C_1\delta}{n^\delta}\|f\|, \tag{9.6}$$

$$|I_{12}| \leqslant \frac{\delta|\delta-1|}{n^2} C_1\|f\| \int_0^{n-1}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{\delta-2} d\mu =$$

$$= \frac{\delta(1-\delta)}{n}\frac{C_1\|f\|}{\delta-1}\{1-n^{1-\delta}\} = \frac{\delta}{n}C_1\|f\|\{n^{1-\delta}-1\} \leqslant C_1'\|f\|\frac{1}{n^\delta}. \tag{9.7}$$

Из оценок (9.5), (9.6) и (9.7) следует непосредственно оценка (9.4). Если $\alpha < \frac{1}{2}$ или $\alpha = \frac{1}{2}$, то оценки проводятся аналогично.

Поступило
29. X. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 325—352.

[3] Левитан Б. М., Об одной специальной тауберовой теореме, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 269—284.

[2] Левитан Б. М., Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, Успехи матем. наук, IV (1949), 3—112.

[4] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. II, М.—Л., 1950.

[5] Левитан Б. М., Доказательство теоремы разложения по собственным функциям самосопряженных дифференциальных уравнений, Доклады Ак. Наук СССР, LXXIII, № 4 (1950), 651—654.

[6] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям, М.—Л., 1950.

[7] Titchmarsh E. C., On the summability of eigenfunctions expansions, The quarterly J. of math., 2 (1951), N 8, 258—268.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 365—388

Б. З. ВУЛИХ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком* **В. И. Смирновым**)

В работе рассматривается ряд вопросов, касающихся структуры линейных полуупорядоченных множеств. Метод исследования основывается на представлении линейных полуупорядоченных множеств посредством непрерывных функций на бикомпакте.

В настоящей статье рассматриваются следующие вопросы теории линейных полуупорядоченных множеств — K-линеалов *: представление K-линеала посредством непрерывных функций на некотором бикомпакте, минимальное пополнение K-линеала без единицы до K-линеала с единицей, максимальное расширение K-линеала с единицей, непрерывные функции от элементов K-линеала. Все эти вопросы изучались ранее различными авторами, но преимущественно для K-пространств, и систематическое изложение результатов, полученных в этом направлении для K-пространств, имеется в ([4]). Однако при переходе к более общим полуупорядоченным множествам — K-линеалам в ряде случаев создаются дополнительные трудности, а результаты, получаемые ниже для K-линеалов, иногда довольно существенно отличаются от известных ранее для K-пространств.

Одновременно можно считать, что предметом настоящей статьи является изучение с различных сторон множества непрерывных функций на бикомпакте.

§ 1. Конкретное представление K-линеалов

1. Основные понятия. K-линеалом называется линейное множество (с умножением на вещественные числа), в котором выделены положительные элементы ($x > 0$) и выполнены следующие аксиомы:

I. Соотношения $x > 0$ и $x = 0$ несовместимы.

II. Если $x > 0$ и $y > 0$, то $x + y > 0$.

III. Для любых элементов x и y существует их верхняя грань $x \vee y$ (т. е. наименьший из элементов z таких, что $z \geqslant x$ и $z \geqslant y$) **.

---

* Определение K-линеала, K-пространства и ряда других встречающихся здесь понятий можно найти в монографии ([4]).

** Неравенство $z > x$ означает, по определению, что $z - x > 0$.

IV. Если $x > 0$ и число $\lambda > 0$, то $\lambda x > 0$.

Заметим, что в K-линеале всякое конечное множество ограничено и имеет верхнюю и нижнюю грани (sup и inf) * Однако не всякое бесконечное ограниченное множество имеет грани; этим K-линеал и отличается от K-пространства.

K-линеал X называется архимедовым, если для любого $x > 0$ ($x \in X$) множество $\{nx\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) не ограничено сверху.

Непустое множество элементов e_ξ ($\xi \in \Xi$) K-линеала X назовем его *фундаментальной системой*, если:

1) $e_\xi > 0$ при каждом $\xi \in \Xi$;

2) элементы e_ξ попарно дизъюнктны, т. е. $e_\xi \, \mathrm{d} \, e_\eta$ при $\xi \neq \eta$; **

3) множество $\{e_\xi\}$ полно в X, т. е. если $x \in X$ и $x \, \mathrm{d} \, e_\xi$ при любом $\xi \in \Xi$, то $x = 0$.

Существование фундаментальной системы легко доказывается для любого нетривиального K-линеала, т. е. содержащего элементы, отличные от 0. Для этого достаточно вполне упорядочить положительные элементы K-линеала и воспользоваться трансфинитной индукцией. Ясно, что в любом нетривиальном K-линеале существует бесчисленное множество фундаментальных систем. В дальнейшем всегда предполагается, что K-линеал задается вместе с некоторой фиксированной фундаментальной системой. Элементы этой системы назовем *единичными*. В частности, если фундаментальная система состоит из одного элемента, то этот элемент называется *единицей* K-линеала и обозначается 1.

Если $\{e_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — фундаментальная система единичных элементов K-линеала X (в дальнейшем пишем сокращенно ф. с. е. э.), то каждому $\xi \in \Xi$ сопоставим множество X_ξ всех таких элементов $x \in X$, что $x \, \mathrm{d} \, e_\eta$ при любом $\eta \neq \xi$. Множество X_ξ назовем компонентой K-линеала X, порожденной элементом e_ξ. Ясно, что X_ξ — K-линеал (подлинеал K-линеала X). Все компоненты X_ξ попарно дизъюнктны.

Пусть X — произвольный K-линеал. Говорят, что элемент $x^* \in K$ обладает свойством единицы в X, если $x^* > 0$ и $x^* \wedge |x| > 0$ для любого $x \in X$, отличного от 0. Ясно, что если ф. с. е. э. K-линеала X состоит из одной единицы 1, то эта единица обладает указанным сейчас свойством. Далее, очевидно, что если X — K-линеал с произвольной ф. с. е. э. $\{e_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), то e_ξ обладает свойством единицы в компоненте X_ξ.

Заметим, что во всем дальнейшем, когда мы говорим о K-линеале X с единицей, то имеется в виду не только то, что в X есть элемент, обладающий свойством единицы, но и то, что этот элемент образует заданную в X фундаментальную систему.

Два K-линеала X и Y называются изоморфными, если между их элементами можно установить линейное взаимно однозначное соответствие $y = \varphi(x)$, сохраняющее упорядочение, т. е.:

1) $\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2)$;

2) из $x > 0$ следует, что $\varphi(x) > 0$ и обратно [ср. ([4]), гл. I, 1.83].

---

* Термин «грань» мы понимаем как «точная граница».

** $x \, \mathrm{d} \, y$ означает, что $|x| \wedge |y| = 0$ (знак $\wedge$ означает inf).

2. K-линеалы непрерывных функций. Пусть S — топологическое пространство; $C(S)$ всегда будет обозначать множество всех вещественных непрерывных функций с конечными значениями, заданных на S. При обычном определении в $C(S)$ алгебраических операций (сумма двух функций и произведение на число определяются по точечным значениям) оно является линейным множеством. Элемент $x \in C(S)$ считается положительным, если $x(s) \geqslant 0$ при всех $s \in S$, но $x(s)$ не равно нулю тождественно. Тогда $C(S)$ — архимедов K-линеал, причем грани $z = x \vee y$ и $u = x \wedge y$ вычисляются также по точечным значениям:

$$z(s) = \max[x(s), y(s)], \quad u(s) = \min[x(s), y(s)].$$

В $C(S)$ за единицу можно принять любую функцию, которая больше 0 на всем S, за исключением некоторого нигде не плотного множества. Любое линейное подмножество $\mathfrak{C}(S) \subset C(S)$, замкнутое относительно операции sup (для конечного числа функций), также является K-линеалом.

В дальнейшем нам придется рассматривать множества $\mathfrak{C}_\infty(S)$ непрерывных функций, заданных на S и допускающих на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$. Линеаризация такого множества производится по следующему правилу. Если $x, y \in \mathfrak{C}_\infty(S)$, то сумма $z = x + y$ определяется как такой элемент $z \in \mathfrak{C}_\infty(S)$, для которого $z(s) = x(s) + y(s)$ при всех $s \in S$, где $x(s)$ и $y(s)$ имеют конечные значения. В общем случае на S может не существовать такой непрерывной функции. Однако во всех случаях, встречающихся ниже, существование требуемого z и его включение в $\mathfrak{C}_\infty(S)$ предполагается или вытекает из других условий. При этом ясно, что если элемент $z = x + y$ существует, то он единственный.

Аналогично, если $x \in \mathfrak{C}_\infty(S)$, а λ — число, то произведение $y = \lambda x$ определяется как такой (единственный) элемент $y \in \mathfrak{C}_\infty(S)$, для которого $y(s) = \lambda x(s)$ всюду, где $x(s)$ имеет конечные значения*. Если сумма и произведение на число в $\mathfrak{C}_\infty(S)$ всегда существуют, то $\mathfrak{C}_\infty(S)$, очевидно, — линейное множество.

В $\mathfrak{C}_\infty(S)$ вводится частичное упорядочение при помощи того определения положительных элементов, которое дано выше для $C(S)$. При этом во всех встречающихся ниже случаях предполагается, что существование граней $x \vee y$ и $x \wedge y$ гарантировано для любых $x, y \in \mathfrak{C}_\infty(S)$ и что они вычисляются по точечным значениям функций $x(s)$ и $y(s)$ (так же, как и в $C(S)$). А тогда $\mathfrak{C}_\infty(S)$ оказывается архимедовым K-линеалом.

Если S — экстремальное топологическое пространство (т. е. такое, в котором замыкание всякого открытого множества открыто-замкнуто), то множество $C_\infty(S)$ всех непрерывных функций, допускающих значения $\pm\infty$ на нигде не плотных множествах, линеаризованное и упорядоченное указанным способом, является K-пространством [ср. ([4]), гл. XIII, 2.23] **.

* Легко видеть, что требуемая непрерывная функция $y(s)$ на S всегда существует.

** Хотя эта теорема сформулирована в ([4]) для бикомпакта, но в ее доказательстве бикомпактность не используется.

3. Общие теоремы о конкретном представлении архимеда K-линеала. Докажем следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X — архимедов K-линеал, $\{e_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — его ф. с. е. э. Тогда существует бикомпакт Q, обладающий следующими свойствами:*

1) K-линеал X изоморфен K-линеалу $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, состоящему из некоторых непрерывных функций, заданных на Q и допускающих на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$;

2) при этом изоморфизме каждому единичному элементу e_ξ соответствует характеристическая функция некоторого открыто-замкнутого множества $E_\xi \subset Q$;

3) множества E_ξ $(\xi \in \Xi)$ попарно дизъюнктны, а множество $S = \bigcup_\xi E_\xi$ плотно в Q;

4) любые две точки $(t_1, t_2 \in Q\ (t_1 \neq t_2)$ функционально различимы посредством функций множества $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, т. е. найдется некоторая функция $x(t)$ из $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, для которой $x(t_1) \neq x(t_2)$;

5) для любых двух функций $x, y \in \mathfrak{C}_\infty(Q)$ их грани $x \vee y$ и $x \wedge y$ вычисляются по точечным значениям этих функций.

При этих условиях бикомпакт Q определяется единственным образом с точностью до гомеоморфизма.

ТЕОРЕМА 2. *Если установлены два изоморфизма между архимедовым K-линеалом X и множествами $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ и $\mathfrak{C}'_\infty(Q)$ функций на бикомпакте Q с соблюдением всех условий теоремы* 1:

$$x \in X; \quad x \leftrightarrow x(t) \text{ из } \mathfrak{C}_\infty(Q), \quad x \leftrightarrow x'(t) \text{ из } \mathfrak{C}'_\infty(Q),$$

то существует такое топологическое отображение Q на самого себя, $\tau = \varphi(t)$, что $x(t) = x'(\tau)$.

Доказательство теорем 1 и 2. По теореме А. И. Юдина [см. ([4]), гл. IV, § 4], K-линеал X можно дополнить методом сечений до K-пространства, а последнее, по теореме А. Г. Пинскера, расширяется до своего максимального расширения [см. ([4]), гл. IV, 2.45]. Пусть $\widetilde{X}$ — получаемое таким образом расширенное K-пространство. Так как в расширенном K-пространстве любое множество попарно дизъюнктных элементов ограничено, то в $\widetilde{X}$ существует $\sup e_\xi$, причем эту верхнюю грань можно принять за единицу в $\widetilde{X}$. В соответствии с этим мы и обозначим ее через $\mathbf{1}$; при этом элементы e_ξ будут входить в базу K-пространства $\widetilde{X}$.

K-пространство $\widetilde{X}$ изоморфно K-пространству $C_\infty(Q_1)$, где Q_1 — некоторый бикомпакт [см. ([4]), гл. XIII, 3.12]*. При этом, если $\mathbf{1}$ соответствует функция $\mathbf{1}(q) \equiv 1$, то каждому e_ξ из ф. с. е. э. соответствует характеристическая функция некоторого открыто-замкнутого множества $E'_\xi \subset Q_1$. Так как $\mathbf{1} = \sup e_\xi$, то множество $S' = \bigcup_\xi E'_\xi$ плотно в Q_1.

Обозначим через $\mathfrak{C}_\infty(Q_1)$ множество тех функций из $C_\infty(Q_1)$, которые при установленном изоморфизме являются образцами элементов $x \in X$.

* $C_\infty(Q_1)$ состоит из всех непрерывных функций на Q_1, допускающих значения $\pm\infty$ на нигде не плотных множествах.

Ясно, что $\mathfrak{C}_\infty(Q_1)$ — подлинеал K-пространства $C_\infty(Q_1)$, в котором грани для конечных множеств имеют тот же смысл, что и в $C_\infty(Q_1)$, т. е. вычисляются по точечным значениям функций *. Однако бикомпакт Q_1 может не удовлетворять условию 4) теоремы 1.

Чтобы построить требуемый бикомпакт Q, воспользуемся методом «склеивания». Именно, будем считать точками бикомпакта Q множества t точек q из Q_1, не различимых функционально посредством функций из $\mathfrak{C}_\infty(Q_1)$. Таким образом, не различимые функционально между собой точки $q \in Q_1$ как бы «склеиваются» в одну. Топология в Q вводится следующим образом: множество $F \subset Q$ считается замкнутым, если множество всех точек из Q_1, склеенных в точки $t \in F$ (т. е. полный прообраз множества F при склеивающем отображении Q_1 на Q), замкнуто в Q_1.

Возьмем $x \in X$; пусть его образ в $\mathfrak{C}_\infty(Q_1)$ — функция $\overline{x}(q)$. Эта функция порождает непрерывную функцию $x(t)$ на Q, если для любого $t \in Q$ положить $x(t) = \overline{x}(q)$, где q — любая из точек бикомпакта Q_1, склеенных в точку t. Множество всех таких функций $x(t)$ есть, очевидно, K-линеал, который мы обозначим через $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, а установленное соответствие $x \leftrightarrow x(t)$ есть изоморфизм между X и $\mathfrak{C}_\infty(Q)$.

Бикомпакт Q удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. Первое, четвертое и пятое условия выполняются по построению. Далее, если $q_1 \in E'_\xi$ при некотором $\xi \in \Xi$, $q_2 \overline{\in} E'_\xi$, то q_1 и q_2 функционально различимы; например,

$$\overline{e}_\xi(q_1) = 1, \quad \overline{e}_\xi(q_2) = 0,$$

где $\overline{e}_\xi(q)$ — функция из $\mathfrak{C}_\infty(Q_1)$, соответствующая единичному элементу e_ξ. А тогда точка q_1 может склеиваться только с другими точками из того же E_ξ и, следовательно, при построении бикомпакта Q множество $E'_\xi \subset Q_1$ переходит в некоторое открыто-замкнутое множество $E_\xi \subset Q$. Единичному элементу $e_\xi \in X$ при изоморфизме между X и $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ соответствует характеристическая функция множества E_ξ. Эти множества E_ξ попарно дизъюнктны и их сумма $S = \bigcup_\xi E_\xi$ плотна в Q (так как S' плотно в Q_1).

Остается доказать однозначность определения бикомпакта Q. Прежде всего установим однозначность определения (с точностью до гомеоморфизма) каждого бикомпакта E_ξ. При реализации K-линеала X на бикомпакте Q порождается естественным образом реализация компоненты X_ξ в виде некоторого множества непрерывных функций на E_ξ (точнее, функций на Q, равных 0 вне E_ξ). При этом, если e_ξ принять за единицу в X_ξ, K-линеал ограниченных элементов из X_ξ ** оказывается изоморфным множеству $\mathfrak{C}_\xi$ некоторых ограниченных непрерывных функций на E_ξ.

---

* Заметим, что для любых $x, y \in X$ их грань $x \vee y$ (а также и $x \wedge y$) имеет в X и в $\widetilde{X}$ одно и то же значение.

** Если $\mathbf{1}$ — единица K-линеала X, то элемент $x \in X$ называется ограниченным при условии, что $|x| \leqslant C\mathbf{1}$, где число $C < +\infty$.

Любые две точки $t_1, t_2 \in E_\xi$ $(t_1 \neq t_2)$ функционально различимы посредством некоторой функции из $\mathfrak{C}_\xi$. Действительно, по условию 4), существует такой $y \in X$, что для соответствующей ему функции из $\mathfrak{C}_\infty(Q)$

$$y(t_1) \neq y(t_2).$$

Можно считать, что $y > 0$. Пусть $y(t_1) < \lambda < y(t_2)$. Положим $x = y \wedge \lambda e_\xi$. Тогда $x \in X_\xi$, $0 \leqslant x \leqslant \lambda e_\xi$ и

$$x(t_1) = y(t_1) \wedge \lambda < \lambda, \quad x(t_2) = y(t_2) \wedge \lambda = \lambda.$$

Далее, так как в множество $\mathfrak{C}_\xi$ входит функция, тождественно равная 1 (образ элемента e_ξ), то из одной теоремы М. Г. Крейна и С. Г. Крейна [см. (5), теорема 4] вытекает, что $\mathfrak{C}_\xi$ плотно относительно равномерной сходимости в множестве $C(E_\xi)$ всех ограниченных непрерывных функций на бикомпакте E_ξ. А тогда из другой теоремы М. Г. Крейна и С. Г. Крейна [см. (5), теорема 7] следует однозначность определения E_ξ с точностью до гомеоморфизма.

Множество $S = \bigcup\limits_\xi E_\xi$ определяется как топологическое пространство также однозначно, так как топология в S всецело определяется топологией E_ξ. Именно, множество $G \subset S$ открыто в том и только в том случае, если $G = \bigcup\limits_\xi G_\xi$, где $G_\xi \subset E_\xi$ и каждое G_ξ открыто.

Если каждую функцию из $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ рассмотреть только на S, то получится изоморфное отображение K-линеала X на некоторое множество $\mathfrak{C}_\infty(S): x \leftrightarrow x(t)$. Покажем, что если есть второе изоморфное отображение K-линеала X на множество $\mathfrak{C}'_\infty(S)$ непрерывных функций на том же пространстве S, удовлетворяющее условиям 1), 2), 4), 5) теоремы 1: $x \leftrightarrow x'(t)$, то существует такое топологическое отображение S самого на себя, $\tau = \varphi(t)$, что $x(t) = x'(\tau)$.

В соответствии с уже доказанным, каждая компонента X_ξ реализуется в обоих случаях на бикомпакте E_ξ. Покажем, что если для некоторого конечного набора элементов $x_i \in X_\xi$ $(i = 1, \ldots, m)$ и некоторого $t_0 \in E_\xi$

$$x_i(t_0) = a_i, \quad -\infty < a_i < +\infty,$$

то множества $F_i = E_\xi(x'_i(t) = a_i)$ имеют непустое пересечение.

Действительно, если допустить, что $\bigcap\limits_{i=1}^m F_i = \Lambda$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\sum_{i=1}^m |x'_i(t) - a_i| \geqslant \varepsilon \quad \text{на всем } E_\xi.$$

Вследствие изоморфизма между X и $\mathfrak{C}'_\infty(S)$, это означает, что

$$\sum_{i=1}^m |x_i - a_i e_\xi| \geqslant \varepsilon e_\xi,$$

но тогда и

$$\sum_{i=1}^m |x_i(t) - a_i| \geqslant \varepsilon \quad \text{на всем } E_\xi,$$

что, однако, неверно в точке t_0.

Возьмем любое $t_0 \in E_\xi$ и для каждого ограниченного $x \in X_\xi$ положим

$$F_x = E_\xi(x'(t) = x(t_0)).$$

Эти множества F_x образуют центрированную систему, следовательно, их пересечение $F = \bigcap\limits_{x \in X} F_x$ не пусто. Если $\tau_0 \in F$, то $x'(\tau_0) = x(t_0)$ для каждого ограниченного $x \in X_\xi$.

Для произвольного $x \in X_\xi$, $x > 0$, положим

$$x_n = x \wedge ne_\xi \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$x_n(t) = x(t) \wedge n, \quad x_n'(t) = x'(t) \wedge n.$$

Но $x_n'(\tau_0) = x_n(t_0)$ при любом n, следовательно, $x'(\tau_0) = x(t_0)$. Ясно, что то же равенство имеет место и без предположения, что $x > 0$. Теперь из условия 4) теоремы 1 следует, что F состоит только из одной точки τ_0. Положим

$$\tau_0 = \varphi_\xi(t_0).$$

Определенное таким образом соответствие является взаимно однозначным отображением бикомпакта E_ξ на E_ξ. Легко видеть, что это отображение топологическое, так как прообраз открытого множества $E_\xi(a < x'(t) < b)$ есть открытое множество $E_\xi(a < x(t) < b)$.

Установив таким образом отображение φ_ξ каждого E_ξ на самого себя, определим отображение φ пространства S на самого себя, полагаем для любого $t \in S$

$$\varphi(t) = \varphi_\xi(t),$$

если $t \in E_\xi$. Это отображение также топологическое.

Теперь уже легко установить однозначность определения бикомпакта Q, удовлетворяющего условиям теоремы 1. По условию 3), Q является одним из бикомпактных расширений вполне регулярного пространства S, причем все функции из $\mathfrak{C}_\infty(S)$ распространимы на Q с соблюдением условия 4). Пусть R — максимальное бикомпактное расширение пространства S. Как известно, существует «допустимое» непрерывное отображение R на Q

$$t = \psi(\tau),$$

т. е. такое, при котором точки на S остаются неподвижными [см. ([1]), стр. 19]. Если каждую функцию $x(t)$ из $\mathfrak{C}_\infty(S)$ распространить сначала на Q, а затем положить для любого $\tau \in R$

$$\tilde{x}(\tau) = x[\psi(\tau)],$$

то получится непрерывное распространение функции $x(t)$ на R. Множество всех получаемых таким образом функций $\tilde{x}(\tau)$ обозначим через $\mathfrak{C}_\infty(\tilde{R})$. Ясно, что если в бикомпакте R склеить точки, не различимые функционально посредством функций из $\mathfrak{C}_\infty(\tilde{R})$, то будут склеиваться точки, имеющие одинаковые образы в Q при отображении ψ, и получится бикомпакт, гомеоморфный Q. Отсюда, в силу установленной выше

однозначности определения $\mathfrak{C}_\infty(S)$ (а следовательно, и $\mathfrak{C}_\infty(R)$), и вытекает однозначность определения Q.

Этим теорема 1 доказана полностью.

Чтобы закончить доказательство теоремы 2, отметим, что только что проведенным рассуждением фактически установлено, что если Q_1 и Q_2 — два бикомпактных расширения пространства S, удовлетворяющих всем условиям теоремы 1, то существует топологическое отображение Q_1 на Q_2, при котором точки из S остаются неподвижными. Отсюда сразу следует, что построенное выше отображение φ пространства S на самого себя распространимо, как топологическое, на все Q. Ясно, что после распространения отображение φ будет удовлетворять требованию теоремы 2 *.

Замечание 1. Если ф. с. е. э. K-линеала X состоит из одной единицы 1, то при изоморфизме, установленном в теореме 1, единице будет соответствовать функция, тождественно равная 1 **. В частности, если X — K-пространство с единицей, то бикомпакт Q оказывается экстремальным. Однако, если X — K-пространство без единицы, то бикомпакт Q может уже не быть экстремальным, хотя каждое из множеств E_ξ в этом случае экстремально.

Точнее, если даже X содержит элемент, обладающий свойством единицы, но заданная в X ф. с. е. э. не ограничена, то бикомпакт Q может не быть экстремальным. Например, K-пространство c_0 числовых последовательностей, сходящихся к 0, в котором ф. с. е. э. состоит из координатных ортов, реализуется на бикомпакте, состоящем из чисел натурального ряда, к которым присоединена $+\infty$, с естественной топологией.

Замечание 2. В общем случае возможно (если ф. с. е. э. состоит из бесконечного множества элементов), что в бикомпакте Q имеется точка t_0, в которой обращаются в нуль все функции, входящие в $\mathfrak{C}_\infty(Q)$. Но если такой точки нет, то в K-линеале X существует элемент, обладающий свойством единицы.

Действительно, в этом случае для каждого $\tau \in Q$ существуют открытое множество $G_\tau \subset Q$, содержащее τ, и такой элемент $x_\tau \in X$, что для соответствующей ему функции из $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ $x_\tau(t) \neq 0$ при $t \in G_\tau$. Из множеств G_τ можно выделить конечное покрытие бикомпакта Q:

$$Q = \bigcup_{i=1}^{n} G_{\tau_i}.$$

Тогда элемент $x = |x_{\tau_1}| \vee \ldots \vee |x_{\tau_n}|$ обладает свойством единицы в X, так как соответствующая ему функция $x(t) > 0$ на всем Q.

* Судя по реферату М. Стона (11), теорема 1 является некоторым уточнением теоремы К. Иосида (10) для случая архимедовых K-линеалов. В работе (10) Иосида установил также конкретное представление и для неархимедовых K-линеалов. Автор не имел возможности ознакомиться с работой К. Иосида в подлиннике. Теорема 2 является обобщением теоремы М. Стона [см. (9)].

** Этот случай был рассмотрен в работе автора (2). Намеченное там доказательство опиралось на теорему М. Г. Крейна и С. Г. Крейна о реализации K-линеала ограниченных элементов [см. (5)], которая содержится в доказанной здесь общей теореме 1.

Замечание 3. Для произвольного $x \geqslant 0$ $(x \in X)$ положим

$$x_\xi^{(n)} = x \wedge ne_\xi \quad (\xi \in \Xi;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда очевидно, что для соответствующих функций из $\mathfrak{C}_\infty(Q)$

$$x(t) = \sup_n x_\xi^{(n)}(t) \quad \text{при} \quad t \in E_\xi.$$

Отсюда следует, что

$$x = \sup_{\xi, n} x_\xi^n.$$

4. Обобщенная норма элементов K-линеала. Построенная в предыдущем пункте реализация архимедова K-линеала посредством непрерывных функций позволяет определить для каждого элемента $x \in X$ обобщенную норму. Именно, положим

$$\| x \| = \max_{t \in Q} | x(t) |, \tag{1}$$

где $x(t)$ — функция из $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, соответствующая элементу x. В дальнейшем мы будем пользоваться этим обозначением для функции, соответствующей элементу x при изоморфизме, без специальных пояснений.

Согласно определению, $0 \leqslant \| x \| \leqslant +\infty$. Эта обобщенная норма обладает почти всеми свойствами обычной нормы в линейных нормированных пространствах, а именно:

1) $\| x \| = 0$ влечет $x = 0$;

2) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$;

3) $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$ при любом λ, если $\| x \| < +\infty$; то же верно при $\lambda \neq 0$, если $\| x \| = +\infty$.

Можно дать и абстрактное определение обобщенной нормы. Для этого определим сначала «шар радиуса $\frac{1}{2}$» — множество $S_{\frac{1}{2}}$, состоящее из всех $x \in X$, удовлетворяющих условию

$$| x | \wedge e_\xi \leqslant \frac{1}{2} e_\xi$$

для каждого элемента e_ξ из ф. с. е. э. Затем, для любого $x \in X$ положим

$$\| x \| = \inf_{\frac{1}{2\lambda} x \in S_{\frac{1}{2}},\ 0 < \lambda \leqslant +\infty} \{\lambda\}; \tag{2}$$

легко видеть, что эта нижняя грань достигается для всякого $x \neq 0$. Нетрудно проверить, что определения (1) и (2) совпадают.

Если фундаментальная система состоит из одной единицы 1, то определение (2) равносильно такому:

$$\| x \| = \min_{| x | \leqslant \lambda 1,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant +\infty} \{\lambda\}.$$

Элементы K-линеала X с конечной нормой называются ограниченными. В случае, если X содержит единицу 1, ограниченность элемента $x \in X$ означает, как это и понималось раньше, что $| x | \leqslant C 1$ при некотором конечном C.

Ограниченные элементы образуют нормальный подлинеал K-линеала X* и реализуются в виде ограниченных непрерывных функций на Q.

Пользуясь введенной нормой, в K-линеале можно определить (b)-сходимость, полагая $x_n \xrightarrow{(b)} x$, если $\|x_n - x\| \to 0$. Эта (b)-сходимость будет означать равномерную сходимость соответствующих функций. K-линеал может не быть полным относительно (b)-сходимости. Однако, присоединяя к $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ все непрерывные функции, представимые как предел некоторой равномерно сходящейся последовательности функций из $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, мы получим K-линеал, который и будет минимальным пополнением K-линеала X до K-линеала, полного относительно (b)-сходимости. Проверка того, что получаемое в результате такого пополнения множество функций является архимедовым K-линеалом, не представляет труда. В настоящей статье все последующие вопросы рассматриваются для полных линеалов.

Вернемся к теореме 1 о конкретном представлении архимедова K-линеала и предположим, что он полон относительно (b)-сходимости. В этом случае образ каждой компоненты X_ξ при ее реализации на бикомпакте E_ξ содержит все множество $C(E_\xi)$ ограниченных непрерывных функций на E_ξ. Если же X содержит единицу 1, то все множество $C(Q) \subset \mathfrak{C}_\infty(Q)$, т. е. подлинеал ограниченных элементов из X реализуется в виде всего $C(Q)$, и этим подлинеалом уже полностью определяется бикомпакт Q. Эти результаты вытекают из теоремы М. Г. Крейна и С. Г. Крейна [см. ([5]), теорема 8]. Без полноты, при наличии единицы 1, можно утверждать, что подлинеал ограниченных элементов плотен в $C(Q)$ относительно равномерной сходимости.

Заметим, что пополнение K-линеала относительно (b)-сходимости можно осуществить, опираясь на абстрактное определение нормы и используя обычный метод пополнения метрического пространства. Однако проверка того, что получаемое таким способом множество оказывается архимедовым K-линеалом, будет несколько сложнее, чем если при пополнении исходить из реализации K-линеала непрерывными функциями.

§ 2. Погружение *K*-линеала без единицы в *K*-линеал с единицей

5. Каноническое расширение K-линеала без единицы. Если X — K-линеал без единицы, то его всегда можно пополнить до некоторого K-линеала с единицей. Один способ такого пополнения дается в теории K-пространств. Именно, требуемым K-линеалом с единицей (даже K-пространством) будет расширенное K-пространство $\widetilde{X}$, построенное в начале доказательства теоремы 1. Однако построение K-пространства $\widetilde{X}$ связано с присоединением к X чрезвычайно большого количества новых элементов. Возможно пополнение X до K-линеала с единицей и за счет присоединения меньшего количества новых элементов. В настоящем параграфе мы найдем некоторое пополнение, в известном смысле минимальное.

* Подлинеал $X_0 \subset X$ называется нормальным, если из $x \in X_0$, $y \in X$, $|y| \leqslant |x|$, следует, что $y \in X_0$ [ср. ([4]), гл. II, 1.2].

Будем сокращенно писать вместо «архимедов K-линеал, полный относительно (b)-сходимости», а. п. K-линеал.

ЛЕММА. *Пусть Q — бикомпакт, $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ — некоторое множество непрерывных функций, заданных на Q, являющееся K-линеалом при том определении основных операций в нем, которое было дано в § 1, п. 2. Тогда множество $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$ всех непрерывных функций вида $x(t)+y(t)$, где $x \in \mathfrak{C}_\infty(Q)$, $y \in C(Q)$, — K-линеал* *.

Доказательство. Из определения сразу следует, что $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$ — линейное множество при том значении алгебраических операций, которое было указано в § 1, п. 2. Покажем, что для любых двух функций из $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$ их точечная верхняя грань также входит в $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$.

а) Пусть сначала $x \in \mathfrak{C}_\infty(Q)$, $x \geqslant 0$, $y(t)$ — произвольная ограниченная непрерывная функция. Тогда

$$x(t) \bigvee y(t) = x(t) + \{[y(t) - x(t)] \bigvee 0\}.$$

Обозначим второе слагаемое через $y_1(t)$. Тогда

$$0 \leqslant y_1(t) = [y(t) - x(t)] \bigvee 0 \leqslant y_+(t).$$

Следовательно, $y_1(t)$ — ограниченная непрерывная функция и $x(t) \bigvee y(t)$ входит в $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$.

б) Возьмем теперь произвольный $x \in \mathfrak{C}_\infty(Q)$, а $y(t)$ пусть, попрежнему, — ограниченная непрерывная функция. Имеем:

$$x(t) \bigvee y_+(t) = x(t) \bigvee y(t) \bigvee 0 = x_+(t) \bigvee y(t)^{**},$$

следовательно, эта функция входит в $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$, согласно доказанному в а). Далее,

$$[x(t) \bigvee y_+(t)] - [x(t) \bigvee y(t)] \leqslant y_+(t) - y(t) = y_-(t).$$

Следовательно,

$$x(t) \bigvee y(t) = [x(t) \bigvee y_+(t)] - y_2(t),$$

где $0 \leqslant y_2(t) \leqslant y_-(t)$, откуда и вытекает, что $x(t) \bigvee y(t)$ входит в $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$.

в) Возьмем, наконец, любые две функции из $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$:

$$x_1(t) + y_1(t), \quad x_2(t) + y_2(t), \quad (x_1, x_2 \in \mathfrak{C}_\infty(Q),\ y_1, y_2 \in C(Q)).$$

Имеем (всюду, где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ конечны):

$$[x_1(t) + y_1(t)] \bigvee [x_2(t) + y_2(t)] =$$
$$= \{[x_1(t) - x_2(t)] \bigvee [y_2(t) - y_1(t)]\} + \{x_2(t) + y_1(t)\}.$$

В каждой из фигурных скобок стоит функция из $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$ (в первой — по доказанному в б)), а их сумма тоже входит в $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$.

Лемма доказана.

Пусть X — а. п. K-линеал, $\{e_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — его ф. с. е. э. По теореме 1, X реализуется в виде K-линеала $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ на некотором бикомпакте Q. Образуем K-линеал $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$, рассмотренный в лемме. Этот K-линеал $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$ обладает следующими свойствами:

---

* Сумма произвольной и ограниченной непрерывных функций всегда имеет смысл.

** $y_+(t) = y(t) \bigvee 0, \quad y_-(t) = [-y(t)] \bigvee 0.$

1) Отождествим элементы K-линеала X с соответствующими им при изоморфизме функциями из $\mathfrak{C}_\infty(Q)$. По теореме 1, единичные элементы e_ξ совпадут с характеристическими функциями открыто-замкнутых множеств $E_\xi \subset Q$, причем $\bigcup\limits_\xi E_\xi$ плотно в Q. Примем за единицу $\mathbf{1}$ в $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$ функцию, тождественно равную 1; тогда легко видеть, что $\sup e_\xi = \mathbf{1}$.

2) $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$ — а. п. K-линеал. Полнота вытекает из того, что в $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$ входят все ограниченные непрерывные функции.

3) Грани любого конечного множества элементов из $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, вычисленные в $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ и в $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$, совпадают. Это вытекает из того, что в обоих K-линеалах грани вычисляются по точечным значениям функций.

K-линеал $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$ (или ему изоморфный) при условии, что его единица $\mathbf{1} = \sup e_\xi$, назовем *каноническим расширением* K-линеала X.*

6. Минимальность канонического расширения. Каноническое расширение обладает минимальным свойством, выражаемым следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть X — а. п. K-линеал, $\{e_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — его ф. с. е. э., Y — а. п. K-линеал с единицей $\mathbf{1}$, причем:*

1) *X изоморфен некоторому подлинеалу $X_1 \subset Y$;*

2) *если при этом изоморфизме e'_ξ $(\xi \in \Xi)$ суть элементы из X, соответствующие единичным элементам e_ξ, то*

$$\sup e'_\xi = \mathbf{1};$$

3) *грани любого конечного множества элементов из X_1, вычисленные в X_1 и в Y, совпадают.*

Тогда Y содержит подлинеал X_2, являющийся каноническим расширением K-линеала X, причем единица этого канонического расширения совпадает с единицей K-линеала Y.

Доказательство. По теореме 1, K-линеал X изоморфен некоторому $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, а K-линеал Y реализуется в виде K-линеала $\mathfrak{C}_\infty(R)$ на некотором бикомпакте R, причем единице $\mathbf{1} \in Y$ соответствует функция, тождественно равная 1 на R. Из условия 3) вытекает, что элементы e'_ξ попарно дизъюнктны в Y, а тогда, в силу условия 2), $(\mathbf{1} - e_\xi')\,\mathrm{d}\, e'_\xi$ при любом $\xi \in \Xi$**. Отсюда следует, что каждый e'_ξ реализуется на би-

---

* Заметим, что погружение K-линеала в его каноническое расширение может не быть нормальным. Можно доказать, что для K-линеала ограниченных элементов необходимым и достаточным условием для нормальности его погружения в каноническое расширение является отсутствие в $\mathfrak{C}_\infty(S)$ связок II рода [см. ([5]), § 4].

** Это вытекает при помощи дистрибутивного закона [см. ([4]), гл. I, 1.56], сохраняющегося и для K-линеалов, из равенства $\mathbf{1} - e'_{\xi_0} = \sup\limits_{\eta \neq \xi_0} e'_\eta$. Докажем это последнее равенство.

Так как при $\eta \neq \xi_0$ $e'_\eta \wedge e'_{\xi_0} = 0$, то $e'_\eta + e'_{\xi_0} = e'_\eta \vee e'_{\xi_0} \leqslant \mathbf{1}$, а потому $e'_\eta \leqslant \mathbf{1} - e'_{\xi_0}$. Предположим, что $\mathbf{1} - e'_{\xi_0}$ не является верхней гранью для множества $\{e'_\eta\}$ $(\eta \neq \xi_0)$. Это значит, что существует такой $y \in Y$, что $e'_\eta \leqslant y$ при всех $\eta \neq \xi_0$, y не $\geqslant \mathbf{1} - e'_{\xi_0}$. А тогда $(\mathbf{1} - e'_{\xi_0}) \wedge y = z < \mathbf{1} - e'_{\xi_0}$ и при этом $e'_\eta \leqslant z$. Отсюда мы приходим к противоречию:

$$\mathbf{1} = \sup e'_\xi \leqslant z \vee e'_{\xi_0} \leqslant z + e'_{\xi_0} < \mathbf{1}.$$

компакте R в виде характеристической функции некоторого открыто-замкнутого множества Φ_ξ; эти множества Φ_ξ $(\xi \in \Xi)$ попарно дизъюнктны и, в силу условия 2),

$$[\bigcup_\xi \Phi_\xi] = R.$$

Обозначим через H_1 подмножество из $\mathfrak{C}_\infty(R)$, которое является образом X_1 при изоморфном отображении Y на $\mathfrak{C}_\infty(R)$. В бикомпакте R склеиваем точки, не различимые функционально посредством функций из H_1, и полученный в результате склеивания бикомпакт обозначим через R^*. Каждая непрерывная функция на R, принимающая одинаковые значения в склеиваемых точках (в частности, каждая функция из H_1), порождает непрерывную функцию на R^* в том смысле, как это понимается в доказательстве теоремы 1. Таким образом, K-линеал X_1 (а вместе с ним и X) оказывается изоморфным некоторому K-линеалу $\mathfrak{C}_\infty(R^*)$ непрерывных функций на бикомпакте R^*, а $\mathfrak{C}_\infty(R^*)$ изоморфен подлинеалу H_1 K-линеала $\mathfrak{C}_\infty(R)$. Изоморфизм между X и $\mathfrak{C}_\infty(R^*)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. Поэтому бикомпакты Q и R^* гомеоморфны и при построении канонического расширения K-линеала X можно исходить из его представления на бикомпакте R^*.

Ограниченные непрерывные функции на бикомпакте R, принимающие одинаковые значения в склеиваемых точках, порождают на R^* все множество $C(R^*)$. Так как $C(R) \subset \mathfrak{C}_\infty(R)$ (см. § 1, п. 4), то $C(R^*)$, следовательно, изоморфно некоторому подлинеалу H_2 K-линеала $\mathfrak{C}_\infty(R)$. Линейная оболочка множеств $\mathfrak{C}_\infty(R^*)$ и $C(R^*)$ и есть каноническое расширение K-линеала X. С другой стороны, это каноническое расширение, очевидно, изоморфно линейной оболочке H подлинеалов H_1 и H_2 K-линеала $\mathfrak{C}_\infty(R)$. Так как весь $\mathfrak{C}_\infty(R)$ изоморфен Y, то H изоморфно некоторому подлинеалу $X_2 \subset Y$. Этот X_2 и является каноническим расширением K-линеала X. При этом очевидно, что единица канонического расширения совпадает с единицей 1 из Y.

Замечание. Если X — K-пространство, то его каноническое расширение все же может не быть K-пространством. Действительно, если, по теореме 1, X реализуется на неэкстремальном бикомпакте Q, то и каноническое расширение, по определению, реализуется на том же бикомпакте. Множество ограниченных элементов канонического расширения есть все $C(Q)$, но если Q не экстремально, то $C(Q)$ (а вместе с ним и все каноническое расширение) не может быть K-пространством.

§ 3. Максимальное расширение K-линеала*

7. Внутренне нормальные K-линеалы**. Пусть X — а. п. K-линеал с единицей 1. Назовем последовательность элементов $x_n \in X$ *определяющей*, если:

а) $x_n \geqslant 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$;

б) $x_m \wedge n1 = x_n$ при $m \geqslant n$.

---

* Основные результаты этого параграфа были кратко изложены в работе автора (²).

** В работе (²) такие K-линеалы называются просто нормальными.

Отметим два свойства определяющих последовательностей:

1) если $x \in X$, $x \geqslant 0$ и $x_n = x \wedge n\mathbf{1}$, то очевидно, что последовательность таких «срезок» $\{x_n\}$ — определяющая.

2) Если последовательноть $\{x_n\}$ — определяющая и существует $x = \sup x_n$, то x_n суть «срезки» элемента x, а именно $x_n = x \wedge n\mathbf{1}$.

Действительно, при помощи дистрибутивного закона получаем:

$$x \wedge n\mathbf{1} = (\sup_{m \geqslant n} x_m) \wedge n\mathbf{1} = \sup_{m \geqslant n} (x_m \wedge n\mathbf{1}) = x_n.$$

Определение. А. п. K-линеал X с единицей назовем *внутренне нормальным*, если для всякой ограниченной определяющей последовательности $\{x_n\}$ существует ее верхняя грань $x = \sup x_n$.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы а. п. K-линеал X с единицей был внутренне нормальным, необходимо и достаточно, чтобы при реализации X согласно теореме 1 в виде K-линеала $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, последний удовлетворял следующему условию: если $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции на бикомпакте Q, причем $0 \leqslant y(t) \leqslant x(t)$, и если $x(t)$ входит в $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, то $y(t)$ также входит в $\mathfrak{C}_\infty(Q)$.*

Доказательство. Пусть X — внутренне нормальный K-линеал (с единицей $\mathbf{1}$), $x \in X$, $x \geqslant 0$, $x(t)$ — соответствующая элементу x функция из $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, $y(t)$ — непрерывная функция, $0 \leqslant y(t) \leqslant x(t)$. Положим

$$y_n(t) = y(t) \wedge n.$$

Как ограниченная непрерывная функция, $y_n(t)$ есть образ некоторого элемента $y_n \in X$ (см. § 1, п. 4), а последовательность $\{y_n\}$ — определяющая и ограниченная в X: $y_n \leqslant x$. Тогда в X существует $z = \sup y_n$; при этом $y_n = z \wedge n\mathbf{1}$. Отсюда ясно, так как $z(t) = \sup y_n(t)$, что $z(t) \equiv y(t)$, следовательно, $y(t)$ — образ элемента $z \subset X$ и $y(t)$ входит в $\mathfrak{C}_\infty(Q)$.

Пусть, наоборот, K-линеал $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ удовлетворяет условию теоремы и дана ограниченная определяющая последовательность $\{x_n\}$:

$$x_n \leqslant y \in X.$$

Тогда $x_n(t) \leqslant y(t)$ и функция $x_n(t)$ образуют монотонную последовательность. Кроме того, эта последовательность обладает тем свойством, что если в некоторой точке $t_0 \in Q$ $x_n(t_0) < n$, то в этой точке $x_m(t_0) = x_n(t_0)$ при всех $m \geqslant n$. Отсюда уже сразу следует, что функция $x(t) = \lim x_n(t)$ непрерывна. Так как $x(t) \leqslant y(t)$, то $x(t)$ входит в $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ и, следовательно, является образом некоторого $x \in X$. Ясно, что $x = \sup x_n$.

8. Отделяющие множества. Введем одно вспомогательное понятие, играющее в дальнейшем важную роль.

Определение. Замкнутое множество F бикомпакта Q назовем *отделяющим*, если или

1) для всяких двух открытых множеств G_1, $G_2 \subset Q$, удовлетворяющих условиям:

а) $[G_1] \cap [G_2] \neq \Lambda$,

б) $[G_1] \cap [G_2] \subset F$,

пересечение самих G_1 и G_2 не пусто ($G_1 \cap G_2 \neq \Lambda$), или

2) открытых множеств G_1 и G_2, удовлетворяющих условиям а) и б), не существует.

Заметим, что пустое множество, согласно определению, следует считать отделяющим.

Установим некоторые свойства отделяющих множеств.

1°. *Замкнутое подмножество отделяющего множества — также отделяющее множество.* (Свойство очевидно.)

2°. *Сумма двух отделяющих множеств — также оотделяющее множество.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — отделяющие, а $F = F_1 \cup F_2$. Пусть существует два открытых множества G_1 и G_2, удовлетворяющих условиям а) и б). Если при этом $[G_1] \cap [G_2]$ включается в F_1 или в F_2, то так как F_1 и F_2 — отделяющие, то $G_1 \cap G_2 \neq \Lambda$. В противном случае существует такая точка $t_0 \in [G_1] \cap [G_2] \cap F_1$, что $t_0 \overline{\in} F_2$. Точка t_0 и множество F_2 отделимы дизъюнктными открытыми множествами U и V, т. е.

$$t_0 \in U, \quad F_2 \subset V, \quad U \cap V = \Lambda.$$

Положим

$$U_1 = U \cap G_1, \quad U_2 = U \cap G_2.$$

Тогда $t_0 \in [U_1] \cap [U_2]$, следовательно, $[U_1] \cap [U_2] \neq \Lambda$. Кроме того,

$$[U_1] \cap F_2 = [U_2] \cap F_2 = \Lambda.$$

С другой стороны,

$$[U_1] \cap [U_2] \subset [G_1] \cap [G_2] \subset F,$$

следовательно, $[U_1] \cap [U_2] \subset F_1$ и так как F_1 — отделяющее, то $U_1 \cap U_2 \neq \Lambda$. Тем более, $G_1 \cap G_2 \neq \Lambda$.

3°. *Если G — открытое множество, плотное в Q, а $F = Q \setminus G$ — отделяющее множество, то всякая непрерывная функция, заданная на G, распространима (единственным способом) с сохранением непрерывности на все Q.*

Доказательство. Пусть $G_1, G_2 \subset G$, причем G_1 и G_2 открыты и функционально отделимы в G *. Тогда

$$G[G_1] \cap G[G_2] = \Lambda,$$

следовательно,

$$Q[G_1] \cap Q[G_2] \subset F.$$

Но так как F — отделяющее и $G_1 \cap G_2 = \Lambda$, то и

$$Q[G_1] \cap Q[G_2] = \Lambda,$$

т. е. для G выполнено условие теоремы о распространимости непрерывных функций [см. ([3])] **.

Свойство 3 дополняется следующим:

4°. *Если открытое множество G, плотное в Q, само является нормальным пространством (с топологией, индуцированной в G из Q), то требование, чтобы $F = Q \setminus G$ было отделяющим, не только достаточно, но и необходимо для возможности распространения любой непрерывной функции с G на все Q.*

---

* Это значит, что на G существует такая непрерывная функция $f(t)$, что $f(t) = a$ при $t \in G_1$, $f(t) = b$ при $t \in G_2$ и $a \neq b$.

** Это условие заключается в том, что любые два множества, содержащиеся в G и функционально отделимые в нем, должны иметь дизъюнктные замыкания в Q.

Доказательство. Покажем, что если всякая непрерывная на G функция распространима на все Q, то открытых множеств G_1 и G_2, удовлетворяющих условиям а) и б), не существует.

Допустим противное. Заменяя имеющиеся G_1 и G_2 на их пересечения с G и учитывая, что их замыкания при этом не изменятся, можно считать сразу, что $G_1, G_2 \subset G$. Так как условие теоремы о распространимости непрерывных функций должно быть выполнено для G, то G_1 и G_2 функционально неотделимы в G. А тогда, в силу нормальности G,

$$G[G_1] \cap G[G_2] \neq \Lambda.$$

что противоречит условию б).

5°. *В экстремальном бикомпакте каждое замкнутое множество — отделяющее.*

Это свойство следует непосредственно из того, что в экстремальном топологическом пространстве всякие два дизъюнктные открытые множества имеют дизъюнктные замыкания.

9. K-линеал $C_\infty(Q)$. В теории K-пространств очень важную роль играет K-пространство всех непрерывных функций, определенных на экстремальном бикомпакте и допускающих значения $+\infty$ и $-\infty$ на нигде не плотных множествах [ср. (4), гл XIII]. При помощи этого пространства можно легко установить существование максимального расширения для произвольного K-пространства. Чтобы исследовать аналогичный вопрос для K-линеалов, рассмотрим на произвольном бикомпакте Q множество всех непрерывных функций $x(t)$, допускающих значения $+\infty$ и $-\infty$ только на нигде не плотных отделяющих множествах. Это множество функций обозначим через $C(Q)$. Ясно, что $C(Q) \subset C_\infty(Q)$. Кроме того, заметим, что возможен случай, когда на бикомпакте Q совсем нет непустых отделяющих множеств и тогда $C_\infty(Q) = C(Q)$. С другой стороны, если бикомпакт Q — экстремальный, то, согласно предложению 5° из п. 8, в $C_\infty(Q)$ войдут все непрерывные функции на Q, допускающие значения $+\infty$ и $-\infty$ на нигде не плотных множествах.

Введем определение непрерывных функций от элементов множества $C_\infty(Q)$. Мы дадим все формулировки для функций двух переменных, но из текста будет ясно, что число аргументов не имеет принципиального значения.

Пусть $F(\lambda, \mu)$ — вещественная непрерывная функция, заданная при всех вещественных λ и μ $(-\infty < \lambda, \mu < +\infty)$. Возьмем функции $x, y \in C_\infty(Q)$ и положим

$$z(t) = F[x(t), y(t)]$$

для всех t, при которых обе функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют конечные значения. Тогда $z(t)$ — непрерывная функция (с конечными значениями), определенная на всем Q, за исключением некоторого отделяющего нигде не плотного множества (см. предложение 2° из п. 8). На основании свойства 3 отделяющих множеств, функция $z(t)$ распространяется с сохранением непрерывности (единственным образом) на весь бикомпакт Q. Получаемая функция z входит в $C_\infty(Q)$, и мы полагаем $z = F(x, y)$.

Легко видеть, что если $x, y \in C(Q)$, то и $z \in C(Q)$.

Для определенных таким образом функций от элементов множества $C_\infty(Q)$ имеет место следующая теорема о сохранении соотношений:

Пусть для вещественных непрерывных функций из равенств

$$F_1(\lambda, \mu) = F_2(\lambda, \mu), \quad G_1(\lambda, \mu) = G_2(\lambda, \mu)$$

вытекает равенство

$$H_1(\lambda, \mu) = H_2(\lambda, \mu).$$

Тогда то же утверждение остается верным, если числовые аргументы λ *и* μ *заменить на* $x, y \in C_\infty(Q)$.

В частности, если $H_1(\lambda, \mu) \equiv H_2(\lambda, \mu)$, *то* $H_1(x, y) \equiv H_2(x, y)$ *при любых* $x, y \in C_\infty(Q)$.

Доказательство очевидно*.

При помощи функции $F(\lambda, \mu) = \lambda + \mu$ мы можем определить в $C_\infty(Q)$ операцию сложения $x + y$, а посредством функции $F(\lambda) = \alpha\lambda$ (α — число) определяется произведение αx. При этом из теоремы о сохранении соотношений сразу следует, что в $C_\infty(Q)$ будут выполнены все аксиомы линейного множества.

Если в $C_\infty(Q)$ обычным образом ввести частичное упорядочение ($x > 0$, если $x(t) \geqslant 0$, но $x \neq 0$), то ясно, что $C_\infty(Q)$ будет K-линеалом. Функцию, тождественно равную 1, примем за единицу **1** этого K-линеала. Тогда $C_\infty(Q)$ оказывается K-линеалом, полным относительно (b)-сходимости. Учитывая теорему 4, делаем окончательный вывод: $C_\infty(Q)$ — *внутренне нормальный а. п. K-линеал с единицей.*

10. Максимальное расширение внутренне нормального K-линеала. Будем говорить, что множество E элементов K-линеала X полно в X, если в X не существует элемента, отличного от 0 и дизъюнктного со всеми $x \in E$.

Определение. Пусть X — внутренне нормальный а. п. K-линеал с единицей. Архимедов K-линеал Y назовем *расширением* K-линеала X, если:

1) X изоморфен некоторому подлинеалу $X_1 \subset Y$;

2) X_1 — нормальный подлинеал из Y, полный в Y;

3) если элемент $\mathbf{1}_Y \in X_1$, соответствующий при изоморфизме единице **1** K-линеала X, принять за единицу в Y, то Y окажется внутренне нормальным а. п. K-линеалом.**

Отождествим для простоты элементы K-линеала X с соответствующими им при изоморфизме элементами из X_1 и, таким образом, будем считать, что $X \subset Y$.

Пусть Y_1 и Y_2 — два расширения K-линеала X. Будем называть допустимым такое изоморфное отображение K-линеала Y_1 в Y_2 (т. е. на некоторый подлинеал из Y_2), при котором каждый элемент из X переходит сам в себя. Если такое допустимое отображение существует, то будем говорить, что Y_2 шире, чем Y_1, и записывать: $Y_1 \leqslant Y_2$.

---

* Ср. ([4]), гл. XIII, 3.21.

** Свойство внутренней нормальности K-линеала зависит от выбора в нем единицы.

Легко видеть, что допустимое отображение Y_1 в Y_2, если оно существует,— единственное. Действительно, пусть

$$y \in Y_1, \quad y > 0, \quad y_n = y \wedge n1$$

и элементу y соответствует $z \in Y_2$. Положим $z_n = z \wedge n1$ (грань вычисляется в Y_2). Так как z_n — ограниченный элемент, то $z_n \in X \subset Y_1$ и $z_n \leqslant y$. Следовательно,

$$z_n \leqslant y \wedge n1 = y_n.$$

Но так как Y_1 изоморфно подмножеству из Y_2, то ясно, что $z_n \geqslant y_n$, а потому $z_n = y_n$. Таким образом, $z = \sup y_n$ в Y_2, чем и доказывается единственность допустимого отображения.

Так как все расширения K-линеала X содержат один и тот же подлинеал ограниченных элементов $X_0 \subset X$, то все расширения могут быть реализованы, с соблюдением условий теоремы 1, на одном и том же бикомпакте Q. При этом возможна такая реализация, при которой каждый элемент K-линиала X во всех расширениях изображается одной и той же функцией. Тогда из предыдущего ясно, что если $Y_1 \leqslant Y_2$, то элементы из Y_1 и Y_2, соответствующие друг другу при допустимом отображении, изображаются одной и той же функцией. Отсюда ясно, что если одновременно $Y_1 \leqslant Y_2$ и $Y_2 \leqslant Y_1$, то допустимое отображение устанавливает изоморфизмы между Y_1 и Y_2. Кроме того, если $Y_1 \leqslant Y_2$, то образ Y_1 при допустимом отображении его в Y_2 нормально содержится в Y_2 (это вытекает из внутренней нормальности Y_1).

Определение. Расширение $\widetilde{X}$ K-линеала X назовем *максимальным*, если оно шире произвольного расширения Y K-линеала X, т. е. $Y \leqslant \widetilde{X}$.

ТЕОРЕМА 5. *Для каждого внутренне нормального а. п. K-линеала X с единицей существует его максимальное расширение, определяемое однозначно с точностью до изоморфизма. Этим максимальным расширением является максимальное расширение подлинеала $X_0 \subset X$, состоящего из всех ограниченных элементов.*

Доказательство. K-линеал X изоморфен, по теореме 1, некоторому K-линеалу $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, а подлинеал X_0 при этом соответствует $C(Q)$. Покажем, что K-линеал $C_\infty(Q)$ — максимальное расширение и X и X_0.

Ясно, что $C_\infty(Q)$ — расширение K-линеала X. Пусть Y — произвольное расширение K-линеала X_0. Тогда Y реализуется в виде некоторого $\mathfrak{C}'_\infty(Q)$. Благодаря внутренней нормальности Y, $\mathfrak{C}'_\infty(Q)$ удовлетворяет условию теоремы 4. Покажем, что каждая функция из $\mathfrak{C}'_\infty(Q)$ входит в $C_\infty(Q)$, а для этого нужно установить, что если $x \in \mathfrak{C}'_\infty(Q)$, то множество $F = Q_t(|x(t)| = +\infty)$ — отделяющее.

Допустим, что F — не отделяющее. Заметим, что $G = Q \setminus F$, как F_σ-множество, содержащееся в нормальном пространстве, само

является нормальным пространством*. Но тогда, в силу свойства 4° отделяющих множеств, существует непрерывная функция $\xi(t)$ на G (которую можно считать ограниченной), не распространимая на все Q**. Не уменьшая общности, можно также считать, что $\xi(t) \geqslant 0$. Пусть $\xi(t) \leqslant \alpha$. Функция $y(t) = |x(t)| + \alpha$ входит в $\mathfrak{C}'_\infty(Q)$, в силу линейности этого множества.

Положим

$$z(t) = \begin{cases} y(t) - \xi(t) & \text{при } t \in G, \\ +\infty & \text{при } t \in F. \end{cases}$$

Легко видеть, что $z(t)$ непрерывна и что $0 \leqslant z(t) \leqslant y(t)$. Благодаря внутренней нормальности Y функция $z \in \mathfrak{C}'_\infty(Q)$, следовательно, в $\mathfrak{C}'_\infty(Q)$ должна иметь смысл разность $y - z$. Однако при $t \in G$

$$y(t) - z(t) = \xi(t),$$

а эта функция не распространима на все Q. Полученное противоречие и доказывает, что F — отделяющее.

Из доказанного следует, что

$$\mathfrak{C}'_\infty(Q) \subset C_\infty(Q),$$

причем самим этим погружением устанавливается допустимое отображение $\mathfrak{C}'_\infty(Q)$ в $C_\infty(Q)$. Таким образом, для любого расширения Y K-линеала X_0 имеем

$$Y \leqslant C_\infty(Q),$$

т. е. $C_\infty(Q)$ — максимальное расширение K-линеала X_0.

Так как всякое расширение K-линеала X является расширением K-линеала X_0, то из проведенного рассуждения вытекает, что $C_\infty(Q)$ — максимальное расширение также и K-линеала X.

Если $\widetilde{X}$ — другое максимальное расширение K-линеала X, то одновременно $\widetilde{X} \leqslant C_\infty(Q)$ и $C_\infty(Q) \leqslant \widetilde{X}$, следовательно, по сделанному выше замечанию, $\widetilde{X}$ изоморфно $C_\infty(Q)$.

Теорема полностью доказана.

В связи с доказанной теоремой сделаем некоторые замечания. Прежде всего, можно установить, что если бикомпакт Q в точке t_0 имеет не более чем счетный вес, то множество (t_0), состоящее из одной точки t_0,

---

* Это проверяется следующим образом. Пусть A_1, $A_2 \subset G$ — дизъюнктные, замкнутые в G множества. Так как G — типа F_σ, то A_1 и A_2 — типа F_σ в Q. Кроме того,

$$A_1 \cap Q[A_2] = A_2 \cap Q[A_1] = \Lambda,$$

т. е. A_1 и A_2 являются отделенными в смысле П. С. Урысона. Тогда по одной лемме Урысона [см. ([6]), т. I, стр. 202] A_1 и A_2 отделимы в Q открытыми множествами G_1 и G_2. Заменяя G_1 и G_2 их пересечениями с G, мы установим отделимость A_1 и A_2 открытыми множествами в G.

** При помощи известного преобразования $y = \frac{x}{1 + |x|}$ легко убедиться, что для распространимости с G на Q всех непрерывных функций достаточно возможности распространить все ограниченные непрерывные функции.

не может быть отделяющим нигде не плотным. Отсюда сразу следует, что если бикомпакт Q в каждой точке не более чем счетного веса, то $C_\infty(Q) = C(Q)$, т. е. K-линеал $C(Q)$ не имеет нетривиального (отличного от него самого) расширения.

Последний вывод становится неверным, если из определения расширения исключить требование его внутренней нормальности. Именно, можно показать, что на всяком бикомпакте Q, в котором есть непустое, нигде не плотное, замкнутое множество F типа G_δ, можно построить K-линеал, содержащий все $C(Q)$ и некоторые неограниченные непрерывные функции. Для этого достаточно взять функцию $y(t) \geqslant 0$, для которой $Q_t(y(t) = +\infty) = F$, и образовать множество линейных комбинаций вида $x + \alpha y$, где $x \in C(Q)$.

Заметим, что каждое K-пространство X с единицей внутренне нормально и реализуется на экстремальном бикомпакте Q, а в этом случае $C_\infty(Q)$ — тоже K-пространство. Поэтому в теореме 5 содержится для случая K-пространства с единицей теорема А. Г. Пинскера о существовании максимального расширения, доказанная им для произвольного K-пространства [ср. ([4]), гл. IV, 2.45].

§ 4. Непрерывные функции от элементов K-линеала

11. Определение функций*. Пусть X — внутренне нормальный а. п. K-линеал с единицей 1, образом которого при реализации на некотором бикомпакте Q является, согласно теореме 1, весь K-линеал $C_\infty(Q)$. Такой K-линеал назовем максимальным. Получаемое при этом изоморфное отображение K-линеала X на $C_\infty(Q)$ обозначим через h:

$$x' = hx \quad (x \in X,\ x' \in C_\infty(Q)).$$

Пусть $F(\lambda, \mu)$ — вещественная непрерывная функция от вещественных переменных, $-\infty < \lambda,\ \mu < +\infty$. В § 3 (п. 9) уже было дано определение порожденной ею функции $F(x', y')$ для любых $x', y' \in C_\infty(Q)$. Теперь же для любых $x, y \in X$ положим

$$F(x, y) = h^{-1}F[h(x),\ h(y)].$$

На основании теоремы 2 о единственности реализации, можно заключить, что это определение функции $F(x, y)$ не зависит от изоморфизма h. Действительно, теорема 2 и заключается в том, что изоморфизм h определяется однозначно с точностью до переименования точек бикомпакта Q. Кроме того, отметим, что для ограниченных элементов x и y значение функции $F(x, y)$ — также ограниченный элемент. В K-линеале X верна теорема о сохранении соотношений, сформулированная в п. 9 для K-линеала $C_\infty(Q)$. Заметим, что сумма $x + y$ и произведение αx (α — число), определяемые в K-линеале X как функции (через вещественные функции $\lambda + \mu$ и $\alpha\lambda$), совпадают, соответственно, с суммой

* Как и в п. 9 § 3, мы ведем изложение для функций двух переменных. Приводимое ниже определение функций было предложено М. Г. Крейном и С. Г. Крейном ([5]) в K-линеале ограниченных элементов.

$x+y$ и произведением αx, определяемыми в K-линеале X с самого начала, как в линейном множестве.

В дополнение к этим алгебраическим операциям в K-линеале X можно, исходя из непрерывной функции $F(\lambda, \mu)=\lambda\mu$, определить операцию умножения xy элемента на элемент. Из теоремы о сохранении соотношений сразу следует, что тогда X превращается в коммутативное кольцо, причем единица 1 K-линеала будет единицей умножения. Умножение будет также обладать тем свойством, что если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то и $xy \geqslant 0$.

Если образ K-линеала X при отображении на $C_\infty(Q)$ не исчерпывает всего $C_\infty(Q)$, то можно сохранить данное выше определение $F(x, y)$, но считать, что оно имеет смысл только в том случае, когда $F(h(x), h(y)]$ входит в образ K-линеала X. Если при этом X содержит неограниченные элементы, то существенный интерес представляет рассмотрение лишь функций, возрастающих по модулю (в широком смысле) по отношению к модулю каждого аргумента. К таким функциям относится, например, произведение. Рассмотрению произведения в произвольном внутренне нормальном а. п. K-линеале с единицей и вопросу о превращении K-линеала в полуупорядоченное кольцо в некотором обобщенном смысле посвящается отдельная статья автора.

Заметим, что методом, изложенным в настоящем пункте, можно изучить и некоторые разрывные функции, в частности функции, рассматривавшиеся в работе М. Ф. Широхова ([7]).

12. Зависимость функций от выбора единицы в K-линеале. Так как характер реализации K-линеала X на бикомпакте (как вид функции, соответствующей данному $x \in X$, так и весь бикомпакт Q в целом) зависит от выбора единицы в X, то и определение функции, даннное в предыдущем пункте, вообще говоря, также зависит от выбора единицы. Исследуем характер этой зависимости, а также найдем, какие функции не зависят от выбора единицы.

Пусть X — максимальный а. п. K-линеал с единицей 1. Возьмем такой элемент $\eta \in X$, что $\eta(t)>0$ на множестве, плотном в Q, и примем его за новую единицу в X. Если теперь заново построить, в соответствии с теоремой 1, реализацию K-линеала X, то, вообще говоря, эта реализация осуществится на другом бикомпакте *.

Допустим, что множество $F=Q_t(\eta(t)=0)$ — отделяющее **. Это означает, что в X (с единицей 1) существует элемент η^{-1}, обратный для η, т. е. такой, что $\eta\eta^{-1}=1$ ***. Положим

$$G=Q_t(0<\eta(t)<+\infty), \quad F_1=Q_t(\eta(t)=+\infty).$$

Так как F_1 — отделяющее множество, а $G=Q\setminus(F \cup F_1)$, то G — открытое, плотное в Q множество, дополнение которого — отделяющее, нигде не плотное.

* Легко показать, что этим бикомпактом будет максимальное бикомпактное расширение подпространства бикомпакта Q, состоящее из точек, где $0<\eta(t)<+\infty$.

** Если X — K-пространство, то это условие выполняется автоматически.

*** Элемент η^{-1} легко определяется через функцию $\eta^{-1}(t)=\frac{1}{\eta(t)}$.

Для каждого $x \in X$ положим

$$\bar{x}(t) = \frac{x(t)}{\eta(t)}, \quad \text{если } t \in G\ ^*,$$

Полученную непрерывную на G функцию $\bar{x}(t)$ можно распространить с сохранением непрерывности на все Q (см. п. 8). В результате мы получаем некоторое представление K-линеала X посредством функций $\bar{x}(t)$ на том же бикомпакте Q. При этом функции $\bar{x}(t)$ входят в $C_\infty(Q)$, так как для каждой из них множество $Q_t(\bar{x}(t) = \pm\infty)$ — отделяющее, нигде не плотное. Более того, легко видеть, что среди функций $\bar{x}(t)$ встречаются все функции из $C_\infty(Q)$.

Ясно, что соответствие $x \leftrightarrow \bar{x}(t)$ — изоморфизм между K-линеалом X и $C_\infty(Q)$, причем новой единице η соответствует функция $\bar{\eta}(t) \equiv 1$. Таким образом, этот изоморфизм и есть представление K-линеала X с новой единицей η, удовлетворяющее всем требованиям теоремы 1.

Введем следующие обозначения: если $F(\lambda, \mu)$ — вещественная непрерывная функция, а $F(x, y)$ — порожденная ею функция от элементов $x, y \in X$, построенная, когда в нем была выбрана первая единица 1, то через $F_\eta(x, y)$ обозначим функцию, порожденную той же $F(\lambda, \mu)$, но при условии, что за единицу взят элемент η.

ТЕОРЕМА 6. *Существует такое изоморфное отображение K-линеала X на самого себя $x' = g(x)$, что для любых $x, y \in X$*

$$g[F(x, y)] = F_\eta[g(x), g(y)].$$

Доказательство. Положим $g(x) = x\eta$, где $x\eta$ — произведение, определенное при первом выборе единицы 1 в X. Так как $\eta > 0$ и существует $\eta^{-1} > 0$, то ясно, что формула $x' = x\eta$ устанавливает изоморфное отображение X на самого себя.

Как и выше, для произвольного $x \in X$ обозначим через $x(t)$ функцию, являющуюся образом элемента x при реализации K-линеала X с единицей 1, а через $\bar{x}(t)$ — функцию, являющуюся образом того же x при реализации X с единицей η. Тогда если $x' = x\eta$, то при всяком t, при котором $x(t)$ конечна, а $0 < \eta(t) < +\infty$,

$$x'(t) = x(t)\,\eta(x), \quad \bar{x}'(t) = \frac{x'(t)}{\eta(t)} = x(t).$$

Пусть $x, y \in X$, $z = F(x, y)$, $x' = x\eta$, $y' = y\eta$, $z' = z\eta$, $z^* = F_\eta(x', y')$. В каждой точке t, где $x(t)$ и $y(t)$ конечны и $0 < \eta(t) < +\infty$,

$$\bar{z}^*(t) = F[\bar{x}'(t), \bar{y}'(t)] = F[x(t), y(t)] = z(t);$$

с другой стороны,

$$z^*(t) = \bar{z}^*(t)\,\eta(t),$$

следовательно, $z^*(t) = z(t)\,\eta(t)$, т. е. $z^* = z\eta = z'$, что и доказывает теорему.

Замечание. Если X — а. п. K-линеал ограниченных элементов с единицей 1, а за новую единицу выбран такой элемент η, что $a1 \leqslant \eta \leqslant b1$ $(a > 0)$, то и с новой единицей X будет а. п. K-линеалом

* В точках, где $x(t) = \pm\infty$, считаем и $\bar{x}(t) = \pm\infty$.

ограниченных элементов. В этом случае заключение теоремы 6 остается в силе.

Сохраним употреблявшиеся ранее обозначения для следующей теоремы и ее доказательства.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть X — максимальный а. п. K-линеал с единицей* 1. *Для того чтобы при любом выборе новой единицы η такой*, что η^{-1} *существует, равенство $F(x, y) = F_\eta(x, y)$ имело место для любых $x, y \in X$, необходимо и достаточно, чтобы вещественная функция $F(\lambda, \mu)$ была однородной функцией первой степени относительно положительных множителей.* *

Доказательство. Положим $z = F(x, y)$, $z^* = F_\eta(x, y)$.

а) Необходимость. Возьмем за новую единицу $\eta = \alpha 1$, где $\alpha > 0$ — произвольное. Тогда при новой реализации K-линеала X имеем всюду, где $x(t)$ и $y(t)$ конечны:

$$\bar{z}^*(t) = F[\bar{x}(t), \bar{y}(t)] = F\left[\frac{x(t)}{\alpha}, y\frac{(t)}{\alpha}\right].$$

С другой стороны, так как $z^* = z$, то

$$\bar{z}^*(t) = \bar{z}(t) = \frac{z(t)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} F[x(t), y(t)],$$

что и доказывает однородность первой степени функции $F(\lambda, \mu)$ (относительно положительных α).

б) Достаточность. Благодаря однородности функции $F(\lambda, \mu)$, при любом η в тех точках, где $x(t)$ и $y(t)$ конечны и $0 < \eta(t) < +\infty$, имеем:

$$\bar{z}^*(t) = F[\bar{x}(t), \bar{y}(t)] = F\left[\frac{x(t)}{\eta(t)}, \frac{y(t)}{\eta(t)}\right] = \frac{1}{\eta(t)} F[x(t), y(t)] = \frac{z(t)}{\eta(t)} = \bar{z}(t),$$

т. е. $z^* = z$.

13. **Эквивалентность непосредственного определения функций на K-линеале и их определения при помощи пополнения K-линеала до K-пространства.** Пусть X — максимальный а. п. K-линеал с единицей 1, реализуемый на бикомпакте Q. По теореме А. И. Юдина, X можно пополнить до K-пространства X^* с той же единицей 1, которое реализуется в виде множества $\mathfrak{C}_\infty(R)$ непрерывных функций на некотором бикомпакте R. При этом, как выяснено в § 1 (по ходу доказательства теоремы 1), если в R склеить точки τ, неразличимые посредством тех функций $\tilde{x}(\tau)$, которые соответствуют элементам $x \in X$, то мы снова получим бикомпакт Q. При этом сами функции $\tilde{x}(\tau)$ порождают непрерывные функции $x(t)$ на бикомпакте Q, которые и образуют K-линеал $C_\infty(Q)$, являющийся образом K-линеала X. По заданной вещественной непрерывной функции $F(\lambda, \mu)$ в K-линеале можно определить функцию $F(x, y)$. Независимо от этого, исходя из той же функции $F(\lambda, \mu)$, можно определить функцию в K-пространстве X^*, которую, в отличие от первой, обозначим через $F^*(x, y)$. Покажем, что для $x, y \in X$

* В части достаточности эта теорема была доказана в ([8]) для функций в пространстве функционалов и в ([4]) в любых K-пространствах. Эта теорема в части достаточности упоминается также в ([5]) для K-линеала ограниченных элементов.

$$F(x, y) = F^*(x, y),$$

т. е. на K-линеале X оба определения совпадают.

Возьмем $x, y \in X$. Положим

$$G = Q_t(x(t) \neq \pm\infty) \cap Q_t(y(t) \neq \pm\infty),$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — образы x и y в $C_\infty(Q)$. Обозначим через ψ упомянутую выше операцию склеивания бикомпакта R. Тогда ψ есть непрерывное отображение R на Q. Пусть $H = \psi^{-1}(G)$. Если $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{y}(t)$ — образы элементов x и y, получаемые при реализации X^* на бикомпакте R, то для любого $\tau \in R$ $x[\psi(\tau)] = \tilde{x}(\tau)$, $y[\psi(\tau)] = \tilde{y}(\tau)$. Следовательно, $H = R_\tau(\tilde{x}(\tau) \neq \pm\infty) \cap R_\tau(\tilde{y}(\tau) \neq \pm\infty)$, причем, если $\tau \in H$, а $t = \psi(\tau)$, то

$$F[x(t), y(t)] = F(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)). \qquad (*)$$

Пусть $z = F(x, y)\,(z \in X)$, $u = F^*(x, y)\,(u \in X^*)$, $z(t)$ — образ z в $C_\infty(Q)$, $\tilde{u}(\tau)$ — образ u в $\mathfrak{C}_\infty(R)$. Равенство $(*)$ означает, что при всех $\tau \in H$

$$z[\psi(\tau)] = \tilde{u}(\tau).$$

Но так как функции $z(t)$ и $\tilde{u}(\tau)$ непрерывны на всем Q и R (соответственно), то последнее соотношение между ними имеет место при всех $\tau \in R$, а это, в свою очередь, означает, что $\tilde{u}(\tau)$ есть образ элемента z, получаемый при реализации K-пространства X^* на бикомпакте R, т. е. $z = u$.

Совпадение функций на X^* доказано.

Поступило
16.V.1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров П. С., О понятии пространства в топологии, Успехи матем. наук, II (1947), вып. 1, 3—57.

[2] Вулих Б. З., О конкретном представлении полуупорядоченных линеалов, Доклады Ак. Наук СССР, LXXVIII (1951), 189—192.

[3] Вулих Б. З., О распространении непрерывных функций в топологических пространствах, Матем. сб., 30 (1952), 167—170.

[4] Канторович Л. В., Вулих Б. З. и Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М., Гостехиздат, 1950.

[5] Крейн М. Г. и Крейн С. Г., О пространстве непрерывных функций, определенных на бикомпакте, и его полуупорядоченных подпространствах, Матем. сб., 13 (1943), 1—38.

[6] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, М., Гостехиздат, 1951.

[7] Широхов М. Ф., Функции от элементов полуупорядоченных пространств, Доклады Ак. Наук СССР, LXXIV (1950), 1057—1060.

[8] Рисс Ф., О некоторых основных понятиях общей теории линейных функционалов, Успехи матем. наук, I, вып. 2 (1946), 147—178.

[9] Stone M. H., Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937), 375—481.

[10] Yosida K., On the representation of the vector lattice, Proc. Acad. Tokyo, 18 (1942), 339—342.

[11] Stone M., Реферат работы ([10]), Math. Reviews, v. 7, No 9 (1946), 409.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 389—400

Н. М. КОРОБОВ

МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе излагается новый единый метод, позволяющий решить ряд задач о распределении дробных долей показательных функций и произведений показательных функций на полиномы.

За последние два года мною был опубликован (частью без доказательств) ряд результатов по различным вопросам равномерного распределения. Сюда относится построение чисел $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$, для которых равномерно распределены следующие функции и системы функций:

$$\alpha\beta^x, \tag{1}$$

$$\alpha q^x f_1(x), \ldots, \alpha q^x f_s(x), \tag{2}$$

$$\alpha_1 q^x, \ldots, \alpha_s q^x; \tag{3}$$

здесь $\beta > 1$ — число Пизо, $q \geqslant 2$ — целое, $s \geqslant 1$, $f_\nu(x)$ — целочисленные полиномы, линейная комбинация которых $m_1 f_1(x) + \cdots + m_s f_s(x)$ отлична от константы при любом выборе целых $m_1, \cdots, m_s$, не равных одновременно нулю [см. ([2]) теорема 3, ([3]) теорема 2, ([4]) теоремы 1 и 3].

Каждая из этих задач представлялась в то время не связанной с остальными и требовала своего метода решения.

В настоящей работе изложен новый метод, позволяющий получить сразу как все перечисленные выше результаты, так и некоторые другие. При помощи указанного метода строятся величины $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$, для которых равномерно распределены системы функций

$$\alpha\lambda^x f_1(x), \ldots, \alpha\lambda^x f_s(x) \tag{4}$$

и

$$\alpha_1\lambda^x f(x), \ldots, \alpha_s\lambda^x f(x) \tag{5}$$

($s \geqslant 1$, $\lambda > 1$ — целое число или число Пизо, $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ — произвольная система линейно независимых целочисленных полиномов, $f(x)$ — произвольный целочисленный полином, не обращающийся тождественно в нуль).

Результат (1) получается из (4) или (5) при $s = 1$ и $\lambda = \beta$ в случае, когда полином $f_1(x)$ (соответственно $f(x)$) тождественно равен единице. Результат (2) получается из (4) при $\lambda = q$, причем указанное в (2) требование отличия от константы линейной комбинации полиномов $f_1(x), \ldots$ $\ldots, f_s(x)$ оказывается излишним и заменяется естественным требованием линейной независимости этих полиномов. Наконец, результат (3) есть частный случай (5), получающийся при $\lambda = q$ и $f(x) \equiv 1$. Следует отметить,

что величины α, получающиеся в (4), не зависят от числа измерений s и от выбора полиномов $f_1(x),\ldots, f_s(x)$; величины $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ в (5) также не зависят от выбора полиномов.

§ 1. Пусть $n \geqslant 1$, $a_1,\ldots,a_n$ — целые, $a_n \neq 0$. Рассмотрим рекуррентные последовательности $\psi(1), \psi(2),\ldots, \psi(x),\ldots$, определяемые для $x > n$ соотношением

$$\psi(x) = a_1 \psi(x-1) + \cdots + a_n \psi(x-n). \tag{6}$$

В качестве начальных членов $\psi(1),\ldots,\psi(n)$ выберем произвольные целые числа. В силу целочисленности начальных членов и коэффициентов уравнения (6) все члены рекуррентных последовательностей также будут целыми часлами. Докажем, прежде всего, две несложные леммы.

ЛЕММА 1. *Наименьшие неотрицательные вычеты рекуррентных последовательностей периодичны по любому модулю p, взаимно простому с a_n.*

Действительно, пусть $\psi(x) \equiv \delta_x \pmod p$, где $0 \leqslant \delta_x \leqslant p-1$. Выпишем последовательность вычетов

$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\delta_{n+1}\ldots\delta_{x+1}\ldots\delta_{x+n}\ldots \tag{7}$$

и рассмотрим n-значные комбинации, образованные ее соседними знаками

$$\delta_1\ldots\delta_n, \delta_2\ldots\delta_{n+1}\ldots\delta_{x+1}\ldots\delta_{x+n},\ldots . \tag{8}$$

Комбинации знаков (8) можно рассматривать как n-значные числа в p-ичной системе счисления. Число различных n-значных чисел равно p^n, следовательно, найдутся значения x_1 и $x_2 (0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant p^n)$ такие, что числа $\delta_{x_1+1}\ldots\delta_{x_1+n}$ и $\delta_{x_2+1}\ldots\delta_{x_2+n}$ будут равны. Положим $\omega = x_2 - x_1$ тогда из равенства

$$\delta_{x_1+1}\ldots\delta_{x_1+n} = \delta_{x_2+1}\ldots\delta_{x_2+n}$$

следует, что

$$\delta_{x_1+i} = \delta_{x_1+i+\omega} \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Заменим в (6) x на $x+n+1$ и перейдем от равенства к сравнению:

$$\delta_{x+n+1} \equiv a_1 \delta_{x+n} + \cdots + a_n \delta_{x+1} \pmod p. \tag{9}$$

Пользуясь тем, что

$$a_1 \delta_{x_1+n} + \cdots + a_n \delta_{x_1+1} = a_1 \delta_{x_1+n+\omega} + \cdots + a_n \delta_{x_1+1+\omega},$$

получим из (9)

$$\delta_{x_1+n+1} \equiv \delta_{x_1+n+1+\omega} \pmod p$$

и, значит,

$$\delta_{x_1+n+1} = \delta_{x_1+n+1+\omega}.$$

Аналогично получим

$$\delta_{x_1+n+2} = \delta_{x_1+n+2+\omega}, \delta_{x_1+n+3} = \delta_{x_1+n+3+\omega},\ldots,$$

так что для всех $x > x_1$ будет

$$\delta_{x+\omega} = \delta_x. \tag{10}$$

Заменим в (9) x на $x-1$ и выразим δ_x через $\delta_{x+1},\ldots,\delta_{x+n}$ (это возможно в силу взаимной простоты p и a_n). Повторяя теперь для $x = x_1$, $x_1 - 1,\ldots, 1$ прежние рассуждения, убедимся в справедливости равенства

(10) также и для $x \leqslant x_1$. Таким образом, последовательность вычетов имеет период $\omega \leqslant p^n$.

Замечание. Легко показать, что имеет место строгое неравенство $\omega < p^n$. Действительно, допустим, что $\omega = p^n$. Тогда в последовательности (7) встретится каждое n-значное число и, в частности, число $\underbrace{0 \cdots 0}_{n}$, состоящее из одних нулей. Но тогда, в силу (9), все члены последовательности вычетов будут равны нулю и, следовательно, $\omega = 1$, что противоречит допущению.

Будем в дальнейшем через $\omega \leqslant p^n - 1$ обозначать наименьший положительный период последовательности (7) и называть ω наименьшим периодом рекуррентной функции $\psi(x)$ по модулю p.

ЛЕММА 2. *Пусть N — число решений сравнения*

$$\psi(x) \equiv o \,(\mathrm{mod}\, p), \quad x = 1,2,\ldots,\omega.$$

Тогда в рекуррентной последовательности $\psi(1), \psi(2), \ldots, \psi(x), \ldots$ можно так выбрать начальные члены $\psi(1), \ldots, \psi(n)$, что для N будет выполняться оценка: $N \leqslant \left[\frac{\omega}{p}\right]$.

Доказательство. Пусть $\delta_{11} \ldots \delta_{1n}$ — какое-нибудь n-значное число в p-ичной системе счисления. Выберем $\psi(1) = \delta_{11}, \ldots, \psi(n) = \delta_{1n}$. Пусть для $x > n$

$$\psi(x) \equiv \delta_{1x} \,(\mathrm{mod}\, p), \tag{11}$$

где $0 \leqslant \delta_{1x} \leqslant p - 1$. В силу выбора $\psi(i)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, сравнение (11) будет выполняться не только для $x > n$, но и для всех $x \geqslant 1$. Обозначим через ω_1 наименьший положительный период последовательности вычетов и выпишем первые $\omega_1 + n - 1$ членов этой последовательности:

$$\delta_{11} \cdots \delta_{1n-1}\, \delta_{1n} \cdots \delta_{1\omega_1}\, \delta_{11} \cdots \delta_{1n-1}. \tag{12}$$

Из доказательства леммы 1 (так как ω_1 — наименьший период) следует, что все содержащиеся в (12) n-значные числа

$$\delta_{11}\, \delta_{12} \cdots \delta_{1n},\ \delta_{12}\, \delta_{13} \cdots \delta_{1n+1},\ \cdots,\ \delta_{1\omega_1}\, \delta_{11} \cdots \delta_{1n-1}$$

будут различны. Так как $\omega_1 \leqslant p^n - 1$, то найдется хотя бы одно n-значное число $\delta_{21} \cdots \delta_{2n}$, не встречающееся в последовательности (12). Выберем знаки этого числа в качестве начальных значений новой рекуррентной последовательности и, подобно тому как это было сделано выше, выпишем $\omega_2 + n - 1$ первых членов соответствующей последовательности вычетов:

$$\delta_{21} \cdots \delta_{2n-1}\, \delta_{2n} \cdots \delta_{2\omega_2}\, \delta_{21} \cdots \delta_{2n-1}. \tag{13}$$

Строки (12) и (13) не содержат ни одного общего n-значного числа. Действительно, если бы имело место равенство

$$\delta_{2k+1} \ldots \delta_{2k+n} = \delta_{1i+1} \ldots \delta_{1i+n} \quad (0 \leqslant i \leqslant \omega_1 - 1;\ \ 0 \leqslant k \leqslant \omega_2 - 1), \tag{14}$$

то в силу (9) и для любого $t \geqslant 0$ было бы

$$\delta_{2k+t+1} \cdots \delta_{2k+t+n} = \delta_{1i+t+1} \cdots \delta_{1i+t+n}.$$

Результат, получающийся отсюда при $t = \omega_2 - k$, противоречит выбору числа $\delta_{21} \ldots \delta_{2n}$. Следовательно, равенство (14) невозможно и все n-значные числа, встречающиеся в (12) и (13), различны.

Если найдется число $\delta_{31}\ldots\delta_{3n}$, не встречающееся в строках (12) и (13), то построим новую строку и будем повторять указанный процесс до тех пор, пока не получим совокупность строк

$$\left.\begin{array}{l|l} \delta_{11}\ldots\delta_{1n-1}\ldots\delta_{1\omega_1} & \delta_{11}\ldots\delta_{1n-1} \\ \delta_{21}\ldots\delta_{2n-1}\ldots\delta_{2\omega_2} & \delta_{21}\ldots\delta_{2n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{j}\ldots\delta_{jn-1}\ldots\delta_{j\omega_j} & \delta_{j1}\ldots\delta_{jn-1} \end{array}\right\}, \tag{15}$$

в которой содержатся (очевидно, без повторений) все существующие в p-ичной системе счисления n-значные числа.

Каждая из $\omega_1+\cdots+\omega_j$ величин δ_{ik}, расположенных в левой части таблицы (15) ($i=1, 2, \ldots, j$; $k=1, 2, \ldots, \omega_i$), является первым знаком одного из p^n различных n-значных чисел, следовательно, каждый из знаков $0, 1, \ldots, p-1$ встречается в указанной части таблицы одинаковое число раз, равное p^{n-1}.

Обозначим через N_i число нулей в i-й строке левой части таблицы (15). Допустим, что для каждого $i=1, 2, \ldots, j$

$$N_i > \frac{\omega_i}{p}.$$

Тогда получим

$$p^{n-1} = \sum_{i=1}^{j} N_i > \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{j}\omega_i = p^{n-1},$$

что противоречиво. Таким образом найдется $i\,(1\leqslant i\leqslant j)$, при котором $N_i \leqslant \frac{\omega_i}{p}$ и, следовательно,

$$N_i \leqslant \left[\frac{\omega_i}{p}\right]. \tag{16}$$

Обозначим через $\psi^{(i)}(x)$ общий член той из рекуррентных последовательностей, первые n членов которой равны соответственно $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in}$. Очевидно, N_i будет равно числу решений сравнения

$$\psi^{(i)}(x)\equiv 0 \pmod p, \quad x=1, 2, \ldots, \omega_i,$$

чем, в силу (16), лемма доказана.

Замечание. Оценка $N\leqslant\left[\frac{\omega}{p}\right]$, указанная в лемме 2, в общем случае не допускает улучшения. Действительно, покажем, что существуют рекуррентные последовательности, для которых при любом выборе начальных членов будет $N\geqslant\left[\frac{\omega}{p}\right]$. Рассмотрим случай $n=2$, $a_1=a_2=1$:

$$\psi(x)=\psi(x-1)+\psi(x-2)$$

при модуле $p=7$. Таблицу (15) в этом случае можно записать так:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0&1&1&2&3&5&1&6&0&6&6&5&4&2&6&1&0 \\ 0&2&2&4&6&3&2&5&0&5&5&3&1&4&5&2&0 \\ 0&3&3&6&2&1&3&4&0&4&4&1&5&6&4&3&0 \\ &&&&&&&&&&&&&&&0&0 \end{array}$$

Здесь $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 16$, $\omega_4 = 1$, $N_1 = N_2 = N_3 = 2$, $N_4 = 1$. Таким образом, $N_i = \left[\frac{\omega_i}{p}\right]$ для $i = 1, 2, 3$ и $N_i > \left[\frac{\omega_i}{p}\right]$ для $i = 4$.

§ 2. Пусть, как и раньше, для $n \geqslant 1$ задана целочисленная рекуррентная функция $\psi(x)$:

$$\psi(x) = a_1\psi(x-1) + \cdots + a_n\psi(x-n), \quad \psi(i) = \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$0 \leqslant \delta_i \leqslant p-1,$$

причем хотя бы одна из величин δ_i отлична от нуля.

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения

$$\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{17}$$

Будем предполагать, что все корни уравнения (17) различны и что для величин $\lambda = \lambda_1$ и $\theta = \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$ выполняются неравенства $\lambda > 1$, $\theta < 1$. Таким образом, при $n = 1$ λ — целое число, большее единицы, при $n \geqslant 2$ λ — число Пизо.

Введем обозначения:

1. $\tau > 0$ — любое целое, удовлетворяющее условиям

$$\psi(x+\tau) \equiv \psi(x) \pmod p, \quad \tau \equiv 0 \pmod p,$$

где p — простое $(p > |a_n|)$.

2. N — число решений сравнения

$$\psi(x) \equiv 0 \pmod p, \quad x = 1, 2, \ldots, \tau.$$

3. $f(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n'}x^{n'}$ — целочисленный полином степени $n' \geqslant 0$, не равный тождественно нулю по модулю p.

Будем считать, что при возрастании p целые

$$n, n', a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_{n'} \tag{18}$$

сохраняют постоянные значения.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Для всякого простого p при любых целых $a \geqslant 0$ и $r \geqslant 1$ выполняется оценка*

$$\left|\sum_{x=1}^{rp\tau} e^{2\pi i \frac{\psi(x) f(a+x)}{p(\lambda^\tau - 1)}}\right| < Cr\,[Np + \tau + p\ln(a + r\tau)],$$

где C — константа, зависящая только от величин (18) *.

Доказательство. Разобьем интервал суммирования в сумме

$$S = \sum_{x=1}^{rp\tau} e^{2\pi i \frac{\psi(x) f(a+x)}{p(\lambda^\tau - 1)}}$$

на части длины τ:

$$S = \sum_{y=0}^{rp-1} \sum_{z=1}^{\tau} e^{2\pi i \frac{\psi(z+y\tau) f(a+z+y\tau)}{p(\lambda^\tau - 1)}} \tag{19}$$

Для преобразования внутренней суммы воспользуемся некоторыми свойствами функции $\psi(x)$. Так как корни характеристического уравнения (17) различны, то [см., например, ([1])]

$$\psi(x) = A_1\lambda_1^x + A_2\lambda_2^x + \cdots + A_n\lambda_n^x. \tag{20}$$

---

* Очевидно, τ возрастает с ростом p; величины a и r также могут возрастать.

Полагая здесь $x = 1, 2, \ldots, n$ и решая полученную систему линейных относительно $A_1, \ldots, A_n$ уравнений, придем к равенствам

$$A_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_n \\ \ldots\ldots \\ \lambda_1^n \ldots \lambda_n^n \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}\, \delta_1\, \lambda_{i+1} \ldots \lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^n \ldots \lambda_{i-1}^n\, \delta_n\, \lambda_{i+1}^n \ldots \lambda_n^n \end{vmatrix}.$$

Будем применять равенство $A = O(B)$ в тех случаях, когда $|A| < C|B|$, где константа C зависит только от величин (18). Из (21) для $i = 1, 2, \ldots, n$ получим

$$A_i = O(\max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \delta_\nu) = O(p).$$

Положим $A_1 = \gamma$; тогда равенство (20) примет вид:

$$\psi(x) = \gamma\lambda^x + O(p\theta^x), \quad \gamma = O(p). \tag{22}$$

Заменим здесь x на $z + \nu\tau$ и просуммируем по ν:

$$\psi(z + \nu\tau) = \gamma\lambda^{z+\nu\tau} + O(p\theta^{z+\nu\tau}),$$

$$\sum_{\nu=0}^{y-1} \psi(z + \nu\tau) = \gamma\frac{\lambda^{z+y\tau} - \lambda^z}{\lambda^\tau - 1} + O(p\theta^z) = \frac{\gamma\lambda^{z+y\tau}}{\lambda^\tau - 1} + O(p\theta^z + p\lambda^{z-\tau}).$$

Деля это равенство на p и применяя соотношение (22) к $\gamma\lambda^{z+y\tau}$, получим:

$$\frac{\psi(z + y\tau)}{p(\lambda^\tau - 1)} = \sum_{\nu=0}^{y-1} \frac{\psi(z + \nu\tau)}{p} + O(\theta^z + \lambda^{z-\tau}).$$

В силу определения τ,

$$\psi(z + \nu\tau) \equiv \psi(z) \pmod p \quad \text{и} \quad f(a + z + y\tau) \equiv f(a + z) \pmod p;$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\psi(z + y\tau)}{p(\lambda^\tau - 1)} &= T + \frac{y\psi(z)}{p} + O(\theta^z + \lambda^{z-\tau}), \\ \frac{\psi(z + y\tau) f(a + z + y\tau)}{p(\lambda^\tau - 1)} &= T_1 + \frac{y\psi(z) f(a + z)}{p} + R_{yz}, \end{aligned} \tag{23}$$

где T и T_1 — целые числа (зависящие от y и z) и

$$R_{yz} = O\left((\theta^z + \lambda^{z-\tau}) \max_{y,\, z} |f(a + z + y\tau)|\right). \tag{24}$$

Пусть некоторые действительные функции F_1, F_2 и R связаны равенством $F_1 = F_2 + R$; тогда

$$\left|\sum_z e^{2\pi i F_1(z)} - e^{2\pi i F_2(z)}\right| \leqslant \sum_z |e^{2\pi i R(z)} - 1| = 2\sum_z |\sin \pi R(z)|,$$

$$\sum_z e^{2\pi i F_1(z)} = \sum_z e^{2\pi i F_2(z)} + O\left(\sum_z |\sin \pi R(z)|\right). \tag{25}$$

Применяя это соотношение к функциям

$$F_1 = \frac{\psi(z + y\tau) f(a + z + y\tau)}{p(\lambda^\tau - 1)}, \quad F_2 = T_1 + \frac{y\psi(z) f(a + z)}{p},$$

в силу (23) получим:

$$\sum_{z=1}^{\tau} e^{2\pi i \frac{\psi(z+y\tau) f(a+z+y\tau)}{p(\lambda^{\tau}-1)}} = \sum_{z=1}^{\tau} e^{2\pi i \frac{y\psi(z) f(a+z)}{p}} + O\Big(\sum_{z=1}^{\tau} |\sin \pi R_{yz}|\Big).$$

Суммирование по y и использование равенства (19) дают:

$$S = \sum_{z=1}^{\tau} \sum_{y=0}^{rp-1} e^{2\pi i \frac{y\psi(z) f(a+z)}{p}} + O\Big(\sum_{y=0}^{rp-1} \sum_{z=1}^{\tau} |\sin \pi R_{yz}|\Big). \qquad (26)$$

Пользуясь тем, что при y, пробегающем полную систему вычетов по модулю p,

$$\sum_{y} e^{2\pi i \frac{yt}{p}} = \begin{cases} p & \text{при } t \equiv 0 \pmod p, \\ 0 & \text{при } t \not\equiv 0 \pmod p, \end{cases}$$

получим:

$$\sum_{z=1}^{\tau} \sum_{y=0}^{rp-1} e^{2\pi i \frac{y\psi(z) f(a+z)}{p}} = N_1 rp,$$

где N_1 — число решений сравнения

$$\psi(z) f(a+z) \equiv 0 \pmod p, \quad z = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Обозначим через N_2 число решений сравнения

$$f(a+z) \equiv 0 \pmod p, \quad z = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Очевидно,

$$N_2 \leqslant n' \frac{\tau}{p} = O\Big(\frac{\tau}{p}\Big).$$

Согласно определению величин N, N_1 и N_2, получим:

$$N_1 \leqslant N + N_2 = O\Big(N + \frac{\tau}{p}\Big)$$

и, следовательно, равенство (26) примет вид:

$$S = O\Big(rpN + r\tau + \sum_{y=0}^{rp-1} \sum_{z=1}^{\tau} |\sin \pi R_{yz}|\Big).$$

Определим h_1 и h_2 из условий

$$\theta^{h_1} \max_{y,\,z} |f(a+z+y\tau)| = 1, \quad \lambda^{-h_2} \max_{y,\,z} |f(a+z+y\tau)| = 1.$$

Пусть $h = \max(h_1, h_2)$, тогда в силу (24) будет

$$|\sin \pi R_{yz}| \leqslant \pi |R_{yz}| = O(\theta^{z-h} + \lambda^{z+h-\tau}).$$

Пользуясь этой оценкой для $h < z \leqslant \tau - h$ и оценивая модуль синуса единицей для остальных значений z, получим:

$$\sum_{z=1}^{\tau} |\sin \pi R_{yz}| \leqslant 2h + O\Big(\sum_{h<z\leqslant\tau-h} \theta^{z-h} + \lambda^{z+h-\tau}\Big) = O(h).$$

Очевидно, $h = O(\ln(a + rp\tau)) = O(\ln(a + r\tau))$ и, следовательно,

$$S = O(rpN + r\tau + rph) = O(rpN + r\tau + rp\ln(a + r\tau)),$$

что совпадает с утверждением леммы.

Замечание. Если выбрать начальные значения функции $\psi(x)$ так, чтобы число решений сравнения $\psi(x)\equiv 0 \pmod p$, $x=1,2,\ldots,\omega$, не превосходило $\frac{\omega}{p}$ (см. лемму 2), то $N\leqslant\frac{\tau}{p}$ и оценка суммы S примет вид:

$$\left|\sum_{x=1}^{rp\tau} e^{2\pi i\frac{\psi(x)f(a+x)}{p(\lambda^{\tau}-1)}}\right| < Cr\left[\tau+p\ln(a+r\tau)\right]. \qquad (27)$$

§ 3. Пусть $p_1<p_2<\ldots$ — произвольные простые числа, рост которых ограничен требованием: $p_{\nu+1}=O(p_\nu)$.

Обозначим через $\tau_1<\tau_2<\ldots$ положительные целые, удовлетворяющие условиям

$$\psi_\nu(x+\tau_\nu)\equiv\psi_\nu(x)\pmod{p_\nu},\quad \tau_\nu\equiv 0\pmod{p_\nu},\quad \ln\tau_{\nu+1}=o(\tau_\nu).$$

Здесь $\psi_\nu(x)$ — решение рекуррентного уравнения

$$\psi(x)=a_1\psi(x-1)+\ldots+a_n\psi(x-n)\quad (n\geqslant 1,\ |a_n|<p_1),$$

обладающее тем свойством, что число решений сравнения

$$\psi_\nu(x)\equiv 0\pmod{p_\nu},\quad x=1,2,\ldots,\tau_\nu,$$

не превосходит $\frac{\tau_\nu}{p_\nu}$.

Пусть, далее, $t_1<t_2<\ldots$ — произвольные целые, такие, что $t_\nu\geqslant\tau_{\nu+1}$ и $\ln t_\nu=O(\ln\tau_{\nu+1})$, целые $n_1, n_2,\ldots$ определены соотношением

$$n_{\nu+1}=n_\nu+\tau_\nu p_\nu t_\nu\quad (n_1=0)$$

и $\varphi(\nu)=o(p_\nu)$ — любая целочисленная функция, отличная от нуля при достаточно больших значениях аргумента.

Согласно (22), представим $\psi_\nu(x)$ в виде

$$\psi_\nu(x)=\gamma_\nu\lambda^x+O(p_\nu\theta^x),\quad \gamma_\nu=O(p_\nu) \qquad (28)$$

и определим α рядом

$$\alpha=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi(i)\gamma_i}{p_i(\lambda^{\tau_i}-1)}\left(\frac{1}{\lambda^{n_i}}-\frac{1}{\lambda^{n_{i+1}}}\right); \qquad (29)$$

тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)$ — произвольный целочисленный полином, не равный тождественно нулю, и $\lambda>1$ — целое число или число Пизо (λ — корень уравнения $\lambda^n=a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$). Тогда для всякого α, определенного рядом (29), функция $\alpha\lambda^x f(x)$ равномерно распределена.*

Доказательство. Согласно критерию Вейля [см. ([5])], надо показать, что сумма

$$S=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i m\alpha\lambda^x f(x)}\quad (m\neq 0,\ \text{целое})$$

имеет нетривиальную оценку $S=o(P)$.

Пусть k определено условием $n_k\leqslant P<n_{k+1}$. Представим P в виде

$$P=n_k+rp_k\tau_k+r',\quad 0\leqslant r<t_k,\quad 0\leqslant r'<p_k\tau_k.$$

Разобьем интервал суммирования суммы S на части:

$$S=\sum_{\nu=1}^{k-1}\sum_{x=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} e^{2\pi i m\alpha\lambda^x f(x)}+\sum_{x=n_k+1}^{n_k+rp_k\tau_k} e^{2\pi i m\alpha\lambda^x f(x)}+O(p_k\tau_k) \tag{30}$$

и введем обозначения

$$r_\nu=\begin{cases} t_\nu & \text{для } 1\leqslant\nu\leqslant k-1,\\ r & \text{для } \nu=k,\end{cases}\qquad S_\nu=\sum_{x=1}^{r_\nu p_\nu\tau_\nu} e^{2\pi i m\alpha\lambda^{n_\nu+x} f(n_\nu+x)}$$

Тогда равенство (30) примет вид

$$S=\sum_{\nu=1}^{k} S_\nu+O(p_k\tau_k)=\sum_{\nu=\nu_0+1}^{k} S_\nu+O(p_k\tau_k), \tag{31}$$

где ν_0 выбрано настолько большим, чтобы для всякого $\nu>\nu_0$ было $\varphi(\nu)\neq 0$, $|\varphi(\nu)|<p_\nu$ и $|m|<p_\nu$. Для оценки сумм S_ν при $\nu>\nu_0$ преобразуем произведение $\alpha\lambda^{n_\nu+x}$ $(1\leqslant x\leqslant r_\nu p_\nu\tau_\nu)$. В силу того что отношение соседних членов ряда (29) стремится к нулю (это легко установить непосредственной проверкой), получим:

$$\alpha\lambda^{n_\nu}=\sum_{i=1}^{\nu-1}\frac{\varphi(i)\gamma_i\lambda^{n_\nu}}{p_i(\lambda^{\tau_i}-1)}\left(\frac{1}{\lambda^{n_i}}-\frac{1}{\lambda^{n_{i+1}}}\right)+$$
$$+\frac{\varphi(\nu)\gamma_\nu}{p_\nu(\lambda^{\tau_\nu}-1)}\left(1-\frac{1}{\lambda^{t_\nu p_\nu\tau_\nu}}\right)+O\left(\frac{\varphi(\nu+1)\gamma_{\nu+1}}{p_{\nu+1}\lambda^{\tau_{\nu+1}+t_\nu p_\nu\tau_\nu}}\right).$$

Но $\gamma_\nu=O(p_\nu)$, $\gamma_{\nu+1}=O(p_{\nu+1})$ и $\tau_{\nu+1}>\tau_\nu$, следовательно,

$$\alpha\lambda^{n_\nu+x}=\sum_{i=1}^{\nu-1}\frac{\varphi(i)\gamma_i\lambda^{n_\nu-n_{i+1}+x}}{p_i}\cdot\frac{\lambda^{t_ip_i\tau_i}-1}{\lambda^{\tau_i}-1}+\frac{\varphi(\nu)\gamma_\nu\lambda^x}{p_\nu(\lambda^{\tau_\nu}-1)}+O\left(\frac{\varphi(\nu)+\varphi(\nu+1)}{\lambda^{\tau_\nu+t_\nu p_\nu\tau_\nu-x}}\right). \tag{32}$$

Пользуясь (28), преобразуем выражение, стоящее под знаком суммы (для простоты полагаем $n_\nu-n_{i+1}+x=z$):

$$\frac{\varphi(i)\gamma_i\lambda^z}{p_i}\cdot\frac{\lambda^{t_ip_i\tau_i}-1}{\lambda^{\tau_i}-1}=\varphi(i)\frac{\gamma_i(\lambda^z+\lambda^{z+\tau_i}+\dots+\lambda^{z+(t_ip_i-1)\tau_i})}{p_i}=$$
$$=\varphi(i)\cdot\frac{1}{p_i}\sum_{j=0}^{t_ip_i-1}\psi_i(z+j\tau_i)+O(\varphi(i)\theta^z).$$

Из определения τ_i следует, что

$$\psi_i(z+j\tau_i)\equiv\psi_i(z)\ (\mathrm{mod}\ p_i),$$
$$\sum_{j=0}^{t_ip_i-1}\psi_i(z+j\tau_i)\equiv t_ip_i\psi_i(z)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p_i).$$

Таким образом,

$$\frac{\varphi(i)\gamma_i\lambda^{n_\nu-n_{i+1}+x}}{p_i}\cdot\frac{\lambda^{t_ip_i\tau_i}-1}{\lambda^{\tau_i}-1}=T+O\left(\varphi(i)\,\theta^{n_\nu-n_{i+1}+x}\right)\quad (T\text{ — целое}).$$

Пользуясь тем, что $\varphi(i)=o(p_i)$ и $p_{i+1}=O(p_i)$, получим из (32):

$$\alpha\lambda^{n_\nu+x}=T_1+\frac{\varphi(\nu)\gamma_\nu\lambda^x}{p_\nu(\lambda^{\tau_\nu}-1)}+o\left(\frac{p_\nu}{\lambda^{\tau_\nu+t_\nu p_\nu\tau_\nu-x}}+p_\nu\theta^x\right)=$$

$$=T_1+\frac{\varphi(\nu)\psi_\nu(x)}{p_\nu(\lambda^{\tau_\nu}-1)}+o\left(\frac{p_\nu}{\lambda^{\tau_\nu+t_\nu p_\nu\tau_\nu-x}}+p_\nu\theta^x\right);$$

$$m\alpha\lambda^{n_\nu+x}f(n_\nu+x)=T_2+\frac{m\varphi(\nu)\psi_\nu(x)f(n_\nu+x)}{p_\nu(\lambda^{\tau_\nu}-1)}+R_x,$$

где T_1, T_2 — целые и

$$R_x=o\left(p_\nu(\theta^x+\lambda^{x-\tau_\nu-t_\nu p_\nu\tau_\nu})\max_{1\leqslant x\leqslant t_\nu p_\nu\tau_\nu}|f(n_\nu+x)|\right).$$

Выбирая в (25)

$$F_1(x)=m\alpha\lambda^{n_\nu+x}f(n_\nu+x),\quad F_2(x)=T_2+\frac{m\varphi(\nu)\psi_\nu(x)f(n_\nu+x)}{p_\nu(\lambda^{\tau_\nu}-1)},$$

получим:

$$S_\nu=\sum_{x=1}^{r_\nu p_\nu\tau_\nu}e^{\frac{2\pi i m\varphi(\nu)\psi_\nu(x)f(n_\nu+x)}{p_\nu(\lambda^{\tau_\nu}-1)}}+O\left(\sum_{x=1}^{r_\nu p_\nu\tau_\nu}|\sin\pi R_x|\right). \tag{33}$$

В силу того что целые m и $\varphi(\nu)$ отличны от нуля и удовлетворяют неравенствам $|m|<p_\nu$, $|\varphi(\nu)|<p_\nu$, получим:

$$m\varphi(\nu)\not\equiv 0\pmod{p_\nu}.$$

Но тогда для рекуррентной функции $m\varphi(\nu)\psi_\nu(x)$ число решений сравнения $m\varphi(\nu)\psi_\nu(x)\equiv 0\pmod{p_\nu}$ при x, пробегающем значения $1, 2, \ldots, \tau_\nu$, совпадает с числом решений сравнения $\psi_\nu(x)\equiv 0\pmod{p_\nu}$ и, следовательно, не превосходит $\frac{\tau_\nu}{p_\nu}$. Таким образом, применима оценка (27), и равенство (33) примет вид:

$$S_\nu=O\left(r_\nu\tau_\nu+r_\nu p_\nu\ln(n_\nu+r_\nu\tau_\nu)+\sum_{x=1}^{r_\nu p_\nu\tau_\nu}|\sin\pi R_x|\right). \tag{34}$$

Пусть величины h_1 и h_2 определены условиями:

$$\theta^{h_1}p_\nu\max_{1\leqslant x\leqslant r_\nu p_\nu\tau_\nu}|f(n_\nu+x)|=1,\qquad \lambda^{-h_2}p_\nu\max_{1\leqslant x\leqslant r_\nu p_\nu\tau_\nu}|f(n_\nu+x)|=1.$$

Подобно тому как это делалось при доказательстве основной леммы, полагая $h=\max(h_1, h_2)$, получим:

$$|\sin\pi R_x|\leqslant\pi|R_x|<C\left(\theta^{x-h}+\lambda^{x+h-\tau_\nu-t_\nu p_\nu\tau_\nu}\right),$$

$$\sum_{x=1}^{r_\nu p_\nu\tau_\nu}|\sin\pi R_x|\leqslant 2h+\sum_{h<x\leqslant r_\nu p_\nu\tau_\nu-h}|\sin\pi R_x|=2h+O(1).$$

Согласно определению h_1 и h_2, имеем:

$$h=O\left(\ln(n_\nu+r_\nu p_\nu\tau_\nu)\right)=O\left(\ln(n_\nu+r_\nu\tau_\nu)\right),$$

следовательно,

$$\sum_{x=1}^{r_\nu p_\nu\tau_\nu}|\sin\pi R_x|=O\left(\ln(n_\nu+r_\nu\tau_\nu)\right)$$

и в оценке (34) сумму $\sum_{x=1}^{r_\nu p_\nu \tau_\nu} |\sin \pi R_x|$ под знаком O можно отбросить:

$$S_\nu = O\left(r_\nu \tau_\nu + r_\nu p_\nu \ln (n_\nu + r_\nu \tau_\nu)\right). \tag{35}$$

В силу определения величин t_ν, n_ν, τ_ν и p_ν справедливы оценки

$$n_\nu + r_\nu \tau_\nu \leqslant n_{\nu+1} \leqslant \nu p_\nu \tau_\nu t_\nu; \quad \ln (n_\nu + r_\nu \tau_\nu) = O(\ln \tau_\nu + \ln t_\nu) = o(\tau_\nu);$$
$$p_\nu \tau_\nu = O(p_{\nu-1} t_{\nu-1}) = o(n_\nu).$$

Пользуясь этими оценками, получим из (35) и (31):

$$S_\nu = o(p_\nu r_\nu \tau_\nu) \quad (\nu > \nu_0),$$

$$S = \sum_{\nu=\nu_0+1}^{k} S_\nu + O(p_k \tau_k) = o\left(\sum_{\nu=\nu_0+1}^{k} p_\nu r_\nu \tau_\nu + n_k\right).$$

Отсюда, так как $n_k \leqslant P$ и $\sum_{\nu=\nu_0+1}^{k} p_\nu \tau_\nu r_\nu \leqslant n_k + r p_k \tau_k \leqslant P$, согласно критерию равномерного распределения, следует утверждение теоремы.

§ 4. Сохраним обозначения предыдущего параграфа. Пусть, кроме того, $s \geqslant 1$, $m_1, \ldots, m_s$ — произвольные целые, не равные одновременно нулю, и $\varphi_1(\nu), \ldots, \varphi_s(\nu)$ — любая система целочисленных функций, для которых каждая линейная комбинация $m_1\varphi_1(\nu) + \cdots + m_s\varphi_s(\nu)$ имеет конечное число корней. Будем предполагать, что рост функций $\varphi_i(\nu)$ ограничен условием

$$\varphi_i(\nu) = o(p_\nu) \; * \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\lambda > 1$ — целое число или число Пизо и $f(x)$ — произвольный целочисленный полином, не равный тождественно нулю. Тогда при любом выборе величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, определенных рядами*

$$\alpha_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\nu)\,\gamma_\nu}{p_\nu(\lambda^{\tau_\nu} - 1)} \left(\frac{1}{\lambda^{n_\nu}} - \frac{1}{\lambda^{n_\nu + 1}}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

система функций $\alpha_1 \lambda^x f(x), \ldots, \alpha_s \lambda^x f(x)$ равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Доказательство. Положим $\varphi(\nu) = m_1\varphi_1(\nu) + \cdots + m_s\varphi_s(\nu)$. Очевидно, $\varphi(\nu) = o(p_\nu)$, причем для всех достаточно больших значений ν будет $\varphi(\nu) \neq 0$.

Согласно многомерному критерию Вейля, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что при любых целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю, сумма

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\,(m_1\alpha_1\lambda^x f(x) + \cdots + m_s\alpha_s\lambda^x f(x))}$$

имеет нетривиальную оценку $S = o(P)$.

Рассмотрим величину

$$\alpha = m_1\alpha_1 + \cdots + m_s\alpha_s = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi(\nu)\,\gamma_\nu}{p_\nu(\lambda^{\tau_\nu} - 1)} \left(\frac{1}{\lambda^{n_\nu}} - \frac{1}{\lambda^{n_\nu+1}}\right).$$

---

* Можно, например, выбрать $p_\nu > 2^\nu$, $\varphi_1(\nu) = \nu$, $\varphi_2(\nu) = \nu^2, \ldots, \varphi_s(\nu) = \nu^s$.

По теореме 1, функция $\alpha\lambda^x f(x)$ равномерно распределена, следовательно,

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1\alpha_1 + \cdots + m_s\alpha_s) \lambda^x f(x)} = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \alpha \lambda^x f(x)} = o(P),$$

чем теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\lambda > 1$ — целое число или число Пизо и α задана рядом (29). Тогда для любой системы целочисленных линейно независимых полиномов $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ функции $\alpha\lambda^x f_1(x), \ldots, \alpha\lambda^x f_s(x)$ равномерно распределены в s-мерном пространстве.*

Доказательство. Для любых целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю, определим полином $F_s(x)$ равенством:

$$F_s(x) = m_1 f_1(x) + \cdots + m_s f_s(x).$$

Так как функции $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ линейно независимы, то полином $F_s(x)$ не обращается тождественно в ноль и, по теореме 1, функция $\alpha\lambda^x F_s(x)$ равномерно распределена. Но тогда справедлива оценка

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1 \alpha\lambda^x f_1(x) + \cdots + m_s \alpha\lambda^x f_s(x))} = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \alpha\lambda^x F_s(x)} = o(P),$$

из которой следует утверждение теоремы 3.

Замечание. В доказанных выше теоремах можно заменить λ^x на $\psi(x)$, где $\psi(x)$ — любая неограниченная целочисленная рекуррентная функция, удовлетворяющая конечно-разностному уравнению

$$\psi(x) = a_1\psi(x-1) + \cdots + a_n\psi(x-n),$$

для которого один из корней характеристического уравнения $(\lambda_1 = \lambda)$ больше единицы, а остальные по модулю меньше единицы.

В частности, для всякого целочисленного полинома $f(x)$, не равного тождественно нулю, будет равномерно распределена функция $\alpha'\psi(x) f(x)$, где $\alpha' = \frac{1}{\gamma}\alpha$ и $\gamma = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{\lambda^x}$. Действительно,

$$\alpha'\psi(x) f(x) = \alpha'\gamma\lambda^x f(x) + O\left(\theta^x f(x)\right) = \alpha\lambda^x f(x) + o(1)$$

и, следовательно, функция $\alpha'\psi(x) f(x)$ равномерно распределена одновременно с функцией $\alpha\lambda^x f(x)$.

Аналогично в теоремах 2 и 3 при замене λ^x на $\psi(x)$ надо заменять α_i на $\alpha'_i = \frac{1}{\gamma}\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ и α на $\alpha' = \frac{1}{\gamma}\alpha$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
28. I. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М., ОНТИ, 1936.

[2] Коробов Н. М., О дробных долях показательных функций, Успехи матем. наук, т. VI, вып. 4 (44), стр. 151.

[3] Коробов Н. М., Дробные доли показательных функций, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 38 (1951), 87—96.

[4] Коробов Н. М., Некоторые многомерные задачи теории диофантовых приближений, Доклады Ак. наук СССР, 84 (1952), 13—16.

[5] Weyl H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Ann., 77 (1916), 313—352.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 401—420

В. С. ПУГАЧЕВ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КОРРЕЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В статье излагаются некоторые общие методы исследования случайных функций, разработанные автором в 1947—48 гг. [см. (1)] *. Имея в виду создание прикладной теории, достаточно простой и удобной в приложениях, автор ограничился, в основном, изучением таких свойств случайных функций, которые характеризуются моментами первого и второго порядка — математическими ожиданиями и корреляционными функциями.

Будем рассматривать произвольные комплексные скалярные случайные функции скалярного или векторного аргумента. Разработанная для таких случайных функций теория применима, в частности, и к векторным случайным функциям, так как составляющую векторной функции всегда можно рассматривать как скалярную функцию ее аргумента и номера.

Условимся писать без указания области интегрирования все интегралы, распространенные на всю область изменения аргумента случайной функции.

§ 1. Общие свойства корреляционной функции

Пусть $X(t)$ — случайная функция. Будем предполагать, что для нее определены математическое ожидание

$$\xi(t) = MX(t) \tag{1.1}$$

и корреляционная функция

$$K(t, s) = M[X(t) - \xi(t)]\,[\overline{X(s)} - \overline{\xi(s)}]. \tag{1.2}$$

---

* В последние годы в некоторых работах [см. (2) — (5)] развивается теория, аналогичная разработанной мною. Во время моих первых сообщений по данным вопросам мне не была известна работа Loève (2,3), в которой даны некоторые разложения случайной функции на некоррелированные составляющие и изучено преобразование корреляционной функции при некоторых линейных преобразованиях (в частности, при дифференцировании и интегрировании) случайной функции. Эти результаты Loève содержатся в качестве частных случаев в разработанной мной общей теории канонических разложений и общей теории линейных преобразований случайных функций. Еще более общие разложения изучены в работе K. Karhunen'a (4). Изложение Karhunen'a, однако, весьма абстрактно и малодоступно.

Корреляционная функция обладает следующими очевидными свойствами:

$$|K(t, s)| \leqslant \sqrt{K(t, t) K(s, s)}, \qquad (1.3)$$

$$K(t, s) = \overline{K(s, t)}, \qquad (1.4)$$

$$J\varphi = \iint K(t, s)\, \overline{\varphi(t)}\, \varphi(s)\, d\Phi(t)\, d\Phi(s) = M\,|(X - \xi, \varphi)|^2 \geqslant 0 \ ^*, \qquad (1.5)$$

где $\Phi(t)$ — произвольная аддитивная функция (функция веса), а $\varphi(t)$ — произвольная функция с ограниченной нормой по отношению к весу $\Phi(t)$.

Условимся называть случайную функцию $X(t)$ непрерывной в точке t_0, если при произвольном $\varepsilon > 0$

$$M\,|X(t) - X(t_0)|^2 < \varepsilon, \qquad (1.6)$$

коль скоро

$$|t - t_0| < \delta(\varepsilon). \qquad (1.7)$$

Из тождества

$$M\,|X(t) - X(t_0)|^2 = M\,|U_t - U_{t_0}|^2 + |\xi(t) - \xi(t_0)|^2, \qquad (1.8)$$

где

$$U_t = X(t) - \xi(t), \qquad (1.9)$$

вытекают следующие две теоремы:

ТЕОРЕМА 1.1. *Если случайная функция X непрерывна в точке t_0, то ее математическое ожидание ξ и отклонение от математического ожидания U_t непрерывны в точке t_0.*

ТЕОРЕМА 1.2. *Если математическое ожидание ξ случайной функции X и случайная функция U_t непрерывны в точке t_0, то случайная функция X непрерывна в точке t_0.*

Из определения корреляционной функции следует, что

$$M\,|U - U_{t_0}|^2 = K(t, t) + K(t_0, t_0) - K(t, t_0) - K(t_0, t). \qquad (1.10)$$

Отсюда вытекает неравенство

$$M\,|U_t - U_{t_0}|^2 \geqslant \left[\sqrt{K(t, t)} - \sqrt{K(t_0, t_0)}\right]^2. \qquad (1.11)$$

Из неравенства (1.11) следует

ТЕОРЕМА 1.3. *Если случайная функция U_t непрерывна в точке t_0, то дисперсия случайной функции X непрерывна в точке t_0.*

Далее имеем:

$$|K(t, s) - K(t_0, s_0)| = |M U_t (\overline{U}_s - \overline{U}_{s_0}) + M(U_t - U_{t_0})\overline{U}_{s_0}| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{K(t, t) M\,|U_s - U_{s_0}|^2} + \sqrt{K(s_0, s_0) M\,|U_t - U_{t_0}|^2}. \qquad (1.12)$$

Из этого неравенства и теоремы 1.3 вытекает

ТЕОРЕМА 1.4. *Если случайная функция U_t непрерывна в точках t_0 и s_0, то корреляционная функция случайной функции X непрерывна в точке (t_0, s_0).*

---

* Здесь, как и везде в дальнейшем, мы считаем операции интегрирования и математического ожидания коммутативными. Скалярное произведение двух функций $x(t)$ и $y(t)$ везде в дальнейшем определяется формулой: $(x, y) = \int x(t)\, \overline{y(t)}\, d\Phi(t)$, где интегрирование производится по всей области изменения аргумента t.

Следствие. *Если случайная функция U_t непрерывна в точке t_0, то корреляционная функция случайной функции X непрерывна в точке (t_0, t_0).*

Из теоремы 1.4 следует, что точки разрыва корреляционной функции $K(t, s)$ могут располагаться только на многообразиях $t = t_0$, $s = t_0$ и только таких, для которых t_0 является точкой разрыва случайной функции U_t.

Из формулы (1.10) вытекает еще одно неравенство:

$$M\,|U_t - U_{t_0}|^2 \leqslant |K(t,t) - K(t_0,t_0)| + 2\,|K(t,t_0) - K(t_0,t_0)|. \qquad (1.13)$$

Из этого неравенства следует

ТЕОРЕМА 1.5. *Если корреляционная функциия непрерывна при приближении к точке (t_0, t_0) вдоль главной диагонали и параллелей осям координат, то случайная функция U_t непрерывна в точке t_0.*

Из теорем 1.5 и 1.4 вытекает

Следствие. *Если корреляционная функция непрерывна при приближении к точке (t_0, t_0) вдоль главной диагонали и параллелей осям координат, то она непрерывна в точке (t_0, t_0).*

Для дальнейшей теории имеют значение еще следующие теоремы о последовательностях случайных функций.

ТЕОРЕМА 1.6. *Если математические ожидания случайных функций $X_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ тождественно равны нулю и последовательность соответствующих корреляционных функций $K_n(t, s)$ сходится к нулю в точке (t_0, t_0), то последовательность случайных функций $X_n(t)$ сходится по вероятности к нулю в точке t_0.*

Эта теорема вытекает из равенства

$$M\,|X_n(t)|^2 = K_n(t,t) \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (1.14)$$

и общих свойств последовательностей случайных величин [см. ([6])].

ТЕОРЕМА 1.7. *Если математические ожидания случайных функций $X_n\,(n = 1. 2, \ldots)$ тождественно равны нулю и последовательность корреляционных функций сходится к нулю почти всюду на главной диагонали $s = t$ *, то последовательность случайных функкий $X_n(t)$ сходится по вероятности в среднем к нулю.*

Эта теорема вытекает из равенства

$$M \int |X_n(t)|^2\, d\Phi(t) = \int K_n(t, t)\, d\Phi(t). \qquad (1.15)$$

ТЕОРЕМА 1.8. *Если математические ожидания случайных функций $X_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ тождественно равны нулю, корреляционные функции $K_n(t, s)$ непрерывны почти всюду на главной диагонали $s = t$ и последовательность корреляционных функций K_n сходится в среднем к нулю:*

$$\iint |K_n(t,s)|^2\, d\Phi(t)\, d\Phi(s) \to 0, \qquad (1.16)$$

* Т. е. при всех t, за исключением, может быть, множества точек E, для которого $\int\limits_E d\Phi(t) = 0$.

то последовательность случайных функций $X_n(t)$ *сходится по вероятности в среднем к нулю.*

Эта теорема вытекает из того факта, что для последовательности случайных функций X_n. вследствие сходимости в среднем к нулю последовательности корреляционных функций и их непрерывности почти всюду на главной диагонали, выполнены условия теоремы 1.7.

Из формулы (1.14) легко выводится теорема, обратная теореме 1.6.

ТЕОРЕМА 1.9. *Если для последовательности случайных функций* $X_n\,(n=1, 2, \ldots)$

$$M\,|X_n(t_0)|^2 \to 0, \tag{1.17}$$

то последовательность корреляционных функций $K_n(t, s)$ *сходится к нулю на прямых* $t=t_0,\ s=t_0$.

Точно так же из неравенства

$$\iint |K_n(t, s)|^2\, d\Phi(t)\, d\Phi(s) \leqslant \left[\int K_n(t, t)\, d\Phi(t)\right]^2 \tag{1.18}$$

и формулы (1.15) вытекает теорема, обратная теореме 1.8:

ТЕОРЕМА 1.10. *Если для последовательности случайных функций* $X_n\,(n=1, 2, \ldots)$

$$M\int |X_n(t)|^2\, d\Phi(t) \to 0, \tag{1.19}$$

то последовательность корреляционных функций K_n *сходится в среднем к нулю.*

§ 2. Разложение случайной функции и ее корреляционной функции по собственным функциям

Формулы (1.4) и (1.5) показывают, что корреляционная функция является симметричным определенно положительным ядром. Следовательно, в случае сходимости интеграла

$$\iint |K(t, s)|^2\, d\Phi(t)\, d\Phi(s) \tag{2.1}$$

корреляционная функция может быть представлена сходящимся к ней в среднем рядом [см. ([7])]:

$$K(t, s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu(t)\, \overline{\varphi_\nu(s)}, \tag{2.2}$$

где D_ν — собственные значения, а $\varphi_\nu(t)$ — соответствующие ортонормированные собственные функции линейного интегрального оператора

$$K\varphi = \int K(t, s)\, \varphi(s)\, d\Phi(s). \tag{2.3}$$

Величины D_ν равны значениям интегральной квадратичной формы (1.5) при $\varphi=\varphi_\nu$:

$$D_\nu = J\varphi_\nu = M\,|(X-\xi, \varphi_\nu)|^2 = D(X, \varphi_\nu) \quad (\nu=1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Иными словами, собственные значения D_ν представляют собой дисперсии составляющих случайной функции X относительно соответствующих собственных функций φ_ν.

Составляющие случайной функции X относительно собственных функций φ_ν

$$X_\nu = (X, \varphi_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{2.5}$$

являются некоррелированными случайными величинами, так как их корреляционные моменты равны нулю вследствие ортогональности собственных функций.

На основании изложенного, собственные значения D_ν целесообразно назвать *главными дисперсиями* случайной функции X.

Формула (2.2) дает разложение корреляционной функции по собственным функциям.

В случае непрерывности корреляционной функции ряд (2.2) при любом t сходится абсолютно и равномерно [см. ([7])].

В случае сходимости интеграла (2.1) разложение по собственным функциям существует не только для корреляционной функции, но и для самой случайной функции. Для того чтобы вывести разложение случайной функции X, заменим в интегральной квадратичной форме (1.5) корреляционную функцию ее разложением (2.2). Тогда получим:

$$J\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \,|\, (\varphi, \varphi_\nu) \,|^2. \tag{2.6}$$

Сравнивая формулы (1.5) и (2.6), приходим к выводу, что всякая функция, ортогональная к случайной функции U_t, ортогональна и ко всем ее собственными функциям, и наоборот. Тем самым доказана полнота системы собственных функций в пространстве возможных значений случайной функции $U_t = X - \xi$. Отсюда следует, что любое возможное значение случайной функции U_t может быть представлено сходящимся к нему в среднем разложением по собственным функциям.

Доказанное предложение можно записать в виде разложения случайной функции X:

$$X(t) = \xi(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu \varphi_\nu(t), \tag{2.7}$$

где U_ν — коэффициенты Фурье случайной функции U_t относительно собственных функций φ_ν, которые, очевидно, только математическими ожиданиями отличаются от случайных величин X_ν, определяемых формулой (2.5) и, следовательно, являются некоррелированными случайными величинами, дисперсии которых равны главным дисперсиям D_ν случайной функции X.

Доказанное предложение можно вывести также из теоремы 1.8. Для этого достаточно заметить, что случайная функция

$$X_n(t) = X(t) - \xi(t) - \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu \varphi_\nu(t) \tag{2.8}$$

имеет корреляционную функцию

$$K_n(t, s) = K(t, s) - \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu \varphi_\nu(t) \overline{\varphi_\nu(s)}. \tag{2.9}$$

Если корреляционная функция $K(t, s)$ непрерывна почти всюду на главной диагонали $s = t$, то последовательность корреляционных функций $K_n(t, s)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.8. Следовательно, ряд в правой части формулы (2.7) сходится по вероятности в среднем к случайной функции $X(t)$.

В зависимости от выбора функции веса $\Phi(t)$ существует бесчисленное множество разложений случайной функции и ее корреляционной функции по собственным функциям.

Очевидно, что функция веса Φ всегда может быть выбрана так, чтобы интеграл (2.1) сходился. Для этого достаточно, например, взять в качестве функции веса произвольный интегральный закон распределения, приращения которого отличны от нуля только на тех интервалах, на которых корреляционная функция ограничена.

§ 3. Теория канонических разложений случайных функций

Рассмотрим последовательность пар функций u_r, v_r и последовательность положительных чисел Δ_r, удовлетворяющих условиям биортогональности:

$$(u_r, v_s) = \delta_{rs} \quad (r, s = 1, 2, \ldots) \tag{3.1}$$

и, кроме того, уравнениям:

$$\int K(t, s)\, v_r(s)\, d\Phi(s) = \Delta_r\, u_r(t) \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{3.2}$$

Предполагая операции интегрирования и математического ожидания коммутативными, убеждаемся в том, что случайные величины

$$V_r = (X - \xi, v_r) \quad (r = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

являются некоррелированными случайными величинами, дисперсии которых равны соответствующим числам Δ_r. Для доказательства достаточно заметить, что корреляционный момент величин V_r и V_s равен, вследствие уравнения (3.2), $\Delta_s(u_s, v_r)$.

Подставляя в уравнение (3.2) разложение корреляционной функции по собственным функциям (2.2), найдем

$$\Delta_r\, u_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k (v_r, \varphi_k)\, \varphi_k(t) \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{3.4}$$

Таким образом, функции u_r могут быть представлены разложениями по собственным функциям.

Подставляя разложение (3.4) в формулы (3.1), находим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{\Delta_r} (v_r, \varphi_k)\, \overline{(v_s, \varphi_k)} = \delta_{rs} \quad (r, s = 1, 2, \ldots). \tag{3.5}$$

Из формулы (3.5) следует, что бесконечная матрица

$$\left\| \sqrt{\frac{D_k}{\Delta_r}} (v_r, \varphi_k) \right\|$$

является унитарной. Следовательно, формула (3.4) при любом t дает вектор $\sqrt{\Delta_r}\, u_r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ как результат унитарного преобразования

вектора $\sqrt{D_k}\,\varphi_k$ $(k=1, 2, \ldots)$. Следовательно, эти два вектора при любом t имеют одинаковую норму:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r \,|\, u_r(t)\,|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \,|\, \varphi_k(t)\,|^2. \tag{3.6}$$

Из формул (2.2) и (3.6) следует, что если корреляционная функция $K(t, s)$ непрерывна почти всюду на главной диагонали $s=t$, то дисперсия случайной функции

$$Y_n(t) = X(t) - \xi(t) - \sum_{r=1}^{n} V_r u_r(t) \tag{3.7}$$

почти при всех t стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что разложение

$$X(t) = \xi(t) + \sum_{r=1}^{\infty} V_r u_r(t) \tag{3.8}$$

почти при всех t сходится по вероятности к случайной функции X.

Таким образом, для каждой данной функции веса $\Phi(t)$ существует бесчисленное множество разложений случайной функции X на некоррелированные слагаемые. Полученное в § 2 разложение по собственным функциям является частным случаем общего разложения (3.8).

Условимся называть всякое разложение случайной функции на некоррелированные слагаемые *каноническим разложением*. Функции u_r будем называть *координатными*, а функции v_r — *проектирующими*.

Из формулы (3.8) вытекает каноническое разложение корреляционной функции:

$$K(t, s) = \sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r \, u_r(t)\, u_r(s). \tag{3.9}$$

Легко доказывается обратное предложение: *если корреляционная функция выражается сходящимся в среднем разложением* (3.9), *где Δ_r — произвольные числа, а u_r — произвольные линейно независимые функции, то функции u_r являются координатными функциями сходящегося по вероятности в среднем канонического разложения* (3.8) *случайной функции X, причем числа Δ_r являются дисперсиями случайных величин V_r и, следовательно, все положительны.*

В практических задачах приближенное каноническое разложение случайной функции X часто может быть получено следующим простым приемом. Представив случайную функцию $X - \xi$ приближенно в виде линейной комбинации соответствующим образом подобранных линейно независимых функций $f_1, \ldots, f_n$ со случайными коэффициентами $X_1, \ldots, X_n$, введем новые случайные величины $V_1, \ldots, V_n$, определяемые формулами:

$$X_\nu = \sum_{k=1}^{\nu-1} a_{\nu k} V_k + V_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{3.10}$$

причем коэффициенты $a_{\nu k}$ определим последовательно из условия равенства нулю всех корреляционных моментов величин $V_1, \ldots, V_n$. Попутно определятся дисперсии $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ величин $V_1, \ldots, V_n$.

Уравнения (3.1) и (3.2) дают возможность найти такую последовательность пар функций u_r, v_r, чтобы две произвольные случайные функции были одновременно выражены каноническими разложениями с координатными функциями u_r. Впрочем, эта задача, вполне аналогичная задаче об одновременном приведении двух квадратичных форм к каноническому виду, не имеет практического интереса.

§ 4. Теория векторных случайных функций

Изложенная теория содержит как частный случай теорию векторных случайных функций, так как составляющая векторной функции является скалярной функцией составного векторного аргумента, определяемого совокупностью аргумента t и номера τ составляющей векторной функции. Функция веса $\Phi(t, \tau)$ в данном случае определится формулой:

$$\Phi(t, \tau) = \sum_k \varepsilon(\tau - k)\, \Phi_k(t), \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0), \\ 1 & (x > 0), \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\Phi_k(t)$ — произвольные аддитивные функции. Соответственно этому аргумент в общей теории заменится совокупностью аргумента и индекса, а все интегралы заменятся суммами аналогичных интегралов *.

В результате будем иметь корреляционную функцию векторной случайной функции в виде матрицы функций двух переменных:

$$K_{\nu\mu}(t, s) = M\left[X_\nu(t) - \xi_\nu(t)\right]\left[\overline{X_\mu(s)} - \overline{\xi_\mu(s)}\right], \tag{4.2}$$

свойства которой выражаются формулами:

$$|K_{\nu\mu}(t, s)| \leqslant \sqrt{K_{\nu\nu}(t, t)\, K_{\mu\mu}(s, s)}, \tag{4.3}$$

$$K_{\nu\mu}(t, s) = \overline{K_{\mu\nu}(s, t)}, \tag{4.4}$$

$$J\varphi = \sum_{\nu, \mu} \iint K_{\nu\mu}(t, s)\, \overline{\varphi_\nu(t)}\, \varphi_\mu(s)\, d\Phi_\nu(t)\, d\Phi_\mu(s) = M\,|(X - \xi, \varphi)|^2 \geqslant 0, \tag{4.5}$$

где $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ — произвольная векторная функция с ограниченной нормой.

Если сходится интеграл

$$\iint \sum_{\nu, \mu} |K_{\nu\mu}(t, s)|^2\, d\Phi_\nu(t)\, d\Phi_\mu(s), \tag{4.6}$$

то имеет место разложение корреляционной функции по собственным функциям:

$$K_{\nu\mu}(t, s) = \sum_{r=1}^{\infty} D_r\, \varphi_{r\nu}(t)\, \overline{\varphi_{r\mu}(s)}, \tag{4.7}$$

где D_r $(r = 1, 2, \ldots)$ — собственные значения оператора

$$K_\nu \varphi = \sum_\mu \int K_{\nu\mu}(t, s)\, \varphi_\mu(s)\, d\Phi_\mu(s) \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{4.8}$$

а $\varphi_r(\varphi_{r1}, \varphi_{r2}, \ldots)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ — соответствующие векторные собственные функции.

---

* Соответственно этому скалярное произведение двух векторных функций $x(t)$, $y(t)$ определится формулой

$$(x, y) = \sum \int x_k(t)\, \overline{y_k(t)}\, d\Phi_k(t).$$

Для векторной случайной функции X имеет место разложение по собственным функциям

$$X(t) = \xi(t) + \sum_{r=1}^{\infty} U_r \varphi_r(t), \tag{4.9}$$

где $\xi(t)$ — математическое ожидание, а $U_1, U_2, \ldots$ — некоррелированные случайные величины, дисперсии которых равны соответствующим главным дисперсиям $D_1, D_2, \ldots$.

Изложенная в предыдущем параграфе теория в случае сходимости интеграла (4.6) дает бесчисленное множество канонических разложений векторной случайной функции X:

$$X(t) = \xi(t) + \sum_{r=1}^{\infty} V_r u_r(t), \tag{4.10}$$

где

$$V_r = (X - \xi, v_r) \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{4.11}$$

Векторные функции $u_r(u_{r1}, u_{r2}, \ldots)$, $v_r(v_{r1}, v_{r2}, \ldots)$ и дисперсии Δ_r некоррелированных случайных величин $V_r (r = 1, 2, \ldots)$ определяются уравнениями:

$$\sum_{\mu} \int K_{\nu\mu}(t, s)\, v_{r\mu}(s)\, d\Phi_{\mu}(s) = \Delta_r u_{r\nu}(t) \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{4.12}$$

и условиями биортогональности:

$$(u_r, v_s) = \delta_{rs} \quad (r, s = 1, 2, \ldots). \tag{4.13}$$

Разложение (4.10) дает каноническое разложение корреляционной функции векторной случайной функции:

$$K_{\nu\mu}(t, s) = \sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r u_{r\nu}(t)\, \overline{u_{r\mu}(s)}. \tag{4.14}$$

Если корреляционная функция векторной случайной функции выражена формулой (4.14), где Δ_r — произвольные числа, а $u_r(u_{r1}, u_{r2}, \ldots)$ — произвольные линейно независимые векторные функции, то формула (4.10) дает каноническое разложение векторной случайной функции X, причем числа Δ_r положительны и являются дисперсиями случайных величин V_r.

§ 5. Вывод основных формул теории стационарных случайных функций из общей теории канонических разложений случайных функций

Из теории канонических разложений случайных функций можно вывести основные формулы спектральной теории стационарных случайных функций.

Пусть $X_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ — непрерывная стационарная векторная случайная функция. Ее корреляционная функция $k_{\nu\mu}(\tau)$ может быть представлена на отрезке $|t| < 2T$ рядом Фурье:

$$k_{\nu\mu}(\tau) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_{\nu\mu}^{(r)} e^{i\omega_r \tau} \quad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.1}$$

где

$$A_{\nu\mu}^{(r)}=\frac{1}{4T}\int\limits_{-2T}^{2T}k_{\nu\mu}(\tau)\,e^{-i\omega_r\tau}\,d\tau,\quad \omega_r=\frac{\pi r}{2T}. \tag{5.2}$$

Разложение (5.1) не является каноническим. Для того чтобы привести его к виду канонического разложения (4.14), положим

$$A_{\nu\mu}^{(r)}=\sum_{l=1}^{n}a_{\nu l}^{(r)}\,\overline{a_{\mu l}^{(r)}}\,\Delta_r^{(l)}\quad(\nu,\mu=1,2,\ldots,n;\ r=0,\pm1,\pm2,\ldots), \tag{5.3}$$

где $\Delta_r^{(l)}$, $a_{\nu l}^{(r)}$ — соответственно подобранные числа. Очевидно, что величины $\Delta_r^{(l)}$, $a_{\nu l}^{(r)}$ для каждого r могут быть выбраны бесчисленным множеством способов. Для однозначного определения $\Delta_r^{(l)}$, $a_{\nu l}^{(r)}$ необходимо задать дополнительные условия, например, принять

$$a_{\nu\nu}^{(r)}=1,\quad a_{\nu l}^{(r)}=0\quad(\nu<l).$$

Подставляя выражения (5.3) в формулу (5.1), получим каноническое разложение корреляционной функции векторной стационарной случайной функции

$$k_{\nu\mu}(t-s)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\Delta_r^{(l)}\,a_{\nu l}^{(r)}\,\overline{a_{\mu l}^{(r)}}\,e^{i\omega_r(t-s)}\quad(\nu,\mu=1,\ldots,n). \tag{5.4}$$

На основании общей теории, из канонического разложения (5.4) корреляционной функции вытекает каноническое разложение стационарной векторной случайной функции на отрезке $|t|<T$:

$$X_\nu(t)=\xi_\nu(t)+\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=-\infty}^{\infty}V_r^{(l)}\,a_{\nu l}^{(r)}\,e^{i\omega_r t}\quad(\nu=1,\ldots,n), \tag{5.5}$$

причем дисперсии некоррелированных случайных величин $V_r^{(l)}$ равны соответствующим коэффициентам $\Delta_r^{(l)}$ разложения (5.4) и, следовательно, все $\Delta_r^{(l)}$ положительны.

Вводя ступенчатые функции

$$F_{\nu\mu}^T(\omega)=\sum_{r<\frac{2T}{\pi}\omega}A_{\nu\mu}^{(r)},\quad S_{\nu\mu}^T(\omega)=\frac{F_{\nu\mu}^T(\omega-0)+F_{\nu\mu}^T(\omega+0)}{2}, \tag{5.6}$$

можем переписать формулу (5.1) в виде

$$k_{\nu\mu}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}\,dS_{\nu\mu}^T(\omega)\quad(\nu,\mu=1,2,\ldots,n). \tag{5.7}$$

Эта формула представляет корреляционную функцию $k_{\nu\mu}(\tau)$ в интервале $|t|<2T$ и продолжает $k_{\nu\mu}(\tau)$ за пределы этого интервала как периодическую функцию с периодом $4T$. Обозначив определенную таким образом на всей числовой оси функцию через $k_{\nu\mu}^T(\tau)$, можно написать для функций ограниченной вариации $S_{\nu\mu}^T(\omega)$ известную формулу обращения [см. ([13])]:

$$S_{\nu\mu}^T(\omega)-S_{\nu\mu}^T(\omega_0)=\lim_{\Omega\to\infty}\int\limits_{-\Omega}^{\Omega}\frac{e^{-i\omega_0\tau}-e^{-i\omega\tau}}{2\pi i\tau}\,k_{\nu\mu}^T(\tau)\,d\tau. \tag{5.8}$$

Из формул (5.7) и (5.8) предельным переходом при $T\to\infty$ получаются известное интегральное представление корреляционной функции стацио-

нарной случайной функции на всей числовой оси $|t| < \infty$ [см. (8) — (10)]:

$$k_{\nu\mu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dS_{\nu\mu}(\omega) \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, n) \tag{5.9}$$

и соответствующие формулы обращения:

$$S_{\nu\mu}(\omega) - S_{\nu\mu}(\omega_0) = \lim_{\Omega \to \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{e^{-i\omega_0\tau} - e^{-i\omega\tau}}{2\pi i\tau} k_{\nu\mu}(\tau)\, d\tau. \tag{5.10}$$

Очевидно, что функции $S_{\nu\nu}$ являются положительными неубывающими функциями, полные изменения которых на всей числовой оси равны дисперсиям соответствующих составляющих $X_\nu(t)$ векторной случайной функции $X(t)$.

Из формулы (5.4) предельным переходом при $T \to \infty$ получается каноническое представление корреляционной функции векторной стационарной случайной функции на бесконечном интервале $|t-s| < \infty$:

$$k_{\nu\mu}(t-s) = \sum_{l=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\nu l}(\omega) \overline{a_{\mu l}(\omega)} e^{i\omega(t-s)} dG_l(\omega) \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, n), \tag{5.11}$$

причем неубывающие положительные функции G_l связаны с функциями $S_{\nu\mu}$ уравнениями:

$$S_{\nu\mu}(\omega) = \sum_{l=1}^{n} \int_{-\infty}^{\omega} a_{\nu l}(\omega) \overline{a_{\mu l}(\omega)}\, dG_l(\omega) \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, n). \tag{5.12}$$

§ 6. Теория линейных преобразований случайных функций

Одной из важнейших практических задач теории случайных функций является задача преобразования случайной функции при помощи произвольного линейного оператора. В настоящей статье даются два общих метода решения этой задачи. Первый метод устанавливает закон преобразования корреляционной функции при данном линейном преобразовании случайной функции. Второй метод дает закон преобразования координатных функций канонических разложений случайной функции.

Пусть $X(t)$ — случайная функция, $\xi(t)$, $K(t, s)$ — ее математическое ожидание и корреляционная функция, A — произвольный линейный оператор, $f(\tau)$ — произвольная (не случайная) функция. Рассмотрим случайную функцию

$$Y(\tau) = AX(t) + f(\tau). \tag{6.1}$$

Обозначим через $\eta(\tau)$, $K_y(\tau, \sigma)$ математическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции Y.

В случае коммутативности оператора A и операции математического ожидания * получаем следующий общий закон преобразования математического ожидания и корреляционной функции:

$$\eta(\tau) = A\xi(t) + f(\tau), \tag{6.2}$$

$$K_y(\tau, \sigma) = A_t \overline{A}_s K(t, s) = \overline{A}_s A_t K(t, s), \tag{6.3}$$

* Практически это условие всегда соблюдается.

где индексы t и s показывают, что оператор A применяется по отношению к аргументу t, а комплексный сопряженный оператор $\overline{A}$ — по отношению к аргументу s.

Формула (6.2) выражает, что *при линейном преобразовании случайной функции ее математическое ожидание преобразуется так же, как случайная функция.*

Формула (6.3) выражает, что *при линейном преобразовании случайной функции ее корреляционная функция подвергается двойному преобразованию: преобразованию при помощи соответствующего линейного оператора A по отношению к первому аргументу и преобразованию при помощи комплексного сопряженного оператора $\overline{A}$ по отношению ко второму аргументу, причем порядок применения операторов A_t и $\overline{A}_s$ безразличен.*

Если, в частности, A есть оператор r-кратного дифференцирования по скалярной действительной переменной t:

$$Y(t) = X^{(r)}(t), \tag{6.4}$$

то формулы (6.2) и (6.3) дают:

$$\eta(t) = \xi^{(r)}(t), \tag{6.5}$$

$$K_y(t, s) = \frac{\partial^{2r} K(t, s)}{\partial t^r \partial s^r}. \tag{6.6}$$

Эти формулы справедливы и в случае, когда t — вектор произвольного числа измерений, если производные понимать как производные по данному направлению.

Если A есть оператор интегрирования

$$Y(\tau) = \int X(t)\, d_t A(t, \tau) + f(\tau), \tag{6.7}$$

то формулы (6.2) и (6.3) дают*:

$$\eta(\tau) = \int \xi(t)\, d_t A(t, \tau) + f(\tau), \tag{6.8}$$

$$K_y(\tau, \sigma) = \iint K(t, s)\, d_t A(t, \tau)\, \overline{d_s A(s, \sigma)}. \tag{6.9}$$

Формула (6.3) легко обобщается на случай, когда $K(t, s)$ есть корреляционная функция связи двух случайных функций $X(t)$ и $X_1(s)$, а $K_y(\tau, \sigma)$ — корреляционная функция связи двух случайных функций:

$$Y(\tau) = AX(t) + f(\tau), \quad Y_1(\sigma) = BX_1(s) + g(\sigma), \tag{6.10}$$

где A и B — произвольные линейные операторы. В этом случае получаем общую формулу

$$K_y(\tau, \sigma) = A_t \overline{B}_s K(t, s) = \overline{B}_s A_t K(t, s). \tag{6.11}$$

Для того чтобы найти закон преобразования координатных функций при данном линейном преобразовании случайной функции X, подставим в формулу (6.3) произвольное каноническое разложение корреляционной функции, которое для общности мы напишем в виде

$$K(t, s) = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_r(t, \omega)\, \overline{u_r(s, \omega)}\, dG_r(\omega). \tag{6.12}$$

* Формулы (6.6) и (6.9), повидимому, впервые получены Loève ([2]). Независимо от него автор получил формулы (6.6) и (6.9) в 1947 г.

Тогда, при условии коммутативности оператора A и операции интегрирования по параметру ω, найдем

$$K_y(\tau, \sigma) = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_r(\tau, \omega) \overline{p_r(\sigma, \omega)} \, dG_r(\omega), \tag{6.13}$$

где

$$p_r(\tau, \omega) = Au_r(t, \omega) \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{6.14}$$

Формула (6.14) выражает, что *при линейном преобразовании случайной функции ее координатные функции подвергаются соответствующему линейному однородному преобразованию.*

Если случайная функция X представлена каноническим разложением

$$X(t) = \xi(t) + \sum_{r=1}^{\infty} V_r u_r(t), \tag{6.15}$$

то для функции Y получаем каноническое разложение

$$Y(\tau) = \eta(\tau) + \sum_{r=1}^{\infty} V_r p_r(\tau). \tag{6.16}$$

Изложенная теория полностью применима к векторным случайным функциям. При этом аргументы t, s и τ, σ следует рассматривать как векторы, одна из составляющих каждого из которых есть номер составляющей векторной случайной функции.

Применим изложенную теорию, в частности, к системе линейных дифференциальных уравнений, содержащих случайные функции:

$$\sum_{l=1}^{m} N_{kl}\left(t, \frac{d}{dt}\right) Y_l = \sum_{l=1}^{n} M_{kl}\left(t, \frac{d}{dt}\right) X_l \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{6.17}$$

где N_{kl}, M_{kl} — полиномы относительно оператора дифференцирования, коэффициенты которых являются функциями независимой переменной t, X_l — векторная случайная функция, для которой известны математическое ожидание $\xi_l(t)$ и корреляционная функция $K_{lh}(t, s)$.

На основании общих формул (6.2) и (6.3) математическое ожидание $\eta_l(t)$ и корреляционная функция $K_{lh}^y(t, s)$ векторной случайной функции Y_l определятся системами линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{l=1}^{m} N_{kl}\left(t, \frac{d}{dt}\right) \eta_l = \sum_{l=1}^{n} M_{kl}\left(t, \frac{d}{dt}\right) \xi_l \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{6.18}$$

$$\sum_{p,q=1}^{m} N_{lp}\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) \overline{N_{hq}\left(s, \frac{\partial}{\partial s}\right)} K_{pq}^y(t, s) =$$

$$= \sum_{p,q=1}^{n} M_{lp}\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) \overline{M_{hq}\left(s, \frac{\partial}{\partial s}\right)} K_{pq}(t, s) \quad (l, h = 1, \ldots, m). \tag{6.19}$$

Если корреляционная функция $K_{pq}(t, s)$ векторной случайной функции X_p задана каноническим разложением

$$K_{pq}(t, s) = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{rp}(t, \omega) \overline{u_{rq}(s, \omega)} \, dG_r(\omega) \quad (p, q = 1, \ldots, n), \tag{6.20}$$

то корреляционная функция $K^y_{hl}(t, s)$ векторной случайной функции Y_h также выразится каноническим разложением

$$K^y_{hl}(t,s) = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{rh}(t, \omega)\, \overline{p_{rl}(s,\omega)}\, dG_r(\omega) \qquad (h, l = 1, \ldots, m), \qquad (6.21)$$

где координатные функции $p_{rh}(t, \omega)$, на основании общей формулы (6.14), определятся системами линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{l=1}^{m} N_{kl}\left(t, \frac{d}{dt}\right) p_{rl} = \sum_{l=1}^{n} M_{kl}\left(t, \frac{d}{dt}\right) u_{rl} \qquad (k = 1, \ldots, m). \qquad (6.22)$$

Если коэффициенты полиномов N_{kl}, M_{kl} постоянны, а функции X_ν стационарны, то

$$K_{\nu\mu}(t, s) = k_{\nu\mu}(t - s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)}\, dS_{\nu\mu}(\omega) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\nu r}(\omega)\, \overline{a_{\mu r}(\omega)}\, e^{i\omega(t-s)}\, dG_r(\omega) \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, n) \qquad (6.23)$$

и уравнения (6.22) дают

$$p_{rl}(t, \omega) = \sum_{k=1}^{n} Z_{lk}(i\omega)\, a_{kr}(\omega)\, e^{i\omega t} \qquad (l = 1, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots), \qquad (6.24)$$

где $Z_{lk}(i\omega)$ — передаточная функция от k-го входа на l-й выход системы. Случайный процесс на всех выходах системы будет стационарным и его корреляционная функция выразится формулой:

$$k^y_{lh}(t - s) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\nu, \mu=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{l\nu}(i\omega)\, \overline{Z_{h\mu}(i\omega)}\, a_{\nu r}(\omega)\, \overline{a_{\mu r}(\omega)}\, e^{i\omega(t-s)}\, dG_r(\omega) =$$

$$= \sum_{\nu, \mu=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{l\nu}(i\omega)\, \overline{Z_{h\mu}(i\omega)}\, e^{i\omega(t-s)}\, dS_{\nu\mu}(\omega) \qquad (l, h = 1, \ldots, m). \qquad (6.25)$$

В частном случае, когда функции G_r (а следовательно, и функции $S_{\nu\mu}$) дифференцируемы, из формулы (6.25) вытекает известное соотношение между спектральными плотностями случайного процесса на входах и выходах системы [см. ([10])].

Для уравнений с переменными коэффициентами практически важен случай, когда на входы системы подается стационарный или близкий к стационарному процесс. Мы рассмотрим более общий случай, когда координатные функции $u_{r\nu}(t, \omega)$ на входах системы выражаются формулой:

$$u_{r\nu}(t, \omega) = a_{\nu r}(t, \omega)\, e^{i\omega t} \qquad (\nu = 1, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots), \qquad (6.26)$$

где $a_{\nu r}(t, \omega)$ — медленно изменяющиеся функции t (понятие это, конечно, чисто условное; практически оно означает, что функции $a_{\nu r}(t, \omega)$ мало изменяются за один период функции $e^{i\omega t}$).

Уравнения (6.22) в рассматриваемом случае дают:

$$p_{rl}(t, \omega) = z_{lr}(t, \omega)\, e^{i\omega t} \qquad (l = 1, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots), \qquad (6.27)$$

где функции $z_{lr}(t, \omega)$ определяются системой уравнений

$$\sum_{l=1}^{m} N_{kl}\left(t, i\omega + \frac{d}{dt}\right) z_{lr} = \sum_{l=1}^{n} M_{kl}\left(t, i\omega + \frac{d}{dt}\right) a_{lr}(t, \omega) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, m; \\ r = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}. \qquad (6.28)$$

Подставляя выражение (6.27) в формулу (6.21), получим

$$\overset{y}{K}_{hl}(t, s) = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_{hr}(t, \omega)\, \overline{z_{lr}(s, \omega)}\, e^{i\omega(t-s)}\, dG_r(\omega) \quad (h, l = 1, \ldots, m). \tag{6.29}$$

Если коэффициенты уравнений (6.17) изменяются медленно, то для приближенного определения обобщенных передаточных функций z_{hr} можно применить метод последовательных приближений, отбрасывая в первом приближении производные. В этом случае передаточные функции z_{hr} в первом приближении будут выражаться так же, как в случае системы с постоянными коэффициентами. При этом часто первое приближение дает достаточную для практики точность.

Вместо метода последовательных приближений можно применить разложение передаточных функций z_{hr} по степеням искусственно введенного параметра α, заменив систему (6.28) более общей системой:

$$\sum_{l=1}^{m} N_{kl}\left(t, i\omega + \alpha \frac{d}{dt}\right) z_{lr} = \sum_{l=1}^{n} M_{kl}\left(t, i\omega + \alpha \frac{d}{dt}\right) a_{lr}(t, \omega) \quad \begin{pmatrix} k=1, \ldots, m; \\ r=1, 2, \ldots \end{pmatrix}. \tag{6.30}$$

Как известно, полученные таким образом разложения будут асимптотическими в окрестности $\alpha = 0$ [см. ([11]), ([12])].

Оценку точности первого приближения, соответствующего $\alpha = 0$, можно рекомендовать производить по членам первого порядка относительно α.

Следует отметить, что как известная формула теории стационарных случайных функций (6.25), так и более общая формула (6.29) (при рекомендуемых нами методах определения обобщенных передаточных функций z_{hr}) пригодны только для асимптотически устойчивых систем и притом для достаточно больших значений t и s, чтобы можно было пренебречь влиянием начальных условий. В общем случае необходимо учесть влияние случайных начальных условий. Так как в большинстве практических задач случайные начальные условия можно считать некоррелированными с текущими случайными возмущениями, то учет случайных начальных условий принципиальных затруднений не представляет.

§ 7. Приближенная теория преобразований случайных функций при помощи операций, близких к линейным

Если данная нелинейная операция A, применяемая к случайной функции $X(t)$, мало отличается от линейной в области практически возможных значений $X(t)$, то для приближенного определения математического ожидания и корреляционной функции случайной функции

$$Y(\tau) = A\{X(t)\} \tag{7.1}$$

можно применить два способа. Во-первых, можно линеаризировать операцию A в окрестности математического ожидания $\xi(t)$ случайной функции $X(t)$, после чего применить методы, изложенные в предыдущем параграфе. Во-вторых, можно подставить в формулу (7.1) вместо функции X какое-нибудь ее каноническое разложение

$$X(t) = \xi(t) + \sum_{r=1}^{\infty} V_r u_r(t), \tag{7.2}$$

после чего искать приближенное каноническое разложение случайной функции Y путем ее линеаризации относительно случайных величин V_r. В результате получим

$$Y(\tau) \approx \eta(\tau) + \sum_{r=1}^{\infty} V_r p_r(\tau), \tag{7.3}$$

где

$$\eta(\tau) = A\{\xi(t)\}, \tag{7.4}$$

$$p_r(\tau) = \left[\frac{\partial}{\partial V_r} A\left\{\xi(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu u_\nu(t)\right\}\right]_{V_1=V_2=\ldots=0} \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{7.5}$$

Корреляционная функция случайной функции Y выразится приближенной формулой

$$K_y(\tau, \sigma) \approx \sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r p_r(\tau) \overline{p_r(\sigma)}, \tag{7.6}$$

где Δ_r — дисперсия случайной величины V_r $(r = 1, 2, \ldots)$.

Практически одним из наиболее важных видов нелинейных операций, применяемых к случайным функциям, является решение системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих случайные функции. Этот вид нелинейных операций мы рассмотрим подробнее.

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{\mu=1}^{m} F_{\nu\mu}\left(t, \frac{d}{dt}\right) Y_\mu = f_\nu(t, Y_1, \ldots, Y_m, X_1, \ldots, X_n) \quad (\nu = 1, \ldots, m), \tag{7.7}$$

где X_k — случайные функции переменных t, $Y_1, \ldots, Y_m$:

$$X_k = X_k(t, Y_1, \ldots, Y_m) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{7.8}$$

а $F_{\nu\mu}\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ — полиномы относительно оператора дифференцирования с коэффициентами, зависящими от t.

Требуется приближенно определить математическое ожидание $\eta_\nu(t)$ и корреляционную функцию $K^y_{\nu\mu}(t, s)$ интеграла системы (7.7).

Для решения поставленной задачи удобнее всего применить метод канонических разложений. При этом, не теряя общности, можно ограничиться случаем вполне определенных (не случайных) начальных значений функций $Y_1, \ldots, Y_m$, так как к этому случаю простой заменой переменных приводится общий случай, когда начальные значения функций $Y_1, \ldots, Y_m$ случайны. Пусть

$$X_k(t, Y_1, \ldots, Y_m) = \xi_k(t, Y_1, \ldots, Y_m) + \sum_{r=1}^{\infty} V_r u_{rk}(t, Y_1, \ldots, Y_m) \quad (k=1, \ldots, n) \tag{7.9}$$

- какое-нибудь каноническое разложение векторной случайной функции X_k $(k = 1, \ldots, n)$. Подставляя разложение (7.9) в уравнения (7.7), дифференцируя эти уравнения по V_r и полагая в полученных уравнениях $V_1 = V_2 = \ldots = 0$, получим систему уравнений, приближенно определяющую математические ожидания случайных функций Y_ν $(\nu = 1, \ldots, m)$:

$$\sum_{\mu=1}^{m} F_{\nu\mu}\left(t, \frac{d}{dt}\right) \eta_\mu = f_\nu(t, \eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_1, \ldots, \xi_n) \quad (\nu = 1, \ldots, m), \tag{7.10}$$

$$\xi_k = \xi_k(t, \eta_1, \ldots, \eta_m) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{7.11}$$

и последовательность систем линейных уравнений, определяющих координатные функции приближенного канонического разложения векторной случайной функции Y_ν $(\nu = 1, \ldots, m)$:

$$\sum_{\mu=1}^{m}\left[F_{\nu\mu}\left(t, \frac{d}{dt}\right) - a_{\nu\mu}\right] p_{r\mu} = c_{r\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, m; \quad r = 1, 2, \ldots), \tag{7.12}$$

где

$$a_{\nu\mu} = \frac{\partial f_\nu(t, \eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial \eta_\mu} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_\nu(t, \eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k(t, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\partial \eta_\mu} \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, m), \tag{7.13}$$

$$c_{r\nu} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_\nu(t, \eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial \xi_k} u_{rk}(t, \eta_1, \ldots, \eta_m) \quad \begin{pmatrix} \nu = 1, \ldots, m; \\ r = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

Интегрированием уравнений (7.10) и (7.11) неизвестные математические ожидания $\eta_1, \ldots, \eta_m$ величин $Y_1, \ldots, Y_m$ определятся как функции независимой переменной t. После подстановки этих функций в формулы (7.11), (7.13), (7.14) коэффициенты $a_{\nu\mu}$ и $c_{r\nu}$ будут известными функциями t и система уравнений (7.12) будет системой линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Интегрированием системы (7.12) для значений $r = 1, 2, \ldots$ завершается решение задачи построения приближенного канонического разложения

$$Y_\nu(t) \approx \eta_\nu(t) + \sum_{r=1}^{\infty} V_r p_{r\nu}(t) \quad (\nu = 1, \ldots, m) \tag{7.15}$$

векторной случайной функции Y_ν $(\nu = 1, \ldots, m)$.

Корреляционная функция векторной случайной функции Y_ν определится приближенно формулой

$$K_{\nu\mu}^{y}(t, s) \approx \sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r p_{r\nu}(t) \overline{p_{r\mu}(s)} \quad (\nu, \mu = 1, \ldots, m), \tag{7.16}$$

где Δ_r — дисперсия величины V_r $(r = 1, 2, \ldots)$.

Изложенная теория может служить основой для исследования точности работы любых динамических систем, находящихся под действием произвольных случайных возмущений, при условии, что случайные возмущения достаточно малы для того, чтобы в пределах их возможных значений рассматриваемые системы вели себя приблизительно как линейные.

В частности, изложенная теория может служить основой для исследования точности математических машин непрерывного действия.

Развитая в настоящем параграфе теория не применима к таким системам, которые содержат существенно нелинейные элементы в пределах возможных значений случайных возмущений.

Необходимо отметить, однако, что решение задачи определения математического ожидания и корреляционной функции векторной случайной функции, определяемой системой дифференциальных уравнений, содержащих существенно нелинейные функции, принципиально невозможно в рамках теории, оперирующей только с моментами первого и второго порядка случайных функций — их математическими ожиданиями и корреляционными функциями. Для решения этой задачи необходимо

создание более сложной теории, оперирующей с моментами высших порядков или с законами распределения случайных функций.

§ 8. Теория преобразования случайных функций при помощи нелинейных операций

Общую теорию широкого класса нелинейных преобразований случайных функций можно формально построить, если ввести, кроме математического ожидания и корреляционной функции, моменты высших порядков случайной функции. Предположим, что заданы моменты случайной функции $X(t)$:

$$\mu_n(t_1, \ldots, t_n) = MX(t_1) \ldots X(t_n) \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{8.1}$$

Для моментов случайной функции

$$Y(\tau) = AX(t), \tag{8.2}$$

где A — произвольный линейный оператор, получаем формулу

$$\nu_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) = A_{t_1} \ldots A_{t_n} \mu_n(t_1, \ldots, t_n) \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{8.3}$$

которая является очевидным обобщением формул (6.2) и (6.3).

Формула (8.3) выражает, что *при преобразовании случайной функции $X(t)$ при помощи линейного оператора A ее момент порядка n подвергается n-кратному преобразованию при помощи оператора A, примененного по очереди по отношению ко всем аргументам $t_1, \ldots, t_n$, безразлично в каком порядке.*

Перейдем к нелинейным преобразованиям случайной функции $X(t)$.

Рассмотрим случайную функцию

$$Y(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} X(t_1) \ldots X(t_k), \tag{8.4}$$

где $A^{(k)}$ — произвольные линейные операторы.

Из разложения (8.4) вытекают следующие формальные разложения для моментов $\nu_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ случайной функции $Y(\tau)$:

$$\nu_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1}^{\infty} A^{(k_1)}_{t^{(1)}} \ldots A^{(k_n)}_{t^{(n)}} \mu_{k_1 + \cdots + k_n}(t_1^{(1)}, \ldots, t_{k_1}^{(1)}, \ldots, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)})$$
$$(n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{8.5}$$

где индексы $t^{(h)}$ у операторов $A^{(k)}$ указывают совокупность аргументов, по отношению к которым применяются соответствующие операторы.

Если, в частности, операторы $A^{(k)}$ являются интегральными операторами

$$A^{(k)} f(t_1, \ldots, t_k) = \int \ldots \int f(t_1, \ldots, t_k)\, d_t A_k(\tau, t_1, \ldots, t_k) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{8.6}$$

где интеграл по каждому переменному распространен на всю область изменения аргумента случайной функции $X(t)$, то формулы (8.4) и (8.5) принимают вид:

$$Y(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \int \ldots \int X(t_1) \ldots X(t_k)\, d_t A_k(\tau,\ t_1, \ldots, t_k), \tag{8.7}$$

$$\nu_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1}^{\infty} \int \cdots \int \mu_{k_1 + \cdots + k_n}(t_1^{(1)}, \ldots, t_{k_1}^{(1)}, \ldots, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}) \cdot$$
$$\cdot\, d_t A_{k_1}(\tau_1,\ t_1^{(1)}, \ldots, t_{k_1}^{(1)}) \ldots d_t A_{k_n}(\tau_n, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}). \tag{8.8}$$

Само собой разумеется, что полученные формальные разложения применимы, в частности, к векторным случайным функциям. Для этого достаточно рассматривать совокупность аргумента и номера составляющей векторной случайной функции как один векторный аргумент.

Если в уравнениях (7.7) функции f_ν являются аналитическими функциями разностей $X - \xi_k$, $Y_h - \eta_h$ и непрерывными функциями t, а случайные функции X_k (и соответственно их математические ожидания ξ_k) зависят только от t, то можно построить формальное решение уравнений (7.7) относительно $Y_h - \eta_h$ в виде ряда (8.7) относительно функций $X_k - \xi_k$. Формулы (8.8) дают в этом случае возможность формально вычислить моменты векторной случайной функции $Y_h - \eta_h$, определяемой системой (7.7). Так как любая непрерывная функция с любой степенью точности может быть приближена полиномом, то изложенный метод можно практически применить к любым дифференциальным уравнениям (7.7) с непрерывными правыми частями.

Второй метод определения моментов случайной функции $Y(\tau)$, получаемой путем нелинейного преобразования случайной функции $X(t)$, основан на применении канонических разложений случайной функции $X(t)$ или других разложений вида (7.2). Пусть

$$Y(\tau) = A\{X(t)\} - A\{\xi(t)\}, \tag{8.9}$$

где A — произвольная нелинейная операция. Подставляя в формулу (8.9) разложение (7.2) и предполагая, что полученная в результате такой подстановки функция параметров $V_1, V_2, \ldots$ является аналитической функцией этих параметров, можно построить формальное разложение случайной функции $Y(\tau)$ по степеням $V_1, V_2, \ldots$. Это разложение дает возможность найти формальное разложение моментов случайной функции $Y(\tau)$:

$$\nu_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1}^{\infty} \sum_{l_1^{(1)}, \ldots, l_{k_n}^{(n)} = 1} p_{l_1^{(1)}, \ldots, l_{k_1}^{(1)}}(\tau_1) \ldots p_{l_1^{(n)}, \ldots, l_{k_n}^{(n)}}(\tau_n) \cdot m_{l_1^{(1)}, \ldots, l_{k_1}^{(1)}, \ldots, l_1^{(n)}, \ldots, l_{k_n}^{(n)}}, \tag{8.10}$$

где $m_{l_1, \ldots, l_n}$ — моменты случайных величин $V_1, V_2, \ldots$,

$$m_{l_1, \ldots, l_n} = MV_{l_1} \ldots V_{l_n} \quad (l_1, \ldots, l_n = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{8.11}$$

а

$$p_{l_1, \ldots, l_k}(\tau) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial V_{l_1} \ldots \partial V_{l_k}} A\{X(t)\}\right]_{V_1 = V_2 = \ldots = 0} \quad \begin{pmatrix} l_1, \ldots, l_k = 1, 2, \ldots; \\ k = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

Применяя формулу (8.10) к векторной случайной функции $Y_h - \eta_h$, определяемой системой дифференциальных уравнений (7.7), (7.8), получим разложение моментов векторной случайной функции $Y_h - \eta_h$:

$$\nu_p^{h_1, \ldots, h_p}(t_1, \ldots, t_p) = \sum_{k_1, \ldots, k_p = 1}^{\infty} \sum_{l_1^{(1)}, \ldots, l_{k_p}^{(p)} = 1}^{\infty} p_{l_1^{(1)}, \ldots, l_{k_1}^{(1)}}^{(h_1)}(t_1) \ldots p_{l_1^{(p)}, \ldots, l_{k_p}^{(p)}}^{(h_p)}(t_p) \cdot$$
$$\cdot m_{l_1^{(1)}, \ldots, l_{k_1}^{(1)}, \ldots, l_1^{(p)}, \ldots, l_{k_p}^{(p)}} \quad (h_1, \ldots, h_p = 1, \ldots, m). \tag{8.13}$$

Для функций $p^{(h)}_{l_1, \dots, l_k}(t)$ путем последовательного дифференцирования уравнений (7.7) по параметрам V_l и приравнивания после этого величин V_l нулю получим системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{\mu=1}^{m}\left[F_{\nu\mu}\left(t, \frac{d}{dt}\right) - a_{\nu\mu}\right] p^{(\mu)}_{l_1, \dots, l_k} = c^{(\nu)}_{l_1, \dots, l_k} \begin{pmatrix} \nu=1, \dots, m; k=1, 2, \dots \\ l_1, \dots, l_k = 1, 2, \dots \end{pmatrix}, \tag{8.14}$$

где $c^{(\nu)}_{l_1, \dots, l_k}$ — функции, зависящие от ранее определенных функций $p^{(\nu)}_{l_1, \dots, l_h}$ $(h = 1, \dots, k-1)$ и от координатных функций разложения (7.9) $u_{rk}(t, \eta_1, \dots, \eta_m)$ и их последовательных производных по $\eta_1, \dots, \eta_m$.

Изложенный метод дает принципиальную возможность приближенно вычислять моменты векторной случайной функции $Y_\nu - \eta_\nu$, определяемой произвольной системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида (7.7), (7.8) с непрерывными правыми частями f_ν. Так как при этом не приходится ограничиваться случаем, когда случайные функции X_k зависят только от t, то изложенный метод в данном случае является более сильным, чем первый метод, основанный на применении формулы (8.8).

Заметим в заключение, что изложенные в этом параграфе два метода определения моментов случайной функции, полученной путем применения к данной случайной функции произвольной нелинейной операции, являются лишь началом разработки общей теории нелинейных преобразований случайных функций.

Поступило
6. I. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пугачев В. С., Основы общей теории случайных функций, Труды Академии арт. наук, 1952.

[2] Loève M., Fonctions aléatoires de second ordre, Revue scient., 84, N 4 (1946), 195—206.

[3] Lévy P., Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris, 1948.

[4] Karhunen K., Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae, A. I, N 37 (1947), 79.

[5] Karhunen K., Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen, Ark. f. Mat., 1, H. 2 (1950), 141—160.

[6] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, М. — Л., 1936.

[7] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, М. — Л., 1941.

[8] Хинчин А. Я., Теория корреляции стационарных стохастических процессов, Усп. мат. наук, вып. V (1938), 42—51.

[9] Колмогоров А. Н., Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром, Юбилейный сборник Ак. наук СССР, т. 1 (1947), 242—254.

[10] Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р. (ред.), Теория следящих систем, ИИЛ, 1951.

[11] Пугачев В. С., Об асимптотических представлениях интегралов систем линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 5 (1941), 75—84, 431—439.

[12] Пугачев В. С., Об асимптотических представлениях интегралов систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Матем. сборник, 15 (57), № 1 (1944), 13—46.

[13] Гливенко В. И., Интеграл Стильтьеса, М. — Л., 1936.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 421—460

М. А. ЕВГРАФОВ

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, БЛИЗКИХ К $\{z^n P(z)\}$, $\{[\varphi(z)]^n\}$, И О НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

В статье решается вопрос о полноте и неполноте систем аналитических функций, близких к некоторым известным системам. Эта задача приводится к интегральным уравнениям. Полученные результаты применяются к интерполяционной задаче Абеля — Гончарова.

Большинство известных до сих пор критериев полноты систем аналитических функций являются или грубо достаточными, или применимы лишь к чрезвычайно правильным системам. Точнее говоря, критерии первого рода, применимые к довольно широкому классу систем аналитических функций, или просто далеки от необходимых, или являются близкими к необходимым для всего класса. При этом, естественно, необходимость для всего класса подтверждается случаями, так сказать, «патологическими», т. е. предельно неправильными. Для конкретной и сравнительно правильной системы эти достаточные условия бывают обычно весьма далеки от необходимых. Например, оценка радиуса полноты системы $\{e^{\alpha_n z} z^n\}$, изучавшейся многими авторами, для $|\alpha_n| \leqslant 1$ неизвестно насколько далека от необходимой и, во всяком случае, довольно далека от истинного радиуса полноты системы $\{z^n e^{(-1)^n z}\}$, хотя одно время и полагали, что именно для нее радиус полноты будет наименьшим.

Критерии другого рода, напротив, совершенно точны, но охватывают чрезвычайно узкие классы систем. Например, для тех же систем $\{z^n e^{\alpha_n z}\}$ известны результаты лишь для случаев $\alpha_n = e^{\frac{2\pi i n}{m}}$ и $\alpha_n = cn$. (Первый был исследован В. Л. Гончаровым, второй изучался многими авторами, но исчерпывающее решение дал А. О. Гельфонд.)

Методы, примененные для получения этих результатов, не допускают ни малейшего отклонения от этих конкретных систем (во всяком случае, если оставаться в классе систем $\{z^n e^{\alpha_n z}\}$).

В настоящей статье предлагается метод, позволяющий дать решение задач, близких к многим правильным задачам. Этот метод позволяет, например, указать точный радиус полноты для систем $\{z^n e^{\alpha_n z}\}$ при

$$\alpha_n = e^{\frac{2\pi i n}{m}} + \lambda_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty,$$

определить точные области полноты при $\alpha_n = cn + n^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, и т. д. Сущность метода состоит в приведении задач этого рода к интегральным уравнениям, для которых удается установить существование решений и некоторые их свойства.

Целью статьи является, в основном, изложение принципиальной стороны вопроса, поэтому большинство ограничений намеренно взято очень жестким для упрощения доказательств. Многие из них могут быть сильно ослаблены, возможно, даже в очень существенных местах *. Примеры применения метода даны, в основном, с целью иллюстрации, хотя выбраны так, что представляют и самостоятельный интерес.

§ 1. Общие замечания и вспомогательные теоремы

В работе решаются следующие задачи для систем $\{f_n(z)\}$ некоторого вида.

Дана система $\{f_n(z)\}$. Указать области D такие, что всякая функция $f(z)$, регулярная в D, разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z), \tag{1.1}$$

сходящийся равномерно внутри D.

Дана система $\{f_n(z)\}$. Указать области D такие, что всякая функция $f(z)$, регулярная в D, может быть представлена в виде

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k} a_n f_n(z), \tag{1.2}$$

где стремление к пределу равномерно внутри D, а $c_{n,k}$ не зависят от $f(z)$.

Дана система $\{f_n(z)\}$. Указать области D такие, что всякая функция $f(z)$, регулярная в D, может быть представлена в виде

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} f_n(z), \tag{1.3}$$

где стремление к пределу равномерно внутри D.

При решении этих задач мы будем часто пользоваться следующим утверждением, вытекающим из «принципа двойственности» А. И. Маркушевича ([3]):

1°. *Для того чтобы любая регулярная в области D функция $f(z)$ могла быть представлена в виде*

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} f_n(z),$$

где стремление к пределу равномерно внутри D, необходимо и достаточно, чтобы из условий

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f_n(z)\, h(z)\, dz = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

(C внутри D, $h(z)$ регулярна вне C) следовало $h(z) \equiv 0$.

---

* Основания для таких предположений дают, например, результаты, полученные в моей статье ([6]).

Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что области, которые мы рассматриваем, конечны, односвязны и имеют достаточно гладкую границу, функции $f_n(z)$ всегда регулярны в областях, в которых мы их рассматриваем, и, наконец (это уже зависит от специфики наших $\{f_n(z)\}$), области D всегда содержат точку $z=0$.

Нами будет использовано еще одно утверждение, несущественно обобщающее предложение 1°:

2°. *Для того чтобы функция $f(z)$, регулярная в области D и удовлетворяющая условиям*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)\,h_k(z)\,dz=0, \quad k=1,\,2,\,\ldots,\,m \tag{1.5}$$

(C_1 внутри D, $h_k(z)$ регулярны вне C_1), могла быть представлена в виде (1.3), *необходимо и достаточно, чтобы из выполнения условий* (1.4) *следовало:*

$$h(z)=c_1h_1(z)+\cdots+c_m h_m(z). \tag{1.6}$$

Доказательство. Необходимость очевидна, так как из (1.3) и (1.4) следует

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)\,h(z)\,dz=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,\,k}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f_n(z)\,h(z)\,dz=0.$$

Для доказательства достаточности построим функции $\overline{f}_1(z),\ \ldots,\overline{f}_m(z)$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\overline{f}_k(z)\,h_n(z)\,dz=\delta_{n,\,k} \quad (\delta_{n,k}=0 \text{ при } k=n,\ \delta_{n,\,n}=1) \tag{1.7}$$

и регулярные в $\overline{D}$. (Такое построение возможно, если $h_k(z)$ линейно независимы.) Система функций $\{\overline{f}_n(z)\}$, где $\overline{f}_{m+n}(z)=f_n(z)$, удовлетворяет условиям утверждения 1°. Поэтому любая функция $f(z)$, регулярная в D, может быть представлена в виде

$$f(z)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,\,k}\overline{f}_n(z).$$

Но если $f(z)$ удовлетворяет условиям (1.5), то $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n,\,k}=0$ при $n=1,\,2,\,\ldots,\,m$, т. е. любая функция $f(z)$, регулярная в D и удовлетворяющая условиям (1.5), может быть представлена в виде (1.3).

Нам понадобятся еще некоторые сведения о системах $\{f_n(z)\}$. Мы получим их, наложив, ради простоты, на $\{f_n(z)\}$ очень жесткие ограничения (естественно, не жестче тех, которым удовлетворяют системы, рассматриваемые нами в дальнейшем):

1. $f_n(z)=z^n+\sum\limits_{m+1}^{\infty}a_{m,n}\,z^m$.

2. Существуют ρ и R такие, что для любой $f(z)$, регулярной в круге $|z|<R$, ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,f_n(z)$$

сходится равномерно при $|z|\leqslant\rho$.

3. Ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\zeta) f_n(z) \tag{1.8}$$

сходится равномерно по z и ζ при $|\zeta| \geqslant R$, $|z| \leqslant \rho$ и $v^n(\zeta)$ регулярны при $|\zeta| \geqslant R$.

При этих ограничениях имеет место утверждение

3°. *$v_n(\zeta)$ имеют вид:*

$$v_n(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n,k}}{\zeta^{k+1}} \tag{1.9}$$

и удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f_n(z) v_m(z)\, dz = \delta_{n,m}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Умножая (1.8) на $f_m(\zeta)$ и интегрируя по $|\zeta| = R$, получаем:

$$f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} f_n(z), \quad a_n^{(m)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} f_m(\zeta) v_n(\zeta)\, d\zeta. \tag{1.11}$$

Разлагая (1.11) в степенной ряд и сравнивая коэффициенты при равных степенях z, получаем:

$$a_n^{(m)} = \delta_{n,m}.$$

Далее, умножая на ζ^m и интегрируя по $|\zeta| = R$, приходим к равенству

$$z^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(m)} f_n(z), \quad c_n^{(m)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} v_n(\zeta) \zeta^m\, d\zeta.$$

Опять разлагая в степенной ряд и сравнивая коэффициенты, придем к выводу, что $c_n^{(m)} = 0$ при $n < m$, $c_n^{(n)} = 1$. Это означает, что члены со степенями $\frac{1}{\zeta}$, большими, чем $n+1$, в разложении $v_n(\zeta)$ отсутствуют, а коэффициент при $\frac{1}{\zeta^{n+1}}$ равен единице. Остается лишь отметить, что условиями (1.10) однозначно определяются и остальные коэффициенты $v_n(\zeta)$, так как (1.10) дает для них систему линейных уравнений с определителем, равным единице. Этим утверждение 3° доказано.

Систему функций $\{v_n(z)\}$ мы будем называть системой, биортогональной с системой $\{f_n(z)\}$.

Пусть $f(z)$ — какая-нибудь функция, регулярная в некоторой окрестности точки $z = 0$. Определим числа a_n формулой:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) v_n(z)\, dz \tag{1.12}$$

(C содержит точку $z = 0$ внутри, $f(z)$ регулярна в $\overline{D}$) и назовем их коэффициентами разложения $f(z)$ по функциям системы $\{f_n(z)\}$. (Это название совершенно естественно, поскольку, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f(z)$ сходится к $f(z)$, то, умножая на $v_n(z)$ и интегрируя, получаем $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z) v_n(z)\, dz$.)

Отметим некоторые свойства этих коэффициентов.

4°. *Если для* $f(z)$, *регулярной в некоторой окрестности точки* $z=0$, *все* a_n *равны нулю, то* $f(z)\equiv 0$.

5°. *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$ *сходится в некоторой окрестности точки* $z=0$ *к тождественному нулю, то все* a_n *равны нулю.*

Заметим, что первые две задачи, которые мы поставили в начале параграфа, могут быть теперь сформулированы так:

Дано формальное разложение $f(z)$ в ряд по $f_n(z)$. Определить область его сходимости.

Дано формальное разложение $f(z)$ в ряд по $f_n(z)$. Определить, где оно может быть просуммировано и каким методом.

Решение этих задач может быть приведено к решению некоторых функциональных уравнений. А именно, справедливо утверждение

6°. *Пусть* S_r *означает связную часть множества точек* z, *для которых ряд*

$$F(z, \zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{\zeta^{n+1}} \tag{1.13}$$

сходится при всех ζ, $|\zeta| \geqslant r$. *Тогда любая функция, регулярная в* S_r, *может быть разложена в ряд по* $f_n(z)$, *равномерно сходящийся внутри* S_r, *если функциональное уравнение*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} F(z, \zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta=f(z), \quad r_1<r, \tag{1.14}$$

имеет решение $g(\zeta)$, *регулярное при* $|\zeta|<r$ *для любой функции* $f(z)$, *регулярной в* S_r.

Доказательство. Действительно, если $g(\zeta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ удовлетворяет уравнению (1.14) и регулярна при $|\zeta|<r$, то, взяв r_1 настолько близко к r, чтобы ряд (1.13) сходился при $z \in G \subset S_r$, $|\zeta|=r_1$, получим, выполнив интегрирование:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z),$$

причем сходимость равномерна при $z \in G$.

Аналогичное утверждение будет использовано нами для решения второй задачи.

7°. *Пусть* G — *конечная односвязная область, содержащая точку* $\zeta=0$, $S(G)$ — *связная часть множества точек регулярности* $F(z, \zeta)$ *при* ζ *вне* G. *Тогда ряд* $f(z) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$ *может быть просуммирован в* $S(G)$, *если функциональное уравнение*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'} F(z, \zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta=f(z) \tag{1.15}$$

имеет решение $g(\zeta)$, *регулярное в* G. *В качестве метода суммирования*

можно взять любой метод, суммирующий степенной ряд для $g(\zeta)$ *в* G. ($f(z)$ *регулярна в* $S(G)$.)

Доказательство. Действительно, если

$$g(\zeta) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k} a_n \zeta^n \tag{1.16}$$

равномерно внутри G, то, подставляя (1.16) в (1.15) и выполняя интегрирование, получаем:

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k} a_n f_n(z),$$

где $c_{n,k}$ не зависят от $f(z)$, а стремление к пределу равномерно при $z \in D \subset S(G)$.

Перейдем к связи этих вопросов с интерполяционными задачами. Самая общая интерполяционная задача может быть сформулирована следующим образом.

Дана аналитическая функция класса A и система функционалов $\{l_n(F)\}$, определенная на всех функциях этого класса.

Найти класс $A' \subset A$, для которого из $F(z) \in A'$ и $l_n(F) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, следует $F(z) \equiv 0$.

Выделить некоторыми дополнительными условиями функции $\varphi_n(z) \in A$, удовлетворяющие условиям $l_n(\varphi_m) = \delta_{n,m}$, и найти класс A, для которого из $F(z) \in A''$ следует

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(F) \varphi_n(z).$$

Найти способ конструкции $F(z) \in A'$ и по $l_n(F)$.

Нас будет интересовать более частный случай. Мы будем рассматривать классы функций лишь следующего вида.

Пусть $\Phi(z, \zeta)$ — целая аналитическая функция z и ζ обладающая тем свойством, что если $h(\zeta)$ регулярна вне C и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(z, \zeta) h(\zeta) d\zeta \equiv 0,$$

то $h(\zeta) \equiv 0$.

В качестве классов A мы будем допускать лишь классы функций, представимых в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta,$$

где $f(\zeta)$ — любая функция, регулярная вне C.

Системы функционалов будем рассматривать лишь такие, для которых функции

$$f_n(z) = \underset{t}{l_n}[\Phi(t, z)]$$

образуют рассмотренные нами системы.

Определенные выше классы функций будем сокращенно обозначать через $A(\Phi, D)$ (C — граница D).

В качестве функций $\varphi_n(z)$ мы будем брать

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \Phi(z, \zeta)\, v_n(\zeta)\, d\zeta,$$

где $\{v_n(z)\}$ — система функций, биортогональная к системе $\{f_n(z)\}$. $\varphi_n(z)$ мы будем называть интерполяционными многочленами. (Они действительно будут многочленами, если $\Phi(z, \zeta) = \psi(z \cdot \zeta)$.)

Отметим три факта, на которые будем опираться в дальнейшем.

8°. *Если любая функция $f(z)$, регулярная в D, может быть представлена в виде*

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} f_n(z), \quad f_n(z) = \underset{t}{l_n}[\Phi(t, z)],$$

то из $F(z) \in A(\Phi, D)$ и $f_n(F) = 0$ следует $F(z) \equiv 0$.

В этом случае класс $A(\Phi, D)$ мы будем называть классом единственности данной интерполяционной задачи.

Утверждение 8° является следствием «принципа двойственности» А. И. Маркушевича, но легко доказывается и непосредственно. Действительно, $\Phi(z, \zeta)$ регулярна по ζ в D, поэтому

$$\Phi(z, \zeta) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,k}(z) f_n(\zeta),$$

где стремление к пределу равномерно по ζ в любой области D_1, лежащей строго внутри D. Но если $F(z) \in A(\Phi, D)$, то

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \Phi(z,\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta,$$

причем за C_1 можно взять контур, лежащий внутри D. Тогда имеем:

$$F(z) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,k}(z) f_n(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta = \lim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{n,k}(z)}{2\pi i}\int\limits_{C_1} f_n(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta.$$

Но

$$l_n(F) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} l_n[\Phi(z, \zeta)]\, g(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} f_n(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta.$$

Поэтому из $l_n(F) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ следует $F(z) \equiv 0$, что и доказывает утверждение 8°.

9°. *Если ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$, где $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\, v_n(z)\, dz$, сходится в области D для любой функции $f(z)$, регулярной в D, то класс $A(\Phi, D)$ является классом сходимости данной интерполяционной задачи $(f_n(z) = \underset{t}{l_n}[\Phi(t, z)])$.*

10° *Если ряд $f(z) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$, где $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\, v_n(z)\, dz$, может быть просуммирован к $f(z)$ в области D для всякой $f(z)$, регулярной*

в области D, методом $\|c_{n.k}\|$, то в классе $A(\Phi, D)$ любая функция может быть восстановлена по значениям $l_n(F)$ при помощи ряда

$$F(z) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k} \varphi_n(z) l_n(F),$$

где $c_{n,k}$ не зависят от $F(z)$, а $\varphi_n(z)$ — интерполяционные многочлены.

Доказательства утверждений 9° и 10° получаются немедленно подстановкой в выражение для $F(z)$ разложения $\Phi(z, \zeta)$ по функциям $\{f_n(\zeta)\}$.

Перейдем теперь к вспомогательным результатам, касающимся решения интегральных уравнений некоторого вида. К такого рода уравнениям будут приведены задачи о полноте систем функций и, в силу сделанных замечаний, интерполяционные задачи.

§ 2. Некоторые свойства интегральных уравнений с аналитическим ядром

В этом параграфе мы исследуем свойства решений интегральных уравнений вида:

$$P(z) g(z) = \frac{\lambda}{2\pi i} \int_C K(z, \zeta) g(\zeta) d\zeta + f(z), \tag{2.1}$$

где C — граница конечной односвязной области D, $f(z)$ и $P(z)$ регулярны в $\overline{D}$, а $K(z, \zeta)$ удовлетворяет некоторым условиям.

Основная трудность при исследовании уравнений вида (2.1) состоит в выяснении условий их разрешимости для заданной функции $f(z)$. Мы обойдем эту трудность, наложив на $K(z, \zeta)$ такие условия, при которых вопрос о разрешимости этого уравнения среди аналитических функций сведется к вопросу о разрешимости уравнения Фредгольма среди функций, определенных только на C.

Будем говорить, что $K(z, \zeta)$ удовлетворяет условию А на контуре C, если $K(z, \zeta)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

A_1. $K(z, \zeta)$ регулярна по z в D при ζ вне D и по ζ вне $\overline{D}$ при z в $\overline{D}$. Кроме того,

$$\int_{C_\rho} \int_{C_{\rho'}} |K(z, \zeta)|^2 |dz| |d\zeta| \leqslant M, \quad \rho \leqslant 1, \quad \rho' \leqslant 1,$$

где C_ρ и $C_{\rho'}$ — образы окружностей $|z| = \rho$, $|\zeta| = \rho'$ при конформном отображении единичного круга на внутренность, соответственно, внешность D.

A_2. При тех же условиях регулярности $(z - \zeta)^\mu K(z, \zeta)$ непрерывна при z в D, ζ вне D $(0 \leqslant \mu < 1)$.

Если же $K(z, \zeta)$ удовлетворяет условию А на любом контуре, содержащем точку $z = 0$ и лежащем в круге $|z| < R$, то мы будем говорить, что $K(z, \zeta)$ удовлетворяет условию В.

Докажем две небольшие леммы.

ЛЕММА 1. *Если* $K(z,\zeta)$ *удовлетворяет условию* A_1 *на окружности* $|z|=1$, *то*

$$\lim_{r\to 1-0} A(r)=0, \quad A(r)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |K(e^{i\varphi},\ e^{i\theta})-K(re^{i\varphi},\ e^{i\theta})|^2\, d\varphi\, d\theta.$$

Доказательство. Из условия A_1 имеем: $A(r)\leqslant M$ при $r\leqslant 1$. Если положить

$$K(z,\ \zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n(z)}{\zeta^{n+1}}, \quad k_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty} k_{n,\,m}z^m,$$

$$A_n(r)=\int_0^{2\pi} |k_n(e^{i\varphi})-k_n(re^{i\varphi})|^2\, d\varphi=\sum_{m=0}^{\infty}(1-r^m)^2\,|k^2_{n,\,m}|,$$

то

$$A(r)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(r).$$

Легко заметить, что $A_n(r)$, а следовательно, и $A(r)$ — убывающие функции r. Кроме того,

$$\int_0^{2\pi} |k_n(re^{i\varphi})|^2\, d\varphi< M,$$

т. е. $k_n(z)$ принадлежит классу H_2, следовательно, $\lim\limits_{r\to 1-0} A_n(r)=0$.

Поэтому, выбирая N так, чтобы $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} A_n(0)<\varepsilon$, получим:

$$\lim_{r\to 1-0} A(r)\leqslant \lim_{r\to 1-0}\sum_{n=0}^{N} A_n(r)+\sum_{n=N+1}^{\infty} A_n(0)<\varepsilon,$$

что и доказывает лемму, так как ε произвольно мало.

ЛЕММА 2. *Если* $K(z,\ \zeta)$ *удовлетворяет на окружности* $|z|=1$ *условию* A_2, *то*

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi} |K(e^{i\varphi},\ e^{i\theta})-K(re^{i\varphi},\ e^{i\theta})|\, d\theta=0$$

равномерно по φ.

Доказательство. Обозначим $K_1(z,\ \zeta)=(z-\zeta)^{\mu}K(z,\ \zeta)$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} |K(e^{i\varphi},\ e^{i\theta})-(K\, re^{i\varphi}, e^{i\theta})|\, d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi} |K_1\ (e^{i\varphi}), e^{i\theta})\,(e^{i\varphi}-e^{\theta i})^{-\mu}-K_1(re^{i\varphi},\ e^{i\theta})\,(re^{i\varphi}-e^{i\theta})^{-\mu}|\, d\theta\leqslant$$

$$\leqslant A_1(r)+A_2(r)+A_3(r),$$

где

$$A_1(r)=\int_0^{2\pi} |K_1(e^{i\varphi},\ e^{i\theta})-K_1(re^{i\varphi},\ e^{i\theta})|\,|1-e^{i(\theta-\varphi)}|^{-\mu}\, d\theta<$$

$$<\varepsilon(r)\, 2\int_0^{\pi}|1-e^{i\alpha}|^{-\mu}\, d\alpha,$$

$$\varepsilon(r)=\max_{\theta,\,\varphi}|K_1(e^{i\varphi},e^{i\theta})-K_1(re^{i\varphi},\ e^{i\theta})|,$$

$$A_2(r)=\int_{\eta}^{2\pi-\eta}|K_1(re^{i\varphi},\ e^{i(\theta+\varphi)})||(1-e^{i\theta})^{-\mu}|\,d\theta<K_1\varepsilon_1(r),$$

$$\varepsilon_1(r)=\int_0^{2\pi}|(1-e^{i\theta})^{-\mu}-(r-e^{i\theta})^{-\mu}|\,d\theta,$$

$$A_3(r)=4\int_0^{r}|K_1(re^{i\varphi},\ e^{i(\theta+\varphi)})||1-e^{i\theta}|^{-\mu}\,d\theta<K_2\varepsilon_2(\eta),$$

$$\varepsilon_2(\eta)=\int_0^{\eta}|1-e^{i\theta}|^{-\mu}\,d\theta.$$

Так как $\varepsilon(r)$, $\varepsilon_1(r)$, $\varepsilon_2(\eta)$ не зависят от φ и могут быть сделаны сколь угодно малыми при r, достаточно близком к единице, то утверждение леммы доказано.

Докажем теорему, связывающую решения уравнения

$$g(z)P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C K(z)\,g(\zeta)\,d\zeta+f(z) \qquad (2.2)$$

при z на C с аналитическими решениями этого уравнения, имеющими a priori смысл лишь при z в D.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $K(z,\zeta)$ *удовлетворяет условию* A *на* C, $P(z)$ *и* $f(z)$ *регулярны в* $\overline{D}$ *и* $P(z)\neq 0$ *на* C. *Тогда значения любого решения уравнения* (2.2) *совпадают с граничными значениями функции* $\frac{g_1(z)}{P(z)}$ *при* $z\to C$ *изнутри, где* $g_1(z)$ *регулярна в* D, *и функция* $\frac{g_1(z)}{P(z)}$ *удовлетворяет уравнению* (2.1). *Точно так же значения любого решения уравнения*

$$h(\zeta)=\frac{\lambda}{2\pi i}\int_C K(t,\zeta)\,h(t)\frac{dt}{P(t)}+f_1(\zeta) \qquad (2.3)$$

ζ — *на* C, $f_1(\zeta)$ *регулярна вне* C), *союзного с* (2.2), *совпадают с граничными значениями функции, регулярной вне* C *и удовлетворяющей уравнению*

$$h(\zeta)=\frac{\lambda}{2\pi i}\int_C K(t,\zeta)\,h(t)\frac{dt}{P(t)}+f_1(\zeta)\quad(\zeta\ \textit{вне}\ \overline{D}), \qquad (2.4)$$

которое мы будем называть союзным с (2.1).

Доказательство. Так как мы договорились считать все наши кривые достаточно гладкими, то, без ограничения общности, можно положить, что C — окружность $|z|=1$. Рассмотрим сначала случай условия A_2. В этом случае решениями уравнения (2.2) считаются лишь непрерывные функции [см. ([4])]. Пусть $g^*(z)$ — решение уравнения (2.2), непрерывное на C. Рассмотрим функцию

$$g_1(z)=\frac{\lambda}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}K(z,\zeta)\,g^*(\zeta)\,d\zeta+f(z). \qquad (2.5)$$

В силу условий теоремы, она определена при $|z|<1$ и принадлежит классу H_1. Покажем, что ее предельные значения на окружности совпадают с $g^*(z)P(z)$. Имеем:

$$P(e^{i\varphi})g^*(e^{i\varphi}) - g_1(re^{i\varphi}) =$$
$$= \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}[K(e^{i\varphi},\zeta) - K(re^{i\varphi},\zeta)]g^*(\zeta)\,d\zeta + f(e^{i\varphi}) - f(re^{i\varphi}).$$

Переходя к пределу при $r \to 1-0$, в силу леммы 2, имеем:

$$P(e^{i\varphi})g^*(e^{i\varphi}) - \lim_{r\to 1-0} g_1(re^{i\varphi}) = 0, \text{ т. е. } g^*(e^{i\varphi}) = \frac{g_1(e^{i\varphi})}{P(e^{i\varphi})}.$$

Точно так же получаем утверждение теоремы и для случая союзного уравнения.

Если $K(z,\zeta)$ удовлетворяет условию A_1, то решениями (2.2) считаются лишь функции с интегрируемым квадратом [см. ([5])]. Пусть $g^*(z)$ — такая функция. Попрежнему определим $g_1(z)$ равенством (2.5). $g_1(z)$ регулярна при $|z|<1$ и принадлежит классу H_2. Покажем, что ее предельные значения на окружности совпадают с $g^*(z)P(z)$ в смысле L_2, т. е. что

$$\int\limits_0^{2\pi} |g^*(e^{i\varphi})P(e^{i\varphi}) - g_1(e^{i\varphi})|^2\,d\varphi = 0. \tag{2.6}$$

Положим

$$u_r(\varphi) = g^*(e^{i\varphi})P(e^{i\varphi}) - (re^{i\varphi})$$

и оценим $\int\limits_0^{2\pi}|u_r(\varphi)|^2\,d\varphi$. Имеем:

$$\int\limits_0^{2\pi}|u_r(\varphi)|^2\,d\varphi \leqslant \frac{|\lambda|^2}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|K(e^{i\varphi},e^{i\theta}) - K(re^{i\varphi},e^{i\theta})|^2\,d\varphi\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}|g^*(e^{i\varphi})|^2\,d\varphi +$$
$$+2\int\limits_0^{2\pi}|f(e^{i\varphi}) - f(re^{i\varphi})|^2\,d\varphi.$$

Переходя к пределу, получаем (2.6), в силу леммы 1. Точно так же доказывается утверждение о союзном уравнении.

Следствие 1. *Если уравнение*

$$P(z)g(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_C K(z,\zeta)g(\zeta)\,d\zeta \tag{2.7}$$

не имеет нетривиального решения, то уравнение (2.1) *разрешимо для любой* $f(z)$, *регулярной в* $\overline{D}$, *а уравнение* (2.4) *разрешимо для любой* $f_1(\zeta)$, *регулярной вне* D.

Следствие 2. *Если любое решение уравнения* (2.7) *имеет вид*

$$c_1 g_1(z) + \cdots + c_m g_m(z),$$

где $g_k(z)\cdot P(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ *регулярны в* D, *то любое решение уравнения*

$$h(\zeta) = \frac{\lambda}{2\pi t}\int\limits_C K(t,\zeta)\frac{h(t)}{P\cdot(t)}\,dt \tag{2.8}$$

имеет вид

$$c_1 h_1(z) + \cdots + c_m h_m(z),$$

где $h_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ *регулярны вне* D, *и для разрешимости уравнения* (2.1) *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\, h_k(z)\, dz = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{2.9}$$

а для разрешимости уравнения (2.4) *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f_1(\zeta)\, g_k(\zeta)\, d\zeta = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.10}$$

Следствия 1 и 2 показывают, что на уравнения вида (2.1) переносятся в той или иной степени свойства обычных интегральных уравнений Фредгольма. Сейчас мы отметим несколько свойств уравнений вида (2.1), не имеющих аналогичных среди свойств обычных интегральных уравнений.

ЛЕММА 3. *Пусть* C_1 *лежит внутри* C *и* $K(z, \zeta)$ *удовлетворяет условию* A *на* C *и на* C_1, $P(z) \neq 0$ *ни на* C, *ни на* C_1. *Тогда любое решение уравнения*

$$P(z)\, g(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_C K(z, \zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta + f(z),$$

регулярное в $D - D_1$, *является также решением уравнения*

$$P(z)\, g(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{C_1} K(z, \zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta + f(z).$$

Доказательство. Так как при z внутри C_1 $K(z, \zeta)$ и $g(\zeta)$ регулярны между C и C_1, то

$$\int_C K(z, \zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta = \int_{C_1} K(z, \zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta,$$

что и доказывает лемму, в силу принципа аналитического продолжения.

ЛЕММА 4. *Пусть* C_1 *лежит внутри* C, $K(z, \zeta)$ *удовлетворяет условию* A *на* C *и на* C_1, $P(z) \neq 0$ *ни на* C, *ни на* C_1. *Тогда любое решение уравнения*

$$h(\zeta) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{C_1} K(t, \zeta)\, \frac{h(t)}{P(t)}\, dt + f_1(\zeta)$$

такое, что $\frac{h(t)}{P(t)}$ *регулярно в* $D - D_1$, *является также решением уравнения*

$$h(\zeta) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_C K(t, \zeta)\, \frac{h(t)}{P(t)}\, dt + f_1(\zeta).$$

Доказательство. Точно так же при выполнении условий леммы 4

$$\int_C K(t, \zeta)\, \frac{h(t)}{P(t)}\, dt = \int_{C_1} K(t, \zeta)\, \frac{h(t)}{P(t)}\, dt \text{ при } \zeta \text{ вне } C,$$

что и доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть C_1 лежит внутри C, $K(z, \zeta)$ удовлетворяет условию* А *на C и на C_1, $P(z) \neq 0$ при $z \in D - D_1$. Тогда уравнения*

$$P(z)\,g(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{C_1} K(z, \zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta + f(z)$$

и

$$P(z)\,g(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{C} K(z, \zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta + f(z),$$

а также

$$h(\zeta) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{C} K(t, \zeta)\frac{h(t)}{P(t)}\,dt + f_1(\zeta)$$

и

$$h(\zeta) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{C_1} K(t, \zeta)\frac{h(t)}{P(t)}\,dt + f_1(\zeta)$$

имеют одни и те же решения.

Доказательство. В силу лемм 3 и 4 получаем утверждение теоремы для первой пары уравнений от C к C_1, для второй — от C_1 к C.

Рассмотрим уравнения

$$P(z)\,g(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{C_1} K(z, \zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta + f(\zeta) \tag{2.11}$$

и

$$P(z)\,g(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{C} K(z, \zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta + f(z)\,. \tag{2.12}$$

Для разрешимости (2.11) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int\limits_{C_1} f(z)\,h_k(z)\,dz = 0 \quad (k = 1,2, \ldots, m),$$

где $h_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — функции фундаментальной системы уравнения

$$h(\zeta) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{Ci} K(t, \zeta)\frac{h(t)}{P(t)}\,dt. \tag{2.13}$$

Фундаментальная система уравнения

$$h(\zeta) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{C} K(t, \zeta)\frac{h(t)}{P(t)}\,dt \tag{2.14}$$

содержит фундаментальную систему уравнения (2.13). Но, с другой стороны, число функций фундаментальной системы уравнения (2.14) равно числу функций фундаментальной системы уравнения (2.12), которое не больше числа функций фундаментальной системы уравнения (2.11), равного, в свою очередь, соответствующему числу для уравнения (2.15).

Таким образом, фундаментальные системы уравнений (2.11) и (2.12), (2.13) и (2.14) одни и те же. Следовательно, одни и те же и условия разрешимости. Это доказывает справедливость утверждения теоремы.

Докажем еще одну теорему, несколько дополняющую теорему 2.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть C_1 лежит внутри C, $K(z, \zeta)$ удовлетворяет условию* А *на C и на C_1, $P(z)$ имеет в $D - D_1$ нули $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ с крат-*

ностями $r_1, \ldots, r_k$, $P(z) \neq 0$ *ни на* C, *ни на* C_1. *Тогда, если* λ_1 — *собственное значение уравнения*

$$P(z)\,g(z) = \frac{\lambda_1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} K(z, \zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta \tag{2.15}$$

с m_1 *собственными функциями, то число* m *собственных функций уравнения*

$$P(z)\,g(z) = \frac{\lambda_1}{2\pi i}\int\limits_{C} K(z, \zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta \tag{2.16}$$

удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant m \leqslant m_1 + r_0 + \cdots + r_k. \tag{2.17}$$

Доказательство. Первая половина неравенства (2.17) доказательства не требует. Для доказательства второй половины неравенства напишем $g(z) = \frac{g_1(z)}{P(z)}$, где $g_1(z)$ регулярна в D. Имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} K(z, \zeta)\,g_1(\zeta)\,\frac{d\zeta}{P(\zeta)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} K(z, \zeta)\,\frac{g_1(\zeta)}{P(\zeta)}\,d\zeta + \sum_{j=0}^{k} \operatorname*{res}_{\zeta=\alpha_j} K(z, \zeta)\,\frac{g_1(\zeta)}{P(\zeta)}, \quad z \in D_1.$$

Поэтому, если уравнение

$$P(z)\,g(z) = \frac{\lambda_1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} K(z, \zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta + \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{r_j-1} K_l^{(j)} K_{\zeta^l}^{(l)}(z, \alpha_j) \tag{2.18}$$

имеет решение, регулярное в D, то оно будет решением уравнения (2.16). Число линейно независимых решений удовлетворяет, очевидно, неравенству (2.17). Тем самым теорема доказана.

В заключение параграфа докажем еще одну теорему, позволяющую судить об отсутствии собственных значений у уравнений с ядром определенного вида.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $K(z, \zeta)$ *удовлетворяет условию* A *на* C *и имеет вид*

$$K(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{\zeta^{n+1}}\,k_n(z), \qquad k_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} k_{n,m} z^m,$$

C *содержит внутри себя точку* $z = 0$, $P(z)$ *регулярна в* $\overline{D}$ *и* $P(z) \neq 0$ *в* $\overline{D}$. *Тогда уравнение*

$$P(z)\,g(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{C} K(z, \zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta$$

ни при каком λ *не имеет решений, кроме тривиального.*

Доказательство. Действительно, предположим, что

$$g(z) = z^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{m+n+1}.$$

При достаточно малом $|z|$ ряды равномерно сходятся. Поэтому, выполняя интегрирование, получаем:

$$P(z)\,g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m+2}\cdot k_{n+m+1}(z)+z^{m+1}\cdot k_m(z).$$

Сравнивая коэффициенты при z^m в обеих частях, получаем

$$P(0)=0,$$

что противоречит условиям $0\in D$, $P(z)\neq 0$ в $\overline{D}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 3. Системы $\{f_n(z)\}$ с $F(z,\zeta)=\frac{P(z)}{\zeta-z}+K(z,\zeta)$

В этом параграфе мы рассмотрим системы $\{f_n(z)\}$ такие, что

$$F(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{\zeta^{n+1}}$$

может быть представлена в виде

$$F(z,\zeta)=\frac{P(z)}{\zeta-z}+K(z,\zeta),$$

где $P(z)$ регулярна в круге $|z|<R$ и имеет в нем нули α_i с кратностями m_i $(i=0,1,2,\ldots)$, $|\alpha_0|\leqslant|\alpha_1|\leqslant\ldots$, $P(0)=1$,

$$K(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\zeta^{n+1}}k_n(z),\quad k_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}k_{n,m}z^m,$$

и удовлетворяет условию А (см. § 2) на любой окружности $|z|=r<R$. На протяжении этого параграфа все высказанные условия мы будем считать выполненными.

Изложенные выше вспомогательные предложения позволяют нам без всякого труда получать решения интересующих нас задач. Решение первой задачи — о сходимости разложения по $f_n(z)$ — дают следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если условия, наложенные на $F(z,\zeta)$ в начале параграфа, выполнены и $r\leqslant|\alpha_0|$, то любая функция $f(z)$, регулярная в круге $|z|<r$, разлагается в ряд по $f_n(z)$, равномерно сходящийся при $|z|<r$.*

Доказательство. Воспользуемся утверждением 6° § 1. В нашем случае S_r — связная часть множества точек z, для которых ряд

$$F(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{\zeta^{n+1}}$$

сходится при $|\zeta|\geqslant r$, будет, очевидно, кругом $|z|<r$.

Напишем функциональное уравнение, разрешимость которого нам желательно установить:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r_1}F(z,\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta=f(z),\quad |z|<r_1,\quad r_1<r\leqslant|\alpha_0| \tag{3.1}$$

или, после преобразования,

$$P(z)\,g(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r_1} K(z,\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta=f(z). \qquad (3.2)$$

Так как $K(z,\zeta)$ удовлетворяет условию А, то (3.2) будет интегральным уравнением вида, рассмотренного в § 2 ($\lambda=-1$). Согласно теореме 4 § 2, оно не имеет собственных значений, и, следовательно, разрешимо для любой $f(z)$, регулярной при $|z|\leqslant r_1$. Так как $f(z)$ регулярна при $|z|<r$, то это уравнение разрешимо для любого $r_1<r$ и, вследствие теоремы 2 § 2, при любом $r_1<r$ решением (3.2) служит одна и та же функция $g(z)$. Отсюда видно, что эта функция $g(z)$ регулярна при $|z|<r$. Тем самым теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *При выполнении тех же условий на $F(z,\zeta)$ существует $h(\zeta)$, регулярная при $|\zeta|>|\alpha_0|$ и удовлетворяющая условию*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r_1} F(z,\zeta)\,h(z)\,dz=0, \quad r_1>|\alpha_0|, \quad |\zeta|>r_1, \qquad (3.3)$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r_1} f_n(z)\,h(z)\,dz=0, \quad n=0,1,2,\ldots, \quad r_1>|\alpha_0|. \qquad (3.4)$$

Доказательство. Запишем (3.3) подробнее:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r_1}\frac{P(z)\,h(z)}{\zeta-z}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r_1} K(z)\zeta)\,h(z)\,dz=0, \quad P(z)\neq 0 \text{ при } z=r_1. \qquad (3.5)$$

Введем новую функцию

$$h_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r_1}\frac{P(z)\,h(z)}{\zeta-z}\,dz \qquad (3.6)$$

и определим из (3.6) $h(\zeta)$ через $h_1(\zeta)$. Имеем:

$$h_1(\zeta)=P(\zeta)\,h(\zeta)+P_1(\zeta), \qquad (3.7)$$

где $P_1(\zeta)$ регулярна при $|\zeta|<R$. (Мы получаем подинтегральное выражение с тем же знаком, так как считаем, что контур интегрирования обходится в положительном направлении относительно точки $z=0$, а не $z=\infty$.) Отсюда

$$h(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r_1}\frac{h_1(z)}{P(z)}\cdot\frac{dz}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r_1}\frac{P_1(z)}{P(z)}\cdot\frac{dz}{\zeta-z}. \qquad (3.8)$$

Последний интеграл легко вычисляется, так как особыми точками функции $\frac{P_1(z)}{P(z)}\cdot\frac{1}{\zeta-z}$ будут только полюсы в точках α_i, попавших в круг $|z|<r_1$.

Несложными выкладками получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r_1}\frac{P_1(z)}{P(z)}\cdot\frac{dz}{\zeta-z}=\sum_{|\alpha_k|<r_1}\sum_{j=0}^{m_k-1}\frac{C_j^{(k)}\cdot j!}{(\zeta-\alpha_k)^{j+1}}.$$

Постоянные $C_j^{(k)}$ произвольны, так как прибавление к $h(\zeta)$ написанного слагаемого не изменит $h_1(\zeta)$. Поэтому окончательно находим:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r_1} \frac{h_1(t)}{P(t)} \cdot \frac{dt}{z-t} - \sum_{|\alpha_k|<r_1} \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{C_j^{(k)} \cdot j!}{(z-\alpha_k)^{j+1}}. \tag{3.9}$$

Немного суживая контур интегрирования и подставляя (3.9) в (3.5), получаем для $h_1(\zeta)$ уравнение:

$$h_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_1} K(z, \zeta) \frac{h_1(z)}{P(z)} dz = \sum_{|\alpha_k|<r_1} \sum_{j=0}^{m_k-1} C_j^{(k)} K_{z^j}^{(j)}(\alpha_k, \zeta). \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) имеет снова вид, рассмотренный в предыдущем параграфе. Правда, теперь у нас нет оснований утверждать, что (3.10) разрешимо для любой правой части, но это нам и не нужно. Действительно, если для некоторых функций в правой части оно неразрешимо, то это значит, что существует функция $h_1(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющая (3.10) для правой части, равной нулю (т. е. все $C_j^{(k)} = 0$). В силу теоремы 1 § 2, такая $h_1(z)$ будет регулярна при $z > r_1$, а по теореме 2 § 2 — и при $z > |\alpha_0|$, так как из того, что все $C_j^{(k)}$ равны нулю, следует регулярность $\frac{h_1(\zeta)}{P(\zeta)}$. Отсюда следует, что и $h(z)$ регулярна при $|z| > |\alpha_0$ и отлична от тождественного нуля.

Если же уравнение (3.10) разрешимо для любой правой части, то мы положим $C_j^{(k)}$ отличными от нуля лишь для тех k, для которых $|\alpha_k| = |\alpha_0|$. Тогда при помощи тех же теорем 1 и 2 § 2 получим, что $h_1(z)$ регулярна при $|z| > |\alpha_0|$ и то же самое относительно $h(z)$. Так как $h_1(z) \not\equiv 0$, то и $h(z) \not\equiv 0$. Действительно, в противном случае из (3.7) следовало бы, что $h_1(z) = P_1(z)$, т. е. что $h_1(z)$ регулярна при $|z| < R$, а так как $h_1(z)$ регулярна и при $|z| > |\alpha_0|$, то это значило бы, что $h_1(z) \not\equiv 0$. Таким образом, теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 получается полное решение вопроса о разложимости в ряд по $f_n(z)$ любой функции $f(z)$, регулярной в круге $|z| < r$. Действительно, из теоремы 1 следует, что при $r \leqslant |\alpha_0|$ любая функция $f(z)$, регулярная в круге $|z| < r$, разлагается в ряд по $f_n(z)$, сходящийся в том же круге, а при $r > |\alpha_0|$ из теоремы 2, в силу предложения 1° § 1, следует, что существуют функции, регулярные в круге $|z| < r$, которые не только не могут быть разложены в ряд по $f_n(z)$, сходящийся в этом круге, но даже не могут быть представлены в виде

$$f(z) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} f_n(z), \quad |z| < r.$$

Это, правда, не дает ответа на вопрос о разложимости в ряд по $f_n(z)$ конкретной функции $f(z)$, регулярной в круге $|z| < r$, $r > |\alpha_0|$. На этот вопрос отвечает следующая теорема. (Поскольку этот вопрос более частный, мы будем доказывать эту теорему в предположении, что все нули $P(z)$ простые. Это предположение для доказательства совершенно несу-

щественно, но мы вводим его для упрощения выкладок и формулировок.)

ТЕОРЕМА 3. *Пусть условия, наложенные на $F(z, \zeta)$ в начале параграфа, выполнены и, кроме того, все нули $P(z)$ — простые. Тогда каждому нулю α_k можно отнести функцию $h_k(z)$ такую, что из условия*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} F(z, \zeta)\, h(z)\, dz = 0, \quad r = |\alpha_k|, \quad |\zeta| > r \tag{3.11}$$

следует

$$h(z) = \sum_{|\alpha_k|<r} c_k h_k(z),$$

и необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $f(z)$, регулярная при $|z| < r_1$, $|\alpha_m| < r \leqslant |\alpha_{m+1}|$, могла быть разложена в ряд по $f_n(z)$, сходящийся в том же круге, является выполнение равенств

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_1} f(z)\, h_k(z)\, dz = 0, \quad |\alpha_m| < r_1 < r, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Как мы уже видели, общим решением уравнения (3.11) служит функция

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{\overline{h}(t)}{P(t)} \cdot \frac{dt}{z-t} - \sum_{j=0}^{m} \frac{C_j}{z-\alpha_j}, \quad |\alpha_m| < r < |\alpha_{m+1}|,$$

где $\overline{h}(t)$ — общее решение уравнения

$$\overline{h}(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} K(t, \zeta) \frac{\overline{h}(t)}{P(t)}\, dt = \sum_{j=0}^{m} C_j K(\alpha_j, \zeta). \tag{3.12}$$

Выясним число линейно независимых решений этого уравнения. Пусть m_1 — число функций фундаментальной системы однородного уравнения. Обозначим их через $\overset{*}{h}_1(z), \ldots, \overset{*}{h}_m(z)$, а через $\overset{*}{g}_1(z), \ldots, \overset{*}{g}_m(z)$ обозначим функции фундаментальной системы союзного уравнения. По теореме 3 § 2, $m_1 \leqslant m+1$. Функции $\overset{*}{g}_k(z)$ регулярны при $|z| < |\alpha_{m+1}|$, за исключением точек $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$, в которых эти функции могут иметь простые полюсы. Положим

$$A_j^k = \lim_{z \to \alpha_j} P(z)\, \overset{*}{g}_k(z).$$

Для того чтобы уравнение (3.12) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \sum_{j=0}^{m} C_j K(\alpha_j, \zeta)\, \overset{*}{g}_k(\zeta)\, d\zeta = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad |\alpha_m| < r < |\alpha_{m+1}|.$$

Преобразуем это выражение. Вспоминая уравнение для $\overset{*}{g}_k(z)$, мы можем написать

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} K(\alpha_j, \zeta)\, \overset{*}{g}_k(\zeta)\, d\zeta = -\lim_{z \to \alpha} P(z)\, \overset{*}{g}_k(z) = -A_j^{(k)}.$$

Таким образом, условия разрешимости примут вид:

$$\sum_{j=0}^{m} C_j A_j^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m_1. \tag{3.13}$$

Заметим сразу, что матрица этой системы линейных уравнений имеет ранг, равный $m+1-m_1$. Действительно, если бы ранг был больше, то это значило бы, что из функций фундаментальной системы можно образовать линейной комбинацией решение $g^*(z)$ уравнения

$$P(z) g(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} K(z, \zeta) g(\zeta) d\zeta = 0, \quad |\alpha_m| < r < |\alpha_{m+1}|,$$

для которого все $A_j = \lim\limits_{z \to \alpha_j} P(z) g^*(z)$ равны нулю, т. е. $g^*(z)$ регулярна в круге $|z| < |\alpha_{m+1}|$. Но, по теореме 2 § 2, $g^*(z)$ было бы решением того же уравнения и при $r < |\alpha_0|$, а по теореме 4 § 4, отсюда следовало бы, что $g^*(z) \equiv 0$. Это противоречило бы фундаментальности системы $\overset{*}{g}_k(z)$.

Из того, что ранг системы (3.13) равен $m+1-m_1$, следует, что существует $m+1-m_1$ линейно независимых систем $\{C_j\}$, скажем $\{C_j^1\}, \ldots, \{C_j^{(m+1-m_1)}\}$, для которых (3.12) разрешимо. Общее решение (3.12) имеет вид:

$$\overline{h}(z) = \sum_{s=0}^{m+1-m_1} C_s' \sum_{j=0}^{m} C_j^{(s)} K(\alpha_j, z) + \sum_{s=0}^{m_1} C_s^{*}(z),$$

т. е. является линейной комбинацией $m+1$ линейно независимых функций. Следовательно, общее решение (3.11) также является линейной комбинацией $m+1$ линейно независимых функций. Может показаться, что для каждого m придется заново определять всю систему $h_0(z), \ldots, h_m(z)$. Этого, безусловно, делать не нужно, так как, если функция $h(z)$ удовлетворяет уравнению (3.11) для какого-то r_1, то она удовлетворяет ему и для всех $r > r_1$. Поэтому с прибавлением нового корня следует выбрать лишь одну новую функцию, линейно независимую от прежних. Возможность этого и была нами доказана. Этими рассуждениями доказана необходимость условий теоремы.

Для доказательства достаточности этих условий нам нужно убедиться, что для $f(z)$, удовлетворяющей условиям

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} f(z) h_k(z) dz = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \quad |\alpha_m| < r_1 < |\alpha_{m+1}| \tag{3.14}$$

и регулярной в круге $|z| < r$, $r > r_1$, существует решение уравнения

$$P(z) g(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} K(z, \zeta) g(\zeta) d\zeta = f(z), \tag{3.15}$$

регулярное при $|z| < r$.

Раскроем условия (3.14). Возвращаясь от $h_k(z)$ к $\overline{h}_k(z)$, получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|z|=r_1} f(z) \int_{|t|=r_1} \frac{\overline{h}_k(t)}{P(t)} \cdot \frac{dt}{z-t} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} \sum_{j=0}^{m} \frac{c_j^{(k)}}{z-\alpha_j} f(z) dz = 0,$$

$$|\alpha_m| < r_2 < r_1 < r.$$

Так как ничто не мешает брать те или иные линейные комбинации из $h_k(z)$, то мы можем считать, что последние m_1 из $\overline{h}_k(z)$ совпадают с функциями фундаментальной системы уравнения (3.12). Тогда первые $m+1-m_1$ условий примут вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r_2}\frac{f(t)\,\overline{h}_k(t)}{P(t)}\,dt=\sum_{j=0}^{m}c_j^{(k)}f(\alpha_j),\quad k=0,1,\ldots,m-m_1, \qquad (3.16)$$

а последние m_1 — вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r_2}\frac{f(t)\,h_s^*(t)}{P(t)}\,dt=0,\quad s=1,2,\ldots,m. \qquad (3.17)$$

Условия (3.17) обеспечивают разрешимость уравнения (3.15) (см. § 2) Выясним, что̀ дают условия (3.16). Подставив туда $f(t)$ из (3.15), получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r_2}g(t)\,\overline{h}_k(t)\,dt+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|t|=r_1}\int\limits_{|\zeta|=r_2}K(t,\zeta)\frac{g(\zeta)\overline{h}_k(t)}{P(t)}\,dt\,d\zeta=\sum_{j=0}^{m}c_j^{(k)}f(\alpha_j).$$

Но

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r_2}g(t)\overline{h}_k(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r_2}\sum_{j=0}^{m}c_j^{(k)}K(\alpha_j,t)\,g(t)\,dt-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|t|=r_2}\int\limits_{|z|=r_2}K(z,t)\frac{g(t)\,\overline{h}_k(z)}{P(z)}\,dt\,dz.$$

Сопоставляя, получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m}c_j^{(k)}\int\limits_{|t|=r_2}K(\alpha_j,t)\,g(t)\,dt=\sum_{j=0}^{m}c_j^{(k)}f(\alpha_j),$$

или

$$\sum_{j=0}^{m}c_j^{(k)}\left[f(\alpha_j)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r_2}K(\alpha_j,t)\,g(t)\,dt\right]=0. \qquad (3.18)$$

Но

$$A_j=\lim_{z\to\alpha_j}P(z)\,g(z)=f(\alpha_j)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r_2}K(\alpha_j,t)\,g(t)\,dt,$$

следовательно, (3.18) можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{m}c_j^{(k)}A_j=0,\quad k=0,1,\ldots,m-m_1. \qquad (3.19)$$

Так как ранг матрицы $\|c_j^{(k)}\|$ системы (3.19) равен m_1 (все системы $\{c_j^{(k)}\}$ линейно независимы), то это значит, что для любого решения уравнения (3.15) вычеты A_j в точках α_j являются линейными комбинациями m_1 линейно независимых систем вычетов $\{A_j^{(1)}\},\ldots,\{A_j^{(m_1)}\}$. Но любое решение уравнения (3.15) имеет вид:

$$g(z)=g_0(z)+\sum_{k=0}^{m_1}c_k\,g_k^*(z),$$

где $g_k^*(z)$ — функции фундаментальной системы. Системы вычетов $g_k^*(z)$ линейно независимы. Следовательно, выбирая c_k подходящим образом, мы получим решение, для которого все A_j равны нулю. Это решение будет регулярно при $|z|<|\alpha_{m+1}|$, а это, в силу утверждения 7° § 1, доказывает нашу теорему.

Итак, теоремами 1, 2, 3 полностью решается вопрос о сходимости ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$. Для того чтобы решить с такой же степенью полноты вопрос о суммируемости этого ряда за пределами его круга сходимости, нам придется предположить, что $K(z,\zeta)$ удовлетворяет условию B, которое является гораздо более ограничительным, нежели условие A. Это, впрочем, и естественно, так как требование, чтобы ряд по $f_n(z)$ суммировался за пределами круга сходимости теми же методами, что и степенной ряд, является требованием существенно более сильным. Что же касается доказательств соответствующих теорем, то они почти не отличаются от доказательств теорем, полученных для сходимости. Единственное различие состоит в том, что мы будем ссылаться на утверждение 7° § 1 вместо утверждения 6° § 1. Поэтому мы сейчас установим применимость утверждения 7° в случае, если $K(z,\zeta)$ удовлетворяет условию B, а затем сформулируем соответствующие две теоремы, не повторяя доказательства.

Для того чтобы установить применимость утверждения 7°, выясним, что представляет собой $S(G)$. $S(G)$, по определению, — множество точек регулярности $F(z,\zeta)$ при ζ вне G $(0\in G)$. Но если $K(z,\zeta)$ удовлетворяет условию B (см. § 2), то $K(z,\zeta)$ регулярна в любой односвязной области, содержащей точку $z=0$ и не содержащей точки $z=\zeta$. Так как $\frac{P(z)}{\zeta-z}$ в круге $|z|<R$ имеет особой лишь точку $z=\zeta$, то то же самое справедливо и относительно $F(z,\zeta)$. Поэтому $S(G)$ попросту совпадает с G. (Мы считаем, что все области, о которых идет речь, лежат в круге $|z|<R$.) Если G содержит $z=0$ внутри себя, то все теоремы § 2 остаются верными, и мы имеем следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1а. *Пусть $K(z,\zeta)$ помимо условий, наложенных на $F(z,\zeta)$ в начале этого параграфа, удовлетворяет условию* B. *Тогда, если $\|c_{n,k}\|$ — какой-либо метод суммирования, суммирующий степенной ряд для любой функции $g(z)$, регулярной в области G, равномерно внутри этой области, то ряд*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$$

суммируем тем же методом для любой функции $f(z)$, регулярной в G, если G содержит точку $z=0$ и не содержит ни одной из точек α_i $(i=0,1,2,\ldots)$.

ТЕОРЕМА 2а. *Пусть $K(z,\zeta)$ помимо условий, наложенных на $F(z,\zeta)$ в начале этого параграфа, удовлетворяет условию* B, *а G содержит точку $z=0$ и хотя бы одну из точек α_i. Тогда существует функция $h(z)$, регулярная вне G и удовлетворяющая условиям*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f_n(z)\,h(z)\,dz=0,\quad n=0,1,2,\ldots$$

(*C — граница G*).

Можно было бы доказать теорему, аналогичную теореме 3, но для суммируемости рядов она не представляет большого интереса.

Можно указать также еще один результат, дающий критерий для представимости $f(z)$ в виде

$$f(z)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,k}f_n(z),$$

однако его применимость весьма проблематична без дополнительных тонких исследований о характере особенностей решений интегральных уравнений вида, рассмотренного в § 2.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть нули $P(z)$ простые, $F(z,\zeta)$ удовлетворяет условиям, наложенным на нее в начале параграфа, E_k — множество особых точек функции $h_k(z)$, не являющихся особыми точками $h_m(z)$, $m\neq k$, определенных в теореме 3. Тогда, если G — область, не содержащая полностью ни одного из множеств E_k, то любая $f(z)$, регулярная в G, может быть представлена в виде*

$$f(z)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,k}f_n(z),$$

где стремление к пределу равномерно внутри G.

Доказательство. В силу утверждения 1°, достаточно доказать, что из условия

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f_n(z)\,h(z)\,dz=0\quad(n=0,1,2,\ldots)\tag{3.20}$$

и из того, что $h(z)$ регулярна вне G, следует, что $h(z)\equiv 0$.

Но мы уже видели, что $h(z)$, удовлетворяющая условиям (3.20), является линейной комбинацией $h_k(z)$, а в силу условий теоремы ни одна из таких комбинаций не может быть регулярна вне G. Следовательно, $h(z)\equiv 0$, и теорема доказана.

В заключение этого параграфа отметим еще один факт.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $F(z,\zeta)$ удовлетворяет условиям, наложенным на нее в начале параграфа, $\{v_n(z)\}$ — система, биортогональная системе $\{f_n(z)\}$, и $F_1(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n v_n(z)$. Тогда*

$$F_1(z;\zeta)=\frac{1}{z-\zeta}\cdot\frac{1}{P(\zeta)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\zeta,t)}{z-t}\frac{dt}{Pt},\quad r<|\alpha_0|,\quad |z|>r,\tag{3.21}$$

где $\Gamma(z,\zeta)$ — резольвента уравнения

$$P(z)\,g(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}K(z,\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta=f(z),\quad r<|\alpha_0|,\tag{3.22}$$

которую можно определить сходящимся рядом $\left(K_1(z,\zeta)=\frac{K(z,\zeta)}{P(z)}\right)$

$$\Gamma(z,\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K_n(z,\zeta),\quad K_n(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}K_{n-1}(z,t)\,K_1(t,\zeta)\,dt.\tag{3.23}$$

Доказательство. Сходимость ряда (3.22) ясна из теоремы 4 § 2. Из ряда (3.23) видно, что $K_n(z,\zeta)$, а значит, и $\Gamma(z,\zeta)$ регулярны при $|z|<|\zeta|$, $|z|<|\alpha_0|$. Из утверждения 3° § 1 мы знаем, что $v_n(z)$ являются коэффициентами разложения функции $\frac{1}{z-\zeta}$ по $f_n(\zeta)$, если этот ряд сходится равномерно при $|z|>R_1$, и $v_n(z)$ регулярны в бесконечности. Эти условия выполнены. Тогда, записывая решение нашего интегрального уравнения при помощи резольвенты, получаем формулу (3.21).

На этом мы заканчиваем исследование вопросов, относящихся к рядам по $f_n(z)$ рассмотренного вида, и переходим к приложениям полученных результатов к некоторым интерполяционным задачам, а затем к рядам по $f_n(z)$ других видов.

§ 4. Применение к интерполяционным задачам. Задача $F^{(n)}(q^n+\lambda_n)$, $|q|>1$.

Результаты предыдущего параграфа легко могут быть применены к интерполяционным задачам при помощи утверждений 8°, 9° 10° § 1. При этом получаются следующие результаты.

Пусть $\Phi(z,\zeta)$ и система функционалов $\{l_n(F)\}$ таковы, что функции $f_n(z)=\underset{t}{l_n}[\Phi(t,z)]$ удовлетворяют условиям § 3, т. е.

$$F(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{\zeta^{n+1}}=\frac{P(z)}{\zeta-z}+K(z,\zeta),$$

где $P(z)$ регулярна при $|z|<R$, $P(0)=1$, $P(z)$ имеет нули в точках α_k,

$$|\alpha_0|\leqslant|\alpha_1|\leqslant\ldots,\quad K(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\zeta^{n+1}}k_n(z),\quad k_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}k_{n,m}z^m,$$

и удовлетворяет условиям A или B. Тогда:

1. Класс $A(\Phi_1,|z|<|\alpha_0|)$ будет классом сходимости интерполяционной задачи.

2. Класс $A(\Phi,|z|<|\alpha_0|+\varepsilon)$ ни при каком ε не может быть классом единственности интерполяционной задачи.

3. Если все нули $P(z)$ простые, то для каждой $F(z)$, принадлежащей классу $A(\Phi,|z|<|\alpha_m|)$, интерполяционный ряд сходится, но не обязательно к ней, а к некоторой

$$F_1(z)=F(z)+c_1H_1(z)+\cdots+c_mH_m(z),$$

где $H_k(z)\in A(\Phi,|z|<|\alpha_{k-1}|+\varepsilon)$ — определенные функции, нарушающие единственность.

4. Если, помимо высказанных условий, $K(z,\zeta)$ удовлетворяет условию B, то класс $A(\Phi,D)$ является классом единственности, если D не содержит ни одной точки α_k и содержит точку $z=0$. Кроме того, любая $F(z)$, принадлежащая классу $A(\Phi,D)$, может быть представлена в виде

$$F(z)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{n,k}\,\varphi_n(z)\cdot l_n(F),$$

где $c_{n,k}$ зависят только от D, а $\varphi_n(z)$ — интерполяционные многочлены.

Если, помимо высказанных условий, $K(z,\zeta)$ удовлетворяет условию B, то класс $A(\Phi, D)$ не может быть классом единственности, если D содержит $z=0$ и хотя бы одну из точек α_k.

Мы применим эти общие результаты к исследованию задачи о построении целой функции по данным $F^{(n)}(q+\lambda_n)$ *. Положим

$$\Phi(z,\zeta)=\psi(z\zeta), \quad \psi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t}{n!}q^{-\frac{n(n+1)}{2}},$$

$$l_n(F)=q^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot F^{(n)}(q^n+\lambda_n) \quad (|q|<1).$$

Найдем, чему в этом случае равны $f_n(z)$. Для этой цели заметим, что $\psi(t)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\psi'(t)=\frac{1}{q}\psi\left(\frac{t}{q}\right). \tag{4.1}$$

Воспользовавшись (4.1), немедленно получим

$$f_n(z)=z^n\psi\left(z+\frac{\lambda_n}{q^n}\right). \tag{4.2}$$

Определим $K(z,\zeta)$ равенством

$$K(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\left[\psi\left(z+\frac{\lambda_n}{q^n}z\right)-\psi(z)\right] \tag{4.3}$$

и выясним, при каких условиях на $\{\lambda_n\}$ $K(z,\zeta)$ удовлетворяет условию A и при каких — условию B. Для этой цели нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Если для функций* $f_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ *и* $f_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nt_n$ *имеют место оценки при* $|t|\leqslant 1$:

$$|f_1(t)|<C_1|1-t|^{-\lambda_1},\quad 0\leqslant\lambda_1<1,\quad |f_2(t)|<C_2|1-t|^{-\lambda_2},\quad 0\leqslant\lambda_2<1,$$

то для функции $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nt^n$ *имеет место оценка*:

$$|f(t)|<\begin{cases} C_1C_2M\,|1-t|^{1-\lambda_1-\lambda_2} & \text{при } \lambda_1+\lambda_2>1,\\ C_1C_2M\ln\dfrac{M_1}{|1-t|} & \text{при } \lambda_1+\lambda_2=1,\\ C_1C_2M & \text{при } \lambda_1+\lambda_2<1,\end{cases}$$

где M и M_1 — абсолютные константы.

Доказательство. Разберем случай $\lambda_1+\lambda_2>1$. Имеем

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=1}f_1(u)f_2\left(\frac{t}{u}\right)\frac{du}{u};$$

---

* Задача $F^{(n)}(q^n)$ была рассмотрена А. О. Гельфондом ([2]).

переходя к модулям, получим

$$|f(t)| < \frac{C_1C_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-e^{i\varphi}|^{-\lambda_1}|t-e^{i\varphi}|^{-\lambda_2}\,d\varphi.$$

Пусть $t = re^{i\theta}$. Проведем оценку интеграла различными способами, в зависимости от того, будет ли $|\theta| > 1-r$ или $\theta \leqslant 1-r$. Если $|\theta| > 1-r$, то

$$|f(t)| < \frac{C_1C_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-e^{i\varphi}|^{-\lambda_1}|e^{i\theta}-e^{i\varphi}|^{-\lambda_2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{C_1C_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\theta}\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|^{-\lambda_1}\left|2\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|^{-\lambda_2}d\varphi +$$

$$+\frac{C_1C_2}{2\pi}\int_{\theta}^{\pi}\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|^{-\lambda_1}\left|2\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|^{-\lambda_2}d\varphi <$$

$$< \frac{2\,C_1C_2}{\pi^3}\int_{-\pi}^{\theta}|\varphi|^{-\lambda_1}|\varphi-\theta|^{-\lambda_2}\,d\varphi + \frac{2\,C_1C_2}{\pi^3}\int_{\theta}^{\pi}|\varphi|^{-\lambda_1}|\varphi-\theta|^{-\lambda_2}\,d\varphi.$$

Без ограничения общности можно считать $\vartheta > 0$. Тогда

$$|f(t)| < \frac{4\,C_1C_2}{\pi^3}\int_{0}^{\pi}\varphi^{-\lambda_1}(\varphi+\theta)^{-\lambda_2}\,d\varphi + \frac{2\,C_1C_2}{\pi^3}\int_{0}^{\theta}\varphi^{-\lambda_1}(\theta-\varphi)^{-\lambda_2}\,d\varphi <$$

$$< \frac{4\,C_1C_2}{\pi^3}\int_{0}\varphi^{-\lambda_1}(\varphi+\theta)^{-\lambda_2}\,d\varphi + \frac{4\,C_1C_2}{\pi^3}\int_{\theta}^{\pi}\varphi^{-\lambda_1}(\varphi+\theta)^{-\lambda_2}\,d\varphi +$$

$$+\ \theta^{1-\lambda_1-\lambda_2}\frac{2\,C_1C_2}{\pi^3}\int_{0}^{1}x^{-\lambda_1}(1-x)^{-\lambda_2}\,dx < C_1C_2M'\cdot\theta^{1-\lambda_1-\lambda_2}$$

и, так как $|\theta| > 1-r$,

$$|f(t)| < C_1C_2M\,|1-t|^{1-\lambda_1-\lambda_2}.$$

Если же $|\theta| < 1-r$, то

$$|f(t)| < \frac{C_1C_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-e^{i\varphi}|^{-\lambda_1}|r-e^{i\varphi}|^{-\lambda_2}\,d\varphi <$$

$$< \frac{2C_1C_2}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}\varphi^{-\lambda_1}\left[(1-r)^2+\frac{1}{4}\varphi^2\right]^{-\frac{\lambda_2}{2}}d\varphi < \frac{4\,C_1C_2}{\pi^2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^{-\lambda_1}\left[(1-r)^2+x^2\right]^{-\frac{\lambda_2}{2}}dx <$$

$$< \frac{4\,C_1C_2}{\pi^2}\int_{0}^{1-r}x^{-\lambda_1}(1-r)^{-\lambda_2}\,dx + \frac{4\,C_1C_2}{\pi^2}\int_{1-r}^{\frac{\pi}{2}}x^{-\lambda_1-\lambda_2}\,dx < C_1C_2M''\,(1-r)^{1-\lambda_1-\lambda_2}$$

и, так как $1-r > |\theta|$,

$$|f(t)| < C_1\cdot C_2\cdot M\cdot|1-t|^{1-\lambda_1-\lambda_2}.$$

Остальные два случая получаются точно так же.

ЛЕММА 2. *Если для функций* $f_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *и* $f_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, *регулярных в любой конечной односвязной области, не содержащей точки* $t=1$, *имеют место оценки в некоторой окрестности точки* $t=1$:

$$|f_1(t)|<C_1|1-t|^{-\lambda_1}, \quad |f_2(t)|<C_2|1-t|^{-\lambda_2}, \quad 0\leqslant\lambda_1<1, \quad 0\leqslant\lambda_2<1,$$

причем C_1 *и* C_2, *вообще говоря, зависят от выбора ветви* $f_1(t)$ *или* $f_2(t)$, *то функция* $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n t^n$ *регулярна также в любой конечной односвязной области, не содержащей точки* $t=1$, *и в некоторой окрестности точки* $t=1$ *для нее имеет место оценка*

$$|f(t)|<\begin{cases} C|1-t|^{1-\lambda_1-\lambda_2} & \text{при } \lambda_1+\lambda_2>1,\\ C\ln\dfrac{M}{|1-t|} & \text{при } \lambda_1+\lambda_2=1,\\ C & \text{при } \lambda_1+\lambda_2<1.\end{cases}$$

Доказательство. Из интегрального представления

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f_1(t)\, f_2\left(\frac{t}{u}\right)\frac{du}{u}$$

при подходящем выборе контура C заключаем, что $f(t)$ регулярна в любой конечной односвязной области, не содержащей точки $t=1$. Чтобы получить нужную нам оценку, воспользуемся этой же формулой, причем контур выберем состоящим из круга достаточно большого радиуса (например, 2) с разрезом. Разрез возьмем состоящим из начинающегося в точке 1 отрезка прямой (проходящей через $u=t$ и $u=1$), длиной $\frac{1}{2}$, идущего в направлении от $u=t$, а дальше как угодно, лишь бы разрез имел не слишком большую длину и не подходил слишком близко к точкам $u=t$ и $u=0$. Тогда получим

$$|f(t)|<M'+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} C_1 x^{-\lambda_1} C_2 (x+y)^{-\lambda_2}\,dx, \quad y=|1-t|,$$

где через M' обозначена наибольшая возможная величина интеграла по всей остальной части контура. Отсюда следует, что

$$|f(t)|<M'+M''\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\lambda_1}(x+y)^{-\lambda_2}dx<$$

$$<M'+M''\int_y^0 x^{-\lambda_1}y^{-\lambda_2}dx+M''\int_y^{\frac{1}{2}} x^{-\lambda_1-\lambda_2}\,dx.$$

Рассматривая все три возможных случая, получаем искомую оценку.

ЛЕММА 3. *Пусть* $f_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *регулярна в некоторой односвязной области* D *с границей* C *и* $\int_C |f_1(t)|\,|dt|<M$, *а* $f_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *регулярна и ограничена в любой замкнутой односвязной области, не содержащей точки* $t=1$ *внутри. Тогда для* $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n t^n$ *имеет место оценка при* $t \in D$:

$$|f(t)|<C_1 M M_1,$$

где M_1 — *максимум наибольших значений* $|f_2(t)|$ *по всем областям, лежащим в круге* $|t|<\dfrac{\max\limits_{z\in C}|z|}{\min\limits_{z\in C}|z|}$ *и обходящим точку* $t=0$ *столько же раз, сколько и* D.

Доказательство. Воспользуемся той же формулой, взяв за контур интегрирования C:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f_1(u)\, f_2\left(\frac{t}{u}\right)\frac{du}{u};$$

отсюда получим, предположив, что $f(t)$ достигает максимума в точке t_0 на C:

$$|f(t_0)|<\frac{M}{2\pi \min\limits_{u\in C}|u|}\max_{u\in C}\left|f_2\left(\frac{t_0}{u}\right)\right|.$$

Но когда u обходит контур C, $\frac{t_0}{u}$ обходит контур некоторой односвязной области, не содержащей $u=1$ внутри и обходящей точку $u=0$ столько же раз, сколько D обходит точку $t=0$. Очевидно также, что эта область лежит в круге нулевого радиуса. Тем самым искомая оценка получена.

Из этих лемм получаем следствия.

Следствие 1. *Если* $f_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n t^n$ *удовлетворяет при* $|t|\geqslant 1$ *неравенству*

$$|f_1(t)|<C|1-t|^{-\lambda},\quad 0<\lambda<1,$$

то функции $f_k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^k t^n$, *начиная с некоторой, удовлетворяют неравенству*

$$|f_k(t)|<C_1^k \text{ при } |t|\leqslant 1.$$

Следствие 2. *Если* $f_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^k t^n$ *регулярна в любой конечной односвязной области* D, *не содержащей точки* $t=1$, *и удовлетворяет в окрестности точки* $t=1$ *неравенству*

$$|f_1(t)|<C|1-t|^{-\lambda},\quad 0\leqslant\lambda<1,$$

то, если мы возьмем замкнутую односвязную область $\overline{D}_1$, *не содержащую точки* $t=1$ *внутри, функции* $f_k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^k t^n$, *начиная с некоторой, удовлетворяют в* $\overline{D}$ *неравенству*

$$|f\ (t)|<C_1^k.$$

(Разумеется, оценка справедлива для той ветви, которая имеет заданное разложение в окрестности $t=0$, $0\in\overline{D}_1$.)

При помощи этих следствий мы легко установим, какими должны быть λ_n, чтобы

$$K(z,\ \zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\left[\psi\left(z+\frac{\lambda^n}{q^n}z\right)-\psi(z)\right]$$

удовлетворяла условию A или B. Сформулируем эти требования в виде лемм.

ЛЕММА 4. *Если функция* $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n}{q^n}t^n$ *удовлетворяет при* $|t|\leqslant 1$ *неравенству*

$$|f(t)|<C|1-t|^{-\lambda},\quad 0\leqslant\lambda<1,$$

то

$$K(z,\ \zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\left[\psi\left(z+\frac{\lambda_n}{q^n}z\right)-\psi(z)\right],\quad \psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}q^{-\frac{n(n+1)}{2}},\quad |q|>1,$$

удовлетворяет условию A_2 *на любой окружности* $|z|=r$.

Доказательство. Разлагая $\psi\left(z+\frac{\lambda_n}{q^n}\right)-\psi(z)$ по степеням $\frac{\lambda_n}{q^n}z$, имеем:

$$K(z,\ \zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{n+m}}{\zeta^{n+1}}\frac{\lambda_n^m}{q^{nm}}\psi^{(m)}(z)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}q^{-\frac{m(m+1)}{2}}z^{m-1}\psi\left(\frac{z}{q^m}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n}{q^n}\right)^m\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n+1}$$

Применяя следствие 1, получаем утверждение леммы. Заметим, что при $|q|=1$ это заключение могло бы вызывать сомнения, так как ряд мог бы и не сходиться.

Точно так же доказывается и следующая

ЛЕММА 5. *Если функция* $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n}{q^n}t^n$ *регулярна в любой односвязной области* D, *не содержащей точки* $t=1$, *и в некоторой окрестности точки* $t=1$ *удовлетворяет неравенству*

$$|f|(t)<C|\,|1-t|^{-\lambda},\quad 0\leqslant\lambda<1$$

(C зависит от выбора ветви), то

$$K(z,\ \zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\left[\psi\left(z+\frac{\lambda_n}{q^n}z\right)-\psi(z)\right]$$

удовлетворяет условию B.

ЛЕММА 6. *Если* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n}{q^n}\right|^2<\infty$, *то* $K(z, \zeta)$ *удовлетворяет условию* A_1 *на любой окружности* $|z|=r$.

Доказательство. Из $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n}{q^n}\right|^2<\infty$ следует $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n}{q^n}\right|^m<\infty$ при $m\geqslant 2$. Поэтому $(r_1\geqslant r_2)$

$$\int\limits_{|z|=r_1}\int\limits_{|\zeta|=r_2}|K(z, \zeta)|^2\,|dz|\,|d\zeta|\leqslant$$

$$\leqslant\iint\limits_{|z|=|\zeta|=r_1}|K(z, \zeta)^2|\,|dz|\,|d\zeta|<M_1\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|q|^{-\frac{m(m+1)}{2}}\cdot r_1^{2m-2}\left|\frac{\lambda_n}{q^n}\right|^{2m}<M.$$

Теперь мы имеем конкретные условия на $\{\lambda_n\}$, которыми можно заменить условия A или B на $K(z, \zeta)$. Применяя общие теоремы, мы получаем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Любая функция* $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ *может быть разложена в ряд многочленов*

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{n(n+1)}{2}}F^{(n)}(q^n+\lambda_n)\,\varphi_n(z)$$

($\varphi_n(z)$ — *интерполяционные многочлены*), *сходящийся к ней в любой конечной части плоскости, если* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n}{q^n}\right|^2<\infty$, *а* a_n *удовлетворяют неравенствам*

$$|a_n|<M\,\frac{|q|^{-\frac{n(n+1)}{2}}}{n!}\,(|\omega_0|-\varepsilon)^n,$$

где ω_0 — *ближайший к началу нуль функции* $\psi(z)$. (Условия на рост $|a_n|$ можно заменить условием

$$\max_{|z|\leqslant r}|F(z)|<Mr^{\frac{\ln(|\omega_0|-\varepsilon)}{\ln|q|}}\,e^{\frac{(\ln r)^2}{2\ln q}-\ln r\cdot\ln\ln r+2\ln\ln|q|\ln r}.)$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует функция* $H_0(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, *для которой*

$$|a_n|<M_\varepsilon\,\frac{(|\omega_0|+\varepsilon)^n}{n!}\,|q|^{-\frac{n(n+1)}{2}}$$

или, что то же самое,

$$\max_{|z|\leqslant z}|H(z)|<M_\varepsilon r^{\frac{\ln(|\omega_0|+\varepsilon)}{\ln|q|}}\,e^{\frac{(\ln r)^2}{2\ln|q|}-\ln r\ln\ln r+2\ln\ln|q|\ln r}$$

(ε *сколь угодно мало*) *и*

$$H^{(n)}(q^n+\lambda_n)=0\quad\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n}{q^n}\right|^2<\infty\right).$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n}{q^n}\right|^2<\infty$. *Тогда любая* $H(z)$, *удовлетворяющая условиям*

$$|a_n|<M\frac{c^n}{n!}|q|^{-\frac{n(n+1)}{2}}$$

или, что то же самое,

$$\max_{|z|\leqslant r}|H(z)|<Mr^c e^{\frac{(\ln r)^2}{2\ln|q|}-\ln r\ln\ln r}$$

и

$$H^{(n)}(q^n+\lambda_n)=0\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

может быть представлена в виде

$$H(z)=c_0H_0(z)+\ldots+c_mH_m(z),$$

где $H_k(z)$ — *некоторые определенные функции, коэффициенты которых удовлетворяют условиям*

$$|a_n^{(k)}|<M_\varepsilon\frac{(|\omega_k|+\varepsilon)^n}{n!}|q|^{-\frac{n(n+1)}{2}},$$

где ω_k — *нуль* $\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}q^{-\frac{n(n+1)}{2}}$ (условия на коэффициенты можно заменить, как и выше, условиями на максимум модуля).

Заменяя условия на $K(z,\zeta)$ другими, можно было бы привести большое количество аналогичных теорем. Мы ограничимся лишь этими тремя, как нам кажется, наиболее интересными.

§ 5. Системы $\{f_n(z)\}$ с $F(z,\zeta)=\frac{1}{\zeta-\varphi(z)}+K(z,\zeta)$ и интерполяционная задача $l_n(F)=F^{(n)}(n+\lambda_n)$

В этом параграфе мы применим тот же метод к решению задач, связанных с представлением функций линейными комбинациями функций системы $\{f_n(z)\}$, для которой

$$F(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{\zeta^{n+1}}$$

имеет вид

$$\frac{1}{\zeta-\varphi(z)}+K(z,\zeta).$$

С тем же успехом можно было бы рассматривать и $F(z,\zeta)$ вида

$$\frac{P(z)}{\zeta-\varphi(z)}+K(z,\zeta),$$

но поскольку трудность заключается в $\varphi(z)$, а не в $P(z)$, мы для большей ясности ограничимся указанным случаем.

Прежде всего договоримся о некоторых условиях на $\varphi(z)$ и $K(z,\zeta)$, которые в дальнейшем будем считать соблюденными, и введем некоторые обозначения.

Пусть $\varphi(z)$ регулярна при $|z|<R$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$. Множество $|\varphi(z)|<r$ состоит, вообще говоря, из счетного числа областей. Среди них есть одна, содержащая точку $z=0$. Ее мы будем обозначать через $D_r(\varphi)$. Мы будем рассматривать лишь те $D_r(\varphi)$, которые лежат целиком внутри круга $|z|<R$.

Относительно $K(z, \zeta)$ мы будем считать, что в окрестности $z=0$, $\zeta=\infty$ $K(z, \zeta)$ имеет вид:

$$K(z, \zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\zeta^{n+1}}k_n(z), \quad k_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}k_{n,\,m}z^m.$$

Требования, содержащие условия вида A или B, мы будем накладывать на $K(z, \zeta)$ различным образом в каждой из теорем.

В первую очередь мы докажем две теоремы, без труда сводящиеся к теоремам § 3.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $F(z, \zeta)$ удовлетворяет условиям, наложенным на нее в начале параграфа, r_0 — наибольшее из чисел r, для которых $\varphi(z)$ однолистна в $D_r(\varphi)$, и $\psi(z)$ — ветвь функции, обратной к $\varphi(z)$, отображающая круг $|z|<r$ в $D_r(\varphi)$ при $r<r_0$.*

Если $K_1(z, \zeta)=K(\psi(z), \zeta)$ удовлетворяет условию A на любой окружности $|z|=r$, $r<r_0$, то любая функция $f(z)$, регулярная в $D_r(\varphi)$, $r<r_0$, может быть разложена в ряд по $f_n(z)$, равномерно сходящийся внутри $D_r(\varphi)$.

Доказательство. Применим утверждение 6° § 1. В качестве S может быть взята $D_r(\varphi)$. Тогда решение вопроса о разложимости $f(z)$ в ряд по $f_n(z)$ сводится к решению вопроса о существовании решения функционального уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r_1}F(z, \zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta=f(z), \quad r<r_1, \quad r\in D_r(\varphi), \tag{5.1}$$

регулярного при $|\zeta|<r$. Раскрывая (5.1), получаем уравнение

$$g(\varphi(z))+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r_1}K(z, \zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta=f(z), \quad r_1<r, \quad z\in D_{r_1}(\varphi). \tag{5.2}$$

Делая в (5.2) замену $\varphi(z)=t$, придем к уравнению

$$g(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r_1}K_1(t,\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta=f_1(t), \tag{5.3}$$

где $f_1(t)=f(\psi(t))$ регулярна при $|t|<r$, а $K_1(t, \zeta)=K(\psi(t), \zeta)$ удовлетворяет условию A на любой окружности $|t|=r_1<R$. Легко убедиться также, что $K_1(t, \zeta)$ удовлетворяет условиям теоремы 4 § 2. Поэтому (5.3) имеет решение, и теорема доказана.

Заметим, что эта теорема могла бы быть получена просто заменой $\varphi(z)=t$ и ссылкой на теорему 1 § 3.

Точно так же доказывается и

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $F(z, \zeta)$ *удовлетворяет условиям, наложенным на нее в начале параграфа,* D — *область однолистности* $\varphi(z)$, *содержащая точку* $z=0$, *и* $K_1(z, \zeta) = K(\psi(z), \zeta)$ *удовлетворяет условию* A *на любом контуре, лежащем внутри образа области* D $(\psi(z)$ — *ветвь функции, обратной к* $\psi(z)$, $\psi(0)=0)$. *Тогда любая функция* $f(z)$, *регулярная в* D, *может быть представлена в виде* $f(z) = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n,k} a_n f_n(z)$, *где* $c_{n,k}$ *не зависят от* $f(z)$, *а стремление к пределу внутри* D *равномерно.*

Результаты, говорящие о нарушении полноты в областях, где $\varphi(z)$ перестает быть однолистной, являются более тонкими и требуют более подробного рассмотрения. В этом направлении мы ограничимся только одной теоремой.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $F(z, \zeta)$ *удовлетворяет условиям, наложенным на нее в начале параграфа, и* $K_1(z, \zeta) = K(\psi(z), \zeta)$ $(\psi(z)$ — *ветвь функции, обратной к* $\varphi(z)$, $\psi(0)=0)$ *удовлетворяет условию* A *на любом контуре, лежащем строго внутри области, в которой* $\psi(z)$ *однозначна, и содержащем* $z=0$ *внутри. Тогда, если в области* D *имеются хотя бы две точки* z_1 *и* z_2 *такие, что* $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ $(z_1 \neq z_2)$, *то существует функция* $h(z) \not\equiv 0$, *регулярная вне* D *и удовлетворяющая условиям*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f_n(z)\, h(z)\, dz = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{5.4}$$

Доказательство. Условия (5.4) эквивалентны условию

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C F(z, \zeta)\, h(z)\, dz = 0 \tag{5.5}$$

(C — граница D, ζ достаточно велико). Это условие можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{h(z)\, dz}{\zeta - \varphi(z)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C K(z, \zeta)\, h(z)\, dz = 0. \tag{5.6}$$

Положим

$$h(z) = h_1(z) - h_2(z), \quad h_k(z) = \frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\overline{h}_k(\varphi(t))\varphi'(t)}{z - t}\, dt, \quad k = 1, 2, \tag{5.7}$$

где C_k — граница области D_k, содержащей точки $z=0$ и $z=z_k$ и лежащей внутри D; $\varphi(z)$ однолистна в D_k и $\overline{h}_k(z)$ — решение уравнения

$$\overline{h}_k(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} K(z, \zeta)\, \overline{h}_k(\varphi(z))\, \varphi'(z)\, dz = -K(z_k, \zeta). \tag{5.8}$$

Так как $\varphi(z)$ однолистна в D_k, то это уравнение преобразуется к виду

$$\overline{h}_k(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_k} K_1(t, \zeta)\, \overline{h}_k(t)\, dt = -K(z_k, \zeta). \tag{5.9}$$

По условиям теоремы, $K_1(t, \zeta)$ удовлетворяет условию A на C_k', поэтому (5.9) имеет единственное решение, регулярное при ζ вне C_k'. Покажем, что $h(z)$, определенная формулой (5.7), удовлетворяет условию (5.6).

Имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{h(z)\,dz}{\zeta-\varphi(z)} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_C\int\limits_{C_1}\frac{\overline{h}_1(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,dz}{[\zeta-\varphi(z)](z-t)} -$$
$$-\frac{1}{(2\pi t)^2}\int\limits_C\int\limits_{C_2}\frac{\overline{h}_2(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,dz}{[\zeta-\varphi(z)](z-t)} + \frac{1}{\zeta-\varphi(z_1)} - \frac{1}{\zeta-\varphi(z_2)}.$$

Но $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, а

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_C\int\limits_{C_k}\frac{\overline{h}_k(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt}{[\zeta-\varphi(z)](z-t)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k}\frac{\overline{h}_k(\varphi(t))\,\varphi'(t)}{\zeta-\varphi(t)}\,dt = \overline{h}_k(\zeta).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{h(z)\,dz}{\zeta-\varphi(z)} = \overline{h}_1(\zeta) - \overline{h}_2(\zeta). \tag{5.10}$$

Далее,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C K(z,\zeta)\,h(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}K(z,\zeta)\,h_1(z)\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}K(z,\zeta)\,h_2(z)\,dz,$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k}K(z,\zeta)\,h_k(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k}K(z,\zeta)\,\overline{h}_k(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz + K(z_k,\zeta),$$

следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{h(z)\,dz}{\zeta-\varphi(z)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C K(z,\zeta)\,h(z)\,dz = \overline{h}_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}K(z,\zeta)\,\overline{h}_1(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz +$$
$$+K(z_1,\zeta) - \overline{h}_2(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}K(z,\zeta)\,\overline{h}_2(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz - K(z_2,\zeta) = 0,$$

в силу (5.8). Тем самым теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 дают полное решение вопроса о том, какой должна быть область D, чтобы любая функция, регулярная в D, могла быть представлена в виде

$$f(z) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k}\,a_n f_n(z),$$

где $c_{n,k}$ зависят только от D и $\{f_n(z)\}$, а стремление к пределу равномерно внутри D.

Правда, это решение дается лишь для $\{f_n(z)\}$ с довольно жесткими ограничениями на $K(z,\zeta)$, но ослабление этих ограничений потребует, вероятно, довольно тонких исследований.

Пользуясь общими теоремами предыдущего параграфа, применим полученные результаты к интерполяционной задаче о построении $F(z)$ по данным $F^{(n)}(n+\lambda_n)$.

Для этой цели возьмем $\Phi(z,\zeta) = e^{z\zeta}$, $l_n(F) = F^{(n)}(n+\lambda_n)$ *.

* Задача $F^{(n)}(n)$, наряду с многими другими, была рассмотрена А. О. Гельфондом (1).

Найдем $f_n(z)$. Имеем:

$$f_n(z) = l_{t^n}[\Phi(t, z)] = z_n e^{(n+\lambda_n)z} = [ze^z]^n e^{\lambda_n z}.$$

Положим

$$F(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - ze^z} + K(z, \zeta), \quad K(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ze^z)^n}{\zeta^{n+1}} (e^{\lambda_n z} - 1).$$

Выясним, при каких λ_n $K(z, \zeta)$ удовлетворяет нашим условиям. С этой целью докажем две леммы.

ЛЕММА 1. *Если* $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$, *то* $K_1(z, \zeta)$ *удовлетворяет условию* A_1 *на любой окружности* $|z| = r$, $r < \frac{1}{e}$. *Здесь*

$$K_1(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} [e^{\lambda_n \psi(z)} - 1],$$

где $\psi(z)$ — *функция, обратная к* ze^z, $\psi(0) = 0$.

Доказательство. Разлагая $e^{\lambda_n \psi(z)}$ в ряд по степеням $\lambda_n \psi(z)$, получим:

$$K_1(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \frac{\lambda_n^m}{m!} [\psi(z)]^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\psi(z)]^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \lambda_n^m;$$

отсюда

$$\int\limits_{|z|=r_1} \int\limits_{|\zeta|=r_2} |K(z, \zeta)|^2 |dz| |d\zeta| \leqslant \iint\limits_{|z|=|\zeta|=r_1} |K(z, \zeta)|^2 |dz| |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m}{m!} \int\limits_{|z|=r_1} |\psi(z)|^{2m} |dz|, \quad S_m = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^{2m}.$$

Все проделанные выкладки справедливы при $r_1 < \frac{1}{e}$, так как в круге $|z| < \frac{1}{e}$ $\psi(z)$ регулярна.

ЛЕММА 2. *Если функция* $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n$ *регулярна в любой конечной односвязной области, не содержащей точки* $t = 1$, *и в некоторой окрестности точки* $t = 1$ *удовлетворяет неравенству*

$$|f(t)| < C |1 - t|^{-\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1,$$

(С зависит от выбора ветви), то $K(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} [e^{\lambda_n \psi(z)} - 1]$ *удовлетворяет условию* A *на границе любой области, в которой* $\psi(z)$ *однозначна и которая содержит точку* $z = 0$ ($\psi(z)$ — *ветвь функции, обратной к* ze^z).

Доказательство. Разлагая $e^{\lambda_n \psi(z)}$ по степеням $\psi(z)$, получаем

$$K_1(z, \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\psi(z)]^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \lambda_n^m.$$

Применяя следствие 2 лемм 1, 2, 3 § 4, получаем утверждение нашей леммы.

В качестве λ_n, удовлетворяющих условию леммы 2, можно взять например, $\lambda_n = n^{-\lambda}\,(\lambda > 0)$, $\lambda_n = n^{-\lambda}(\ln n)^{\alpha}$ ($\lambda > 0$, α — любое) и другие.

Соединяя общие теоремы § 1 о связи полноты систем $\{f_n(z)\}$ с интерполяционными задачами с теоремами 1, 2, 3 настоящего параграфа, получаем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. *Тогда любая целая функция* $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, *для которой все особенности* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$ *лежат в области* $|ze^z| < \frac{1}{e}$, *содержащей точку* $z = 0$, *может быть разложена в интерполяционный ряд*

$$F(z) = \sum_{n-0}^{\infty} F^{(n)}(n+\lambda_n)\,P_n(z) \quad \left(P_n(z) \text{ — многочлен, } P_n^{(k)}(k+\lambda_k) = \delta_{n,\,k}\right),$$

сходящийся к ней равномерно в любой конечной части плоскости. (Условие на функцию $f(z)$, ассоциированную с $F(z)$ по Борелю, может быть заменено условием $|F(re^{i\varphi})| < Me^{r[h,\varphi)-\varepsilon]}$, где $h(\varphi)$ — некоторая функция. Ее выражение можно найти у А. О. Гельфонда ([1]).)

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* λ_n *удовлетворяют условиям леммы 2. Тогда интерполяционный ряд сходится для* $F(z)$, *удовлетворяющих тем же условиям, что и в теореме 4. Кроме того, если* $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^n$ *такова, что все особые точки* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$ *лежат в некоторой области однолистности функции* ze^z, *содержащей точку* $z = 0$, *то* $F(z)$ *может быть представлена в виде*

$$F(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n-0}^{\infty} c_{n,\,k} F^{(n)}(n+\lambda_n)\,P_n(z),$$

где $P_n(z)$ — *интерполяционные многочлены,* $c_{n,\,k}$ *не зависят от* $F(z)$ *и стремление к пределу равномерно в любой конечной части плоскости.*

В частности, если $F(z)$ *удовлетворяет этим условиям, то из* $F^{(n)}(n+\lambda_n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *следует* $F(z) \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 6. *При тех же условиях на* λ_n, *если область* D *содержит точку* $z = 0$ *и хотя бы две точки* z_1 *и* z_2, *в которых* $z_1e^{z_1} = z_2e^{z_2}$, *то существует функция* $H(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, *удовлетворяющая условиям* $F^{(n)}(n+\lambda_n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *и такая, что все особые точки* $h(z) = \sum\limits_{n-0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+}}$ *лежат в* D.

§ 6. Системы $\{f_n(z)\}$ с $F(z,\zeta)=\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{P_k(z)}{\zeta-\omega_m^k z}+K(z,\zeta)$ и интерполяционная задача $l_n(F)=F^{(n)}[(-1)^n+\lambda_n]$

В качестве последнего примера применения того же метода рассмотрим вопрос о полноте систем $\{f_n(z)\}$, для которых $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{\zeta^{n+1}}$ имеет вид:

$$F(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{P_k(z)}{\zeta-\omega_m^k z}+K(z,\zeta),\quad \omega_m=e^{\frac{2\pi i}{m}},$$

и в связи с этим рассмотрим интерполяционную задачу о построении $F(z)$ по данным $F^{(n)}[(-1)^n+\lambda_n]$.

Поскольку нет большой разницы в доказательствах, мы остановимся лишь на вопросе сходимости ряда по $f_n(z)$ для случая, когда $K(z,\zeta)$ удовлетворяет на любой окружности $|z|=r$ условию A. $\Big(K(z,\zeta)=$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\zeta^{n+1}}k_n(z),\ k_n(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}k_{n,m}z^m.\Big)$

Относительно $P_k(z)$ мы будем предполагать, что все они регулярны в круге $|z|<R$.

Докажем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *При выполнении сформулированных выше условий на $F(z,\zeta)$ любая функция $f(z)$, регулярная в круге $|z|<r$, $r<|\alpha_0|$, может быть разложена в ряд по $f_n(z)$, сходящийся к $f(z)$ равномерно внутри этого круга, где α_0 — ближайший к началу нуль функции $Q(z)$:*

$$Q(z)=\begin{vmatrix} P_0(z) & P_1(z) & \dots & P_{m-1}(z)\\ P_{m-1}(z\omega_m) & P_0(z\omega_m) & \dots & P_{m-2}(z)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ P_1(z\omega_m^{m-1}) & P_2(z\omega_m^{m-1}) & \dots & P_0(z\omega_m^{m-1})\end{vmatrix}.$$

Доказательство. Согласно утверждению 6° § 1, решение вопроса о разложимости $f(z)$ в ряд по $f_n(z)$ приводится к решению вопроса о существовании решения функционального уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r_1}F(z,\zeta)g(\zeta)\,d\zeta=f(z),\quad r_1<r,\quad |z|<r_1,$$

регулярного при $|z|<r$. Раскрывая это уравнение, получим:

$$\sum_{k=0}^{m-1}P_k(z)g(\omega_m^k z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r_1}K(z,\zeta)g(\zeta)\,d\zeta=f(z). \tag{6.1}$$

Введем новую функцию $g_1(z)$:

$$g_1(z)=\sum_{k=0}^{m-1}P_k(z)g(\omega_m^k z). \tag{6.2}$$

Полагая в (6.2) вместо z $z\omega_m^s$, $s=1, 2, \ldots, m-1$, получим систему уравнений

$$g_1(z\omega_m^s) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k(z\omega_m^s)\, g(\omega_m^{k+s} z), \quad s=0, 1, \ldots, m-1. \tag{6.3}$$

Принимая во внимание, что $\omega_m^{m+k} = \omega_m^k$ и решая систему (6.3) относительно $g(z)$, найдем:

$$g(z) = \frac{1}{Q(z)} \sum_{k=0}^{m-1} Q_k(z)\, g_1(z\omega_m^k), \tag{6.4}$$

где

$$Q(z) = \begin{vmatrix} P_0(z) & P_1(z) & \ldots P_{m-1}(z) \\ P_{m-1}(z\omega_m) & P_0(z\omega_m) & \ldots P_{m-2}(z\omega_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_1(z\omega_m^{m-1}) & P_2(z\omega_m^{m-1}) & \ldots P_0(z\omega_m^{m-1}) \end{vmatrix}, \tag{6.5}$$

а

$$\sum_{k=0}^{m-1} Q_k(z)\, g_1(z\omega_m^k) = \begin{vmatrix} g_1(z) & P_1(z) & \ldots P_{m-1}(z) \\ g_1(z\omega_m) & P_0(z\omega_m) & \ldots P_{m-2}(z\omega_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1(z\omega_m^{m-1}) & P_2(z\omega_m) & \ldots P_0(z\omega_m^{m-1}) \end{vmatrix}. \tag{6.6}$$

Подставляя (6.4) в (6.2), получим уравнение для $g_1(z)$:

$$g_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r_1} K_1(z, \zeta)\, g_1(\zeta)\, d\zeta = f(z), \tag{6.7}$$

где

$$K_1(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{Q_k(\zeta\omega_m^{-k})}{Q(\zeta\omega_m^{-k})} K(z, \zeta\omega_m^{-k})\, \omega_m^{-k}. \tag{6.8}$$

Если $K(z, \zeta)$ удовлетворяет условию А на любой окружности $|z|=r$, то интегральное уравнение с ядром $K_1(z, \zeta)$ будет уравнением вида, рассмотренного в § 2, при $r<|\alpha_0|$. Кроме того, так как $K(z, \zeta)$ удовлетворяет условиям теоремы 4 § 2, то это же верно и для $K_1(z, \zeta)$. Поэтому уравнение (6.7) имеет единственное решение, регулярное при $|z|<r$. То же самое справедливо, очевидно, и для уравнения (6.1), так как $g(z)$ выражается через $g_1(z)$ формулой (6.4), из которой видно, что особые точки в круге $|z|<|\alpha_0|$ у $g(z)$ и $g_1(z)$ одни и те же.

Тем самым теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *При тех же условиях на $F(z, \zeta)$ существует функция $h(z)$, регулярная при $|z|>|\alpha_0|$ и удовлетворяющая условию*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=|\alpha_0|+\varepsilon} f_n(z)\, h(z)\, dz = 0, \quad n=0, 1, 2, \ldots. \tag{6.9}$$

Доказательство. Условия (6.9) можно записать в виде уравнения

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_1} \frac{P_k(z)\, h(z)}{\zeta - z\omega_m^k} dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_1} K(z, \zeta)\, h(z)\, dz = 0. \tag{6.10}$$

Положим

$$h_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_m^{-k}}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_1} \frac{P_k(z)\, h(z)}{\zeta\omega_m^{-k} - z}\, dz. \tag{6.11}$$

Из (6.11) следует:

$$h_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{-k} P_k(\zeta\omega_m^{-k})\, h(\zeta\omega_m^{-k}) + v(\zeta), \tag{6.12}$$

где $v(\zeta)$ регулярна при $|\zeta| < R$.

Полагая в (6.12) вместо ζ $\zeta\omega_m^{-s}$, получим систему уравнений

$$h_1(\zeta\omega_m^{-s}) = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{-k} P_k(\zeta\omega_m^{-k-s})\, h(\zeta\omega_m^{-k-s}) + v(\zeta\omega_m^{-s}). \tag{6.13}$$

Решая ее относительно $h(\zeta)$, придем к выражению

$$\overline{Q}(\zeta)\, h(\zeta) = \sum_{k=0}^{m-1} \overline{Q}_k(\zeta)\, h_1(\zeta\omega_m^{-k}) + v_1(\zeta), \tag{6.14}$$

где

$$\overline{Q}(\zeta) = \begin{vmatrix} P_0(\zeta) & \omega_m^{-1} P_1(\zeta\omega_m^{-1}) \ldots & \omega_m^{-m-1} P_{m-1}(\zeta\omega_m^{-m-1}) \\ \omega_m^{-m-1} P_{m-1}(\zeta) & P_0(\zeta\omega_m^{-1}) \ldots & \omega_m^{-m-2} P_{m-2}(\zeta\omega_m^{-m-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_m^{-1} P_1(\zeta) & \omega_m^{-2} P_2(\zeta\omega_m^{-1}) \ldots & P_0(\zeta\omega_m^{-m-1}) \end{vmatrix}, \tag{6.15}$$

а

$$\sum_{k=0}^{m-1} \overline{Q}_k(\zeta)\, h_1(\zeta\omega_m^{-k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} h_1(\zeta) & \omega_m^{-1} P_1(\zeta\omega_m^{-1}) \ldots & \omega_m^{-m-1} P_{m-1}(\zeta\omega_m^{-m-1}) \\ h_1(\zeta\omega_m^{-1}) & P_0(\zeta\omega_m^{-1}) \ldots & \omega_m^{-m-2} P_{m-2}(\zeta\omega_m^{-m-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_1(\zeta\omega_m^{-m-1}) & \omega_m^{-2} P_2(\zeta\omega_m^{-1}) \ldots & P_0(\zeta\omega_m^{-m-1}) \end{vmatrix}. \tag{6.16}$$

Нетрудно убедиться, что $\overline{Q}(\zeta)$ отличается от $Q(\zeta)$ лишь постоянным множителем.

Подставляя (6.14) в (6.10), получим для $h_1(\zeta)$ уравнение

$$h_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_1} K_2(z, \zeta)\, h_1(z)\, dz = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_1} K(z, \zeta) \frac{v_1(z)}{\overline{Q}(z)}\, dz, \tag{6.17}$$

где

$$K_2(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{k} \frac{\overline{Q}_k(z\omega_m^k)}{\overline{Q}(z\omega_m^k)} K(z\omega_m^k, \zeta).$$

$v_1(z)$ регулярна в круге $|z| < R$, поэтому $K(z, \zeta)\dfrac{v_1(z)}{\overline{Q}(z)}$ имеет своими особыми точками в круге $|z| < r_1$ лишь полюсы в точках, где $|z| < r_1$.

Мы имеем в круге $|z|<r_1$, по крайней мере, один полюс в точке α_0 с произвольным вычетом. Поэтому

$$h_1(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_1} K_2(z,\zeta)\,h_1(z)\,dz=Cu(\zeta)\quad (u(\zeta) \text{ регулярна при } |\zeta|\geqslant r_1), \tag{6.18}$$

где C — произвольная постоянная. Уравнение (6.18) всегда имеет решение, отличное от тождественного нуля. Действительно, если для $K(z,\zeta)$ выполнено условие A и $Q(z)$ не равно нулю на окружности $|z|=r_1$, то уравнение (6.18) является интегральным уравнением вида, рассмотренного в § 2. Значит, имеет место дилемма: либо уравнение имеет решение, регулярное при $|\zeta|>r_1$ для любой правой части (регулярной при $|\zeta|\geqslant r_1$), либо существует нетривиальное решение однородного уравнения. Следовательно, либо для любого C, либо для $C=0$ существует функция $h_1(\zeta)\not\equiv 0$, регулярная при $|\zeta|>r_1$. Но r_1 мы могли выбрать произвольно близко к $|\alpha_0|$, поэтому существует $h_1(\zeta)\not\equiv 0$, регулярная при $|\zeta|>|\alpha_0|$. Из (6.14) находим

$$h(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_1}\frac{\overline{Q}_k(\zeta)\,h_1(\zeta\omega_m^{-k})}{\overline{Q}(\zeta)\,(z-\zeta)}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_1}\frac{v_1(\zeta)}{\overline{Q}(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta}. \tag{6.19}$$

Так как внутри круга $|z|<|\alpha_0|$ $h(z)$ и $h_1(z)$ имеют одни и те же особые точки, а $h_1(z)$ регулярна при $|z|>|\alpha_0|$, то из $h_1(z)\not\equiv 0$ следует, что и $h(z)\not\equiv 0$. Очевидно также, что $h(z)$ регулярна при $|z|>|\alpha_0|$. Таким образом, теорема доказана.

При помощи общих теорем § 1 применим полученные результаты к интерполяционной задаче о построении $F(z)$ по данным $F^{(n)}[(-1)+\lambda_n]$.

Возьмем $\Phi(z,\zeta)=e^{z\zeta}$. Найдем $f_n(z)=\underset{t}{l_n}[\Phi(t,z)]$. Имеем

$$f_n(z)=z^n e^{z[(-1)^n+\lambda_n]}.$$

Положим

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}e^{(-1)^n z}+K(z,\zeta),\quad K(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n e^{(-1)^n z}}{\zeta^{n+1}}(e^{\lambda_n z}-1).$$

Отметим сразу, что если $\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|^2<\infty$, то $K(z,\zeta)$ удовлетворяет условию A.

Преобразуем главную часть $F(z,\zeta)$. Имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n e^{(-1)^n z}}{\zeta^{n+1}}=e^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{\zeta^{2n+1}}+e^{-z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{\zeta^{2n}}=\frac{\operatorname{ch} z}{\zeta-z}-\frac{\operatorname{sh} z}{\zeta+z}.$$

Таким образом, $m=2$, $P_0(z)=\operatorname{ch} z$, $P_1(z)=-\operatorname{sh} z$. Найдем $Q(z)$:

$$Q(z)=\begin{Vmatrix}\operatorname{ch} z & -\operatorname{sh} z\\ \operatorname{sh} z & \operatorname{ch} z\end{Vmatrix}=\operatorname{ch} 2z.$$

Нулями $Q(z)$, ближайшими к началу, являются $\pm\frac{\pi}{4}$. Применяя теоремы 1 и 2, получаем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. *Тогда любая функция* $F(z)$, *удовлетворяющая условию*

$$\max_{|z| \leq r} |F(z)| < Me^{r\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right)},$$

разлагается в ряд по интерполяционным многочленам, равномерно сходящийся к $F(z)$ *в любой конечной части плоскости.*

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. *Существует функция* $H(z)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\max_{|z| \leq r} |H(z)| < M_{\varepsilon} e^{r\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)}$$

при любом $\varepsilon < 0$ *и*

$$H^{(n)}((-1)^n + \lambda_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Этими теоремами мы заканчиваем примеры применения метода интегральных уравнений к задачам о полноте систем, близких к известным, а также к соответствующим интерполяционным задачам.

Поступило
5. 1. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М., ГТТИ, 1952.
[2] Гельфонд А. О., О некоторых интерполяционных задачах, Успехи матем. наук, т. 1 : 5—6 (1946), 236—239.
[3] Маркушевич А. И., О базисе в пространстве аналитических функций, Матем. сборник, т. 17 (59) : 2 (1945), 211—251.
[4] Гурса Э., Курс математического анализа, т. III, ч. II., М., ГТТИ, 1934.
[5] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1., М.—Л., 1951.
[6] Евграфов М. А., О полноте некоторых систем многочленов, Матем. сборник, т. 33 (75) : 2 (1953), 433—440.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 461—472

С. Б. СТЕЧКИН

ОЦЕНКА ОСТАТКА РЯДА ТЕЙЛОРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе исследуется поведение остатков ряда Тейлора для функций

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

аналитических в круге $|z|<1$ и удовлетворяющих в этом круге условию $|F^{(r)}(z)|\leqslant 1$ для некоторого натурального r. В частности, устанавливается асимптотическая формула для верхней грани n-го остатка ряда Тейлора, распространенной на все z из круга $|z|\leqslant 1$ и все функции $F(z)$, для которых $|F^{(r)}(z)|\leqslant 1$ $(|z|<1)$.

Введение

Пусть $W^{(r)}$ $(r=1, 2, \ldots)$ есть класс непрерывных периодических (с периодом 2π) функций

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

имеющих непрерывную производную $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющую условию $|f^{(r)}(x)|\leqslant 1$. Положим

$$r_n(x, f)=f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$R_n(f)=\max_x |r_n(x, f)| \text{ и } R_n[W^{(r)}]=\sup_{f\in W^{(r)}} R_n(f).$$

Поведение верхних граней $R_n[W^{(r)}]$ исследовалось А. Н. Колмогоровым ([2]), который показал, что для любого натурального r

$$R_n[W^{(r)}]=\frac{4}{\pi^2}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^r}+O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{0.1}$$

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для классов $B^{(r)}$ $(r=1, 2, \ldots)$ функций

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

аналитических в круге $|z|<1$ и удовлетворяющих условию

$$|F^{(r)}(z)|\leqslant 1 \quad (|z|<1),$$

где $F^{(r)}(z)$ — r-я производная функции $F(z)$. Пусть $F(z)\in B^{(r)}$; положим

$$p_n(z, F)=\sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \quad r_n(z, F)=F(z)-p_n(z, F) \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$R_n(F)=\max_{|z|\leqslant 1}|r_n(z, F)|, \quad R_n[B^{(r)}]=\sup_{F\in B^{(r)}} R_n(F) \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Мы будем также считать, что $p_{-1}(z, F) = 0$, $r_{-1}(z, F) = F(z)$. Таким образом, $r_n(z, F)$ есть n-й остаток ряда Тейлора функции $F(z)$ в точке z, $R_n(F)$ — максимум этого остатка во всем круге $|z| \leqslant 1$, а $R_n[B^{(r)}]$ — верхняя грань n-го остатка ряда Тейлора, распространенная на все z из круга $|z| \leqslant 1$ и все функции $F(z) \in B^{(r)}$.

§ 1 и 2 настоящей работы имеют вспомогательный характер. В § 1 излагается несколько лемм о суммировании числовых рядов методом (С, 1); с их помощью в § 2 доказывается асимптотическая формула для приближений функций классов $B^{(r)}$ их суммами Фейера.

§ 3 и 4 посвящены нашей основной теме: изучению поведения остатков $r_n(z, F)$ и $R_n(F)$ для функций $F(z) \in B^{(r)}$, а также поведения их верхних граней $R_n[B^{(r)}]$ *. В § 3 устанавливается, что для любого натурального r

$$r_n(z, F) = -\frac{z^r}{(n+1)^r} p_{n-r}(z, F^{(r)}) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n \geqslant r-1) \qquad (0.2)$$

равномерно в круге $|z| \leqslant 1$ и равномерно относительно всего класса функций $F(z) \in B^{(r)}$. Доказательство этой формулы опирается на результаты § 2. Наконец, в § 4 уточняется известная оценка (см., например, ([12]), § 3.72):

$$R_n[B^{(r)}] = O\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^r}\right) \quad (n \to \infty).$$

Именно, мы выводим здесь формулу

$$R_n[B^{(r)}] = \frac{1}{\pi} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^r} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n \geqslant r-1), \qquad (0.3)$$

вполне аналогичную формуле А. Н. Колмогорова (0.1). В этом же параграфе исследуется поведение последовательностей $R_n(F)$ для индивидуальных функций $F(z) \in B^{(r)}$.

Из формул (0.1) и (0.3) вытекает, что при $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\frac{R_n[W^{(r)}]}{R_n[B^{(r)}]} \approx \frac{4}{\pi};$$

вычисляя же асимптотически отношение констант Лебега L_n [см. ([1]), § 8.3] к константам Ландау G_n [см. ([9])], вновь получаем, что

$$\frac{L_n}{G_n} \approx \frac{4}{\pi}.$$

Это совпадение не случайно.

В заключение заметим, что применяемые нами методы могут иметь приложения и при рассмотрении ряда других задач теории приближения функций.

§ 1. Леммы о числовых рядах

Рассмотрим числовые ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad (1.1)$$

---

* Автор с благодарностью отмечает, что задача изучения асимптотического поведения последовательности $R_n[B^{(r)}]$ была поставлена перед ним А. Н. Колмогоровым в 1942 г.

и

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,u_{n+1}. \tag{1.2}$$

Обозначим через s_n и t_n частные суммы рядов (1.1) и (1.2), а через σ_n и τ_n — средние арифметические частных сумм этих рядов. Таким образом, для $n=0, 1, 2, \ldots$ имеем:

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}u_k, \qquad \sigma_n=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)u_k,$$

$$t_n=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,u_{k+1}, \qquad \tau_n=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)(k+1)\,u_{k+1}.$$

Кроме того, нам будет удобно считать, что $s_{-1}=t_{-1}=\sigma_{-1}=\tau_{-1}=0$.

Нас будет интересовать вопрос о том, как связана суммируемость (C, 1) ряда (1.2) со сходимостью и суммируемостью ряда (1.1). Как хорошо известно, если ряд (1.2) ограничен (C, 1), т. е. $\tau_n=O(1)$, то ряд (1.1) суммируется (C, 1) [см., например, (6), § 6.5, теорема 71]. В 1941 г. Д. Алексич (7) [см. также (10), стр. 84] получил следующее важное уточнение этого предложения:

ЛЕММА АЛЕКСИЧА. *Пусть ряд* (1.2) *ограничен* (C, 1). *Тогда ряд* (1.1) *суммируется* (C, 1) *к некоторому конечному значению* s *и*

$$s-\sigma_n=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Здесь мы установим несколько аналогичных предложений. Предварительно выведем одну вспомогательную формулу.

ЛЕММА 1. *Пусть ряд* (1.2) *ограничен* (C, 1) *и* $t_n=o(n)$. *Тогда ряд* (1.1) *сходится к некоторой конечной сумме* s *и*

$$s-\sigma_n=-\frac{n\tau_{n-1}}{(n+1)(n+2)}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2\tau_k}{(k+2)(k+3)} \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{1.3}$$

Доказательство. Имеем

$$s_n=\sigma_n+\frac{t_{n-1}}{n+1},$$

откуда

$$s_N-\sigma_n=s_N-s_n+\frac{t_{n-1}}{n+1}=\sum_{k=n+1}^{N}u_k+\frac{t_{n-1}}{n+1}.$$

Дважды применяя преобразование Абеля, получаем:

$$s_N-\sigma_n=\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k}(t_{k-1}-t_{k-2})+\frac{t_{n-1}}{n+1}=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{N-1}\frac{t_{k-1}}{k(k+1)}+\frac{t_{N-1}}{N}=\sum_{k=n+1}^{N-1}\frac{k\tau_{k-1}-(k-1)\tau_{k-2}}{k(k+1)}+\frac{t_{N-1}}{N}=$$

$$=-\frac{n\tau_{n-1}}{(n+1)(n+2)}+\sum_{k=n}^{N-3}\frac{2\tau_k}{(k+2)(k+3)}+\frac{\tau_{N-2}}{N}+\frac{t_{N-1}}{N}. \tag{1.4}$$

Но, согласно условиям леммы, $\tau_N=O(1)$ и $t_N=o(N)$. Поэтому правая

часть равенства (1.4) имеет предел при $N \to \infty$. Отсюда вытекает, что ряд (1.1) сходится. Обозначая его сумму через s, имеем:

$$s - \sigma_n = -\frac{n\tau_{n-1}}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\tau_k}{(k+2)(k+3)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и лемма доказана.

Отметим, что условия этой леммы выполняются, в частности, если ряд (1.2) суммируется (C, 1) к некоторому конечному значению t. Действительно, тогда

$$t_n = n(\tau_n - \tau_{n-1}) + \tau_n = o(n).$$

Переходим к доказательству аналогов леммы Алексича.

ЛЕММА 2. *Пусть* $M > 0$,

$$|\tau_n| \leqslant M \quad (n = 0, 1, 2, ..) \tag{1.5}$$

и $t_n = o(n)$. *Тогда ряд* (1.1) *сходится к некоторой конечной сумме* s *и*

$$|s - \sigma_n| \leqslant M\frac{3n+2}{(n+1)(n+2)} < \frac{3M}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.6}$$

Доказательство. Согласно лемме 1, ряд (1.1) сходится и

$$s - \sigma_n = -\frac{n\tau_{n-1}}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\tau_k}{(k+2)(k+3)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда, в силу (1.5),

$$|s - \sigma_n| \leqslant M\left\{\frac{n}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{(k+2)(k+3)}\right\} =$$

$$= M\frac{3n+2}{(n+1)(n+2)} < \frac{3M}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть* $\lambda_n \downarrow 0$ *, *ряд* (1.2) *суммируется* (C, 1) *к конечному значению* t *и*

$$|t - \tau_n| \leqslant \lambda_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.7}$$

Тогда ряд (1.1) *сходится к некоторой сумме* s *и*

$$s - \sigma_n = \frac{t}{n+1} + \vartheta_n \frac{3n+2}{(n+1)(n+2)} \lambda_{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.8}$$

где $\lambda_{-1} = \lambda_0$ *и* $|\vartheta_n| \leqslant 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Согласно лемме 1, ряд (1.1) сходится, и справедлива формула (1.3), а в силу (1.7)

$$\tau_k = t + \eta_k \lambda_k \quad (|\eta_k| \leqslant 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.9}$$

Пусть сперва $n = 0$. Полагая в формуле (1.3) $n = 0$ и пользуясь соотношениями (1.9), получаем:

$$s - \sigma_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\tau_k}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2t}{(k+2)(k+3)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\eta_k \lambda_k}{(k+2)(k+3)} =$$

$$= t + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\eta_k \lambda_k}{(k+2)(k+3)}.$$

---

* Запись $\lambda_n \downarrow 0$ означает, что $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \lambda_{n+1} \geqslant \ldots$ и $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Но в силу условия $\lambda_n \downarrow 0$

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\eta_k \lambda_k}{(k+2)(k+3)}\right| \leqslant \lambda_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k+2)(k+3)} = \lambda_0.$$

Отсюда $s - \sigma_c = t + \vartheta_0 \lambda_0$, где $|\vartheta_0| \leqslant 1$, и соотношение (1.8) для $n = 0$ установлено.

Пусть теперь $n > 0$. Тогда то же рассуждение дает:

$$s - \sigma_n = -\frac{n\tau_{n-1}}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\tau_k}{(k+2)(k+3)} =$$

$$= -\frac{nt}{(n+1)(n+2)} - \frac{n\eta_{n-1}\lambda_{n-1}}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2t}{(k+2)(k+3)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\eta_k \lambda_k}{(k+2)(k+3)} =$$

$$= \frac{t}{n+1} - \frac{n\eta_{n-1}\lambda_{n-1}}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\eta_k \lambda_k}{(k+2)(k+3)},$$

$$\left| -\frac{n\eta_{n-1}\lambda_{n-1}}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\eta_k \lambda_k}{(k+2)(k+3)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_{n-1} \left\{ \frac{n}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{(k+2)(k+3)} \right\} = \frac{3n+2}{(n+1)(n+2)} \lambda_{n-1}$$

и

$$s - \sigma_n = \frac{t}{n+1} + \vartheta_n \frac{3n+2}{(n+1)(n+2)} \lambda_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $|\vartheta_n| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Этим установлено соотношение (1.8) для $n > 0$, и лемма 3 доказана.

Из этой леммы вытекает, в частности, что если ряд (1.2) суммируется (C, 1) к конечному значению t, то ряд (1.1) сходится к некоторой сумме s и

$$s - \sigma_n = \frac{t}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right). \tag{1.10}$$

Отметим также, что заключение леммы 3 можно представить в следующей, несколько более слабой, но зато более простой форме:

$$s - \sigma_n = \frac{t}{n+1} + 3\theta_n \frac{\lambda_{n-1}}{n+1} \quad (|\theta_n| \leqslant 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.11}$$

ЛЕММА 4. *Пусть* $m \geqslant 0$, $\lambda_n \downarrow 0$, *ряд* (1.2) *суммируется* (C, 1) *к значению* t *и*

$$t - \tau_n = \frac{u}{n+1} + \eta_n \lambda_n \quad (n = m, m+1, \ldots), \tag{1.12}$$

где $|\eta_n| \leqslant 1$. *Тогда ряд* (1.1) *сходится к некоторой сумме* s *и*

$$s - \sigma_n = \frac{t}{n+1} + 3\theta_n \frac{\eta_{n-1}}{n+1} \quad (n = m+1, m+2, \ldots), \tag{1.13}$$

где $|\theta_n| \leqslant 1$.

Доказательство. Согласно лемме 1, ряд (1.1) сходится и

$$s - \sigma_n = -\frac{n\tau_{n-1}}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\tau_k}{(k+2)(k+3)}.$$

В силу же (1.12),

$$\tau_n = t - \frac{u}{n+1} - \eta_n \lambda_n \quad (n = m, m+1, \ldots).$$

Пусть $n \geqslant m+1$. Подставляя это значение τ_n в предыдущую формулу, получаем:

$$s - \sigma_n = -\frac{nt}{(n+1)(n+2)} + \frac{u}{(n+1)(n+2)} + \frac{n\eta_{n-1}\lambda_{n-1}}{(n+1)(n+2)} +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2t}{(k+2)(k+3)} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2u}{(k+1)(k+2)(k+3)} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\eta_k\lambda_k}{(k+2)(k+3)} =$$

$$= \frac{t}{n+1} + \frac{n\eta_{n-1}\lambda_{n-1}}{(n+1)(n+2)} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\eta_k\lambda_k}{(k+2)(k+3)}.$$

Далее, из условия $\lambda_n \downarrow 0$ выводим, что

$$\left| \frac{n\eta_{n-1}\lambda_{n-1}}{(n+1)(n+2)} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\eta_k\lambda_k}{(k+2)(k+3)} \right| \leqslant \frac{3n+2}{(n+1)(n+2)} \lambda_{n-1} \leqslant \frac{3\lambda_{n-1}}{n+1}.$$

Отсюда

$$s - \sigma_n = \frac{t}{n+1} + 3\theta_n \frac{\lambda_{n-1}}{n+1} \quad (n = m+1,\ m+2, \ldots),$$

где $|\theta_n| \leqslant 1$, и лемма 4 доказана.

Следует подчеркнуть тот факт, что в оценку (1.13) значение u не входит.

§ 2. О приближении функций класса $B^{(r)}$ суммами Фейера

Пусть $\quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (|z| < 1)$. Положим для $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sigma_n(z, F) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) c_k z^k, \quad \rho_n(z, F) = F(z) - \sigma_n(z, F).$$

Таким образом, $\sigma(z, F)$ есть n-я сумма Фейера для функции $F(z)$. а $\rho_n(z, F)$ — уклонение функции $F(z)$ от ее суммы Фейера $\sigma_n(z, F)$ в точке z.

В этом параграфе исследуется поведение $\rho_n(z, F)$ для функций $F(z)$, принадлежащих классу $B^{(r)}$.

Д. Алексич (7) показал, что если $F(z) \in B'$, то

$$\max_{|z| \leqslant 1} |\rho_n(z, F)| \leqslant \frac{A_1}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.1}$$

где A_1 — абсолютная положительная константа. Этот результат Алексича был затем передоказан А. Зигмундом [см. (13), лемма]. Здесь будет установлено следующее более общее предложение:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть r — натуральное число и $F(z) \in B^{(r)}$. Тогда для $r = 1$*

$$|\rho_n(z, F)| \leqslant \frac{3}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

а для $r \geqslant 2$

$$\rho_n(z, F) = \frac{zF'(z)}{n+1} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n = r-2,\ r-1, \ldots) \tag{2.3}$$

равномерно относительно z в круге $|z| \leqslant 1$ и равномерно относительно всего класса $B^{(r)}$.

Отметим, что неравенство (2.2) несколько сильнее неравенства Алексича (2.1), так как метод Алексича дает $A_1 > 3$.

Доказательство. Случай $r=1$. Как хорошо известно, если $F(z) \in B'$ (т. е. $F'(z) \in B$), то

$$|\sigma_n(z, F')| \leqslant 1 \quad (n=0, 1, 2, \ldots, \ |z| \leqslant 1).$$

Кроме того, при тех же условиях

$$p_n(z, F') = O(\ln(n+2)) \quad (n \geqslant 0, \ |z| \leqslant 1, \ F \in B') \ *.$$

Воспользуемся леммой 2, положив в ней

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = F(z). \tag{2.4}$$

Тогда

$$s_n = p_n(z, F), \quad \sigma_n = \sigma_n(z, F), \quad t_n = z p_n(z, F'), \quad \tau_n = z\sigma_n(z, F'),$$

$$s = F(z), \quad t_n = O(\ln(n+2)) = o(n), \quad |\tau_n| \leqslant 1,$$

и мы получаем, что

$$|\rho_n(z, F)| = |F(z) - \sigma_n(z, F)| < \frac{3}{n+1} \quad (n \geqslant 0, \ |z| \leqslant 1, \ F \in B').$$

Тем самым утверждение (2.2) установлено.

Случай $r=2$. Если $F(z) \in B''$, то $F'(z) \in B'$. Поэтому, применяя к функции $F'(z)$ неравенство (2.2), получаем:

$$\rho_n(z, F') = O\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad (n \geqslant 0, \ |z| \leqslant 1, \ F' \in B'). \tag{2.5}$$

Далее, определим, как и выше, Σu_n согласно (2.4) и воспользуемся леммой 3. Имеем: $t = zF'(z)$ и, в силу (2.5),

$$t - \tau_n = z\{F'(z) - \sigma_n(z, F')\} = z\rho_n(z, F') = O\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Отсюда

$$s - \sigma_n = F(z) - \sigma_n(z, F) = \rho_n(z, F) = \frac{zF'(z)}{n+1} + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$(n \geqslant 0, \ |z| \leqslant 1, \ F \in B'').$$

Случай $r > 2$. Допустим, что утверждение теоремы доказано для некоторого $r \geqslant 2$ и установим его справедливость для $r+1$. Если $F(z) \in B^{(r+1)}$, то $F'(z) \in B^{(r)}$. Применяя к функции $F'(z)$ соотношение (2.3), получаем, что

$$\rho_n(z, F') = \frac{zF''(z)}{n+1} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n \geqslant r-2, \ |z| \leqslant 1, \ F' \in B^{(r)}). \tag{2.6}$$

Воспользуемся леммой 4, снова определив Σu_n согласно (2.4). Так как, в силу (2.6),

$$t - \tau_n = z\{F'(z) - \sigma_n(z, F')\} = z\rho_n(z, F') =$$
$$= \frac{zF''(z)}{n+1} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n = r-2, r-1, \ldots),$$

* Эта запись означает, что соотношение $p_n(z, F') = O(\ln(n+2))$ выполняется равномерно относительно $n \geqslant 0$, равномерно относительно z в круге $|z| \leqslant 1$ и равномерно относительно всех функций $F(z)$ класса B'. Аналогичная запись применяется и в дальнейшем.

то получаем, что

$$s-\sigma_n=\rho_n(z, F)=\frac{zF'(z)}{n+1}+O\left(\frac{1}{(n+1)^{r+1}}\right) \quad (n\geqslant r-1,\ |z|\leqslant 1,\ F\in B^{(r+1)}),$$

т. е. утверждение (2.3) для $r+1$. Так как это утверждение установлено выше для $r=2$, то оно справедливо для любого $r\geqslant 2$, и теорема полностью доказана.

§ 3. О приближении функций класса $B^{(r)}$ суммами Тейлора

Переходим к основной теме настоящей работы — рассмотрению вопроса о приближении функций класса $B^{(r)}$ суммами Тейлора. Начнем с доказательства теоремы о приближении функций класса $B^{(r)}$ суммами Тейлора в фиксированной точке z единичного круга.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть r — натуральное число и $F(z)\in B^{(r)}$. Тогда*

$$r_n(z, F)=-\frac{z^r}{(n+1)^r}\,p_{n-r}(z, F^{(r)})+O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n\geqslant r-1) \qquad (3.1)$$

равномерно в круге $|z|\leqslant 1$ и равномерно относительно всего класса $B^{(r)}$.

Доказательство. Имеем:

$$\sigma_n(z, F)=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)c_kz^k=\sum_{k=0}^{n}c_kz^k-\frac{z}{n+1}\sum_{k=1}^{n}kc_kz^{k-1}=$$

$$=p_n(z, F)-\frac{z}{n+1}\,p_{n-1}(z, F') \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$r_n(z, F)=-\frac{z}{n+1}\,p_{n-1}(z, F')+\rho_n(z, F) \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \qquad (3.2)$$

Пусть $F(z)\in B'$. Согласно утверждению (2.2) теоремы 1,

$$\rho_n(z, F)=O\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad (n\geqslant 0,\ |z|\leqslant 1,\ F\in B').$$

Отсюда и из (3.2) выводим, что

$$r_n(z, F)=-\frac{z}{n+1}\,p_{n-1}(z, F')+O\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad (n\geqslant 0,\ |z|\leqslant 1,\ F\in B'). \qquad (3.3)$$

Это доказывает утверждение (3.1) для $r=1$.

Пусть теперь $F(z)\in B^{(r)}$, где $r\geqslant 2$. Тогда имеем:

$$p_{n-1}(z, F')=F'(z)-r_{n-1}(z, F') \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

и, согласно утверждению (2.3) теоремы 1,

$$\rho_n(z, F)=\frac{zF'(z)}{n+1}+O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n\geqslant r-2,\ |z|\leqslant 1,\ F\in B^{(r)}).$$

Подставляя эти соотношения в формулу (3.2), получаем:

$$r_n(z, F)=-\frac{z}{n+1}\{F'(z)-r_{n-1}(z, F')\}+\frac{zF'(z)}{n+1}+O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right)=$$

$$=\frac{z}{n+1}\,r_{n-1}(z, F')+O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n\geqslant r-2,\ |z|\leqslant 1,\ F\in B^{(r)}).$$

Далее, если $r\geqslant 3$, то применим эту формулу, с заменой n на $n-1$, к функции $F'(z)\in B^{(r-1)}$. Получаем:

$$r_{n-1}(z, F')=\frac{z}{n}\,r_{n-1}(z, F'')+O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right) \quad (n-1\geqslant r-3,\ |z|\leqslant 1,\ F'\in B^{(r-1)}).$$

Отсюда и из (3.4) следует, что

$$r_n(z, F) = \frac{z^2}{n(n+1)} r_{n-2}(z, F'') + O\left(\frac{1}{n^r}\right) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) =$$
$$= \frac{z^2}{n(n+1)} r_{n-2}(z, F'') + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n \geqslant r-2,\ |z| \leqslant 1,\ F \in B^{(r)}).$$

Вообще, если $m > 0$ и $r \geqslant m+1$, то повторное применение этого приема показывает, что

$$r_n(z, F) = \frac{z^m}{(n-m+2)(n-m+3)\ldots(n+1)} r_{n-m}(z, F^{(m)}) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right)$$
$$(n \geqslant r-2,\ |z| \leqslant 1,\ F \in B^{(r)}).$$

В частности, полагая в этой формуле $m = r-1$, получаем, что для $r \geqslant 2$

$$r_n(z, F) = \frac{z^{r-1}}{(n-r+3)\ldots(n+1)} r_{n-r+1}(z, F^{(r-1)}) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right)$$
$$(n \geqslant r-2,\ |z| \leqslant 1,\ F \in B^{(r)}). \tag{3.4}$$

Наконец, если $F(z) \in B^{(r)}$, то $F^{(r-1)}(z) \in B'$. Поэтому, в силу (3.3), для любого $r \geqslant 1$

$$r_{n-r+1}(z, F^{(r-1)}) = -\frac{z}{n-r+2} p_{n-r}(z, F^{(r)}) + O\left(\frac{1}{n-r+2}\right) =$$
$$= -\frac{z}{n-r+2} p_{n-r}(z, F^{(r)}) + O\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad (n \geqslant r-1,\ |z| \leqslant 1,\ F \in B^{(r)}).$$

Подставляя эту оценку в формулу (3.4), получаем, что для $r \geqslant 2$

$$r_n(z, F) = -\frac{z^r}{(n-r+2)\ldots(n+1)} p_{n-r}(z, F^{(r)}) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right)$$
$$(n \geqslant r-1,\ |z| \leqslant 1,\ F \in B^{(r)}), \tag{3.5}$$

а согласно (3.3), это соотношение справедливо также для $r = 1$.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что если функция $\varphi(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и $|\varphi(z)| \leqslant 1$ $(|z| < 1)$, то

$$p_n(z, \varphi) = O(\ln(n+2)) \quad (n \geqslant -1,\ |z| \leqslant 1,\ \varphi \in B).$$

Отсюда для любого $r \geqslant 1$

$$-\frac{z^r}{(n-r+2)\ldots(n+1)} p_{n-r}(z, F^{(r)}) = -\frac{z^r}{(n+1)^r} p_{n-r}(z, F^{(r)}) + O\left(\frac{\ln(n+2)}{(n+1)^{r+1}}\right) =$$
$$= -\frac{z^r}{(n+1)^r} p_{n-r}(z, F^{(r)}) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n \geqslant r-1,\ |z| \leqslant 1,\ F \in B^{(r)})$$

и

$$r_n(z, F) = -\frac{z^r}{(n+1)^r} p_{n-r}(z, F^{(r)}) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right)$$
$$(n \geqslant r-1,\ |z| \leqslant 1,\ F \in B^{(r)}).$$

Теорема доказана.

Эта теорема показывает, что для функций $F(z) \in B^{(r)}$ имеется тесная связь между поведением остатков ряда Тейлора $r_n(z, F)$ и поведением сумм Тейлора $p_{n-r}(z, F^{(r)})$. В частности, она позволяет редуцировать задачу исследования остатков ряда Тейлора $r_n(z, F)$ для функций $F(z) \in B^{(r)}$ к более простой задаче исследования сумм Тейлора $p_n(z, \varphi)$ для функций $\varphi(z)$, аналитических в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих условию $|\varphi(z)| \leqslant 1$ $(|z| < 1)$; в дальнейшем этот класс функций будет обозначаться через B.

Отметим несколько следствий.

Следствие 1. *Пусть r — натуральное число, $F(z) \in B^{(r)}$,*

$$R_n(F) = \max_{|z| \leqslant 1} |r_n(z, F)|, \quad P_n(F^{(r)}) = \max_{|z| \leqslant 1} |p_n(z, F^{(r)})|.$$

Тогда

$$R_n(F) = \frac{1}{(n+1)^r} P_{n-r}(F^{(r)}) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n \geqslant r-1, \ F \in B^{(r)}). \qquad (3.6)$$

В частности, для того чтобы

$$R_n(F) = O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n \geqslant r-1),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$P_n(F^{(r)}) = O(1) \quad (n \geqslant -1).$$

Следствие 2. *Пусть r — натуральное число и $F(z) \in B^{(r)}$. Тогда для почти всех z на окружности $|z| = 1$*

$$r_n(z, F) = o\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n^r}\right) \quad (n \to \infty). \qquad (3.7)$$

Действительно, из теоремы Колмогорова—Селиверстова [см. ([3]), а также ([1]), § 10.32] вытекает, что если $\varphi(z) \in B$, то для почти всех z на окружности $|z| = 1$

$$p_n(z, \varphi) = o\left(\sqrt{\ln n}\right) \quad (n \to \infty). \qquad (3.8)$$

Впрочем, оценку (3.7) нетрудно вывести из (3.8) и непосредственно, не обращаясь к теореме 2.

§ 4. Асимптотическая формула для $R_n[B^{(r)}]$.

В этом параграфе исследуется поведение верхних граней $R_n[B^{(r)}]$, а также последовательностей $R_n(F)$ для индивидуальных функций $F(z) \in B^{(r)}$. Напомним предварительно несколько известных предложений о поведении сумм Тейлора для функций $\varphi(z) \in B$.

ТЕОРЕМА ЛАНДАУ [см. ([9]), § 2].

$$\sup_{\varphi \in B} \max_{|z| \leqslant 1} |p_n(z, \varphi)| = G_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$G_0 = 1, \ G_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В частности,

$$G_n = \frac{1}{\pi} \ln(n+1) + O(1) \quad (n \geqslant 0).$$

ТЕОРЕМА БОРА [см. ([8])]. *Существует функция* $\varphi_1(z) \in B$, *для которой*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|p_n(1, \varphi_1)|}{G_n} = 1.$$

ТЕОРЕМА БОРА—НЕДЕРА. *Пусть* $\varphi(z) \in B$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \{G_n - \max_{|z|\leqslant 1} |p_n(z, \varphi)|\} = \infty$$

и для любой последовательности $\{l_n\}$, *удовлетворяющей условию* $l_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, *найдется функция* $\varphi_2(z) \in B$ *такая, что*

$$|p_n(1, \varphi_2)| \geqslant G_n - l_n$$

для бесконечного числа значений n.

Первая половина этого предложения установлена Г. Бором ([8]), а вторая — Л. Недером ([11]).

Теперь мы в состоянии получить асимптотическую формулу для $R_n[B^{(r)}]$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* r — *натуральное число. Тогда*

$$R_n[B^{(r)}] = \sup_{F \in B^{(r)}} \max_{|z|\leqslant 1} |r_n(z, F)| = $$
$$= \frac{1}{\pi} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^r} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n \geqslant r-1).$$

Формулировка этой теоремы приводилась автором ранее в работе ([5]) (теорема 7).

Доказательство. Согласно следствию 1 из теоремы 2, для любого $r \geqslant 1$

$$R_n(F) = \frac{1}{(n+1)^r} P_{n-r}(F^{(r)}) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n \geqslant r-1,\ F \in B^{(r)}).$$

Отсюда

$$R_n[B^{(r)}] = \sup_{F \in B^{(r)}} R_n(F) = \frac{1}{(n+1)^r} \sup_{F \in B^{(r)}} P_{n-r}(F^{(r)}) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) =$$
$$= \frac{1}{(n+1)^r} \sup_{\varphi \in B} P_{n-r}(\varphi) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n \geqslant r-1).$$

Пользуясь теоремой Ландау, получаем окончательно:

$$R_n[B^{(r)}] = \frac{1}{(n+1)^r} G_{n-r} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\ln(n+2-r)}{(n+1)^r} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^r} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right) \quad (n \geqslant r-1),$$

и теорема доказана.

Наконец, рассмотрим поведение остатков ряда Тейлора для индивидуальных функций $F(z) \in B^{(r)}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* r — *натуральное число. Существует функция* $F_1(z) \in B^{(r)}$, *для которой*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|r_n(1, F_1)|}{\frac{1}{\pi} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^r}} = 1.$$

Это устанавливается точно так же, как и предыдущее предложение, только вместо теоремы Ландау нужно воспользоваться теоремой Бора-

Таким образом, существуют функции $F(z) \in B^{(r)}$, для которых

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|r_n(z, F)|}{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^r}} > 0$$

в некоторых точкэх окружности $|z|=1$. Однако, согласно следствию 2 из теоремы 2, мера множества таких точек равна 0. Это заключение любопытно сопоставить с одним замечанием Н. Н. Лузина [см. ([4]), стр. 375—376, проблема 28].

Применяя теорему Бора—Недера, получаем вместо теоремы 4 следующее более точное предложение:

ТЕОРЕМА 5. *Пусть r — натуральное число и $F(z) \in B^{(r)}$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \{G_n - n^r R_n(F)\} = \infty$$

и для любой последовательности $\{l_n\}$, $l_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, найдется функция $F_2(z) \in B^{(r)}$ такая, что

$$n^r |r_n(1, F_2)| \geqslant G_n - l_n$$

для бесконечного числа значений n.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
16. XII. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

[2] Колмогоров А., Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen, Annals of Math., 36 (1935), 521—526.

[3] Колмогоров А. и Селиверстов Г., Sur la convergence des séries de Fourier, Atti Accad. naz. Lincei, 3 (1926), 307—310.

[4] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., 1951.

[5] Стечкин С. Б., О приближении непрерывных функций суммами Фурье, Успехи матем. наук, 7, вып. 4 (50) (1952), 139—141.

[6] Харди Г., Расходящиеся ряды, М., 1951.

[7] Alexits G., A Fourier-sor Cesàro-közepeivel való approximáció nagyságrendjéröl, Matem. és Fiz. Lapok, 48 (1941), 410—422.

[8] Bohr H., Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe (Zweite Mitt.), Nachr. v. d. K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math. phys. Klasse (1917), 119—128.

[9] Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin, 1916.

[10] Nagy B., Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen, Acta Sc. Mathematicarum, 11 (1946), 71—84.

[11] Neder L., Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe, Math. Zeitschr., 11 (1921), 115—123.

[12] Sewell W. E., Degree of approximation by polynomials in the complex domain, Annals of math. studies, N 9, Princeton, 1942.

[13] Zygmund A., On the degree of approximation of functions by Fejér means, Bull. Amer. Math. Soc., 51 (1945), 274—278.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 473–484

Б. М. ЛЕВИТАН

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ УРАВНЕНИЯ $y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0$

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе изучается асимптотическое поведение спектральной функции уравнения $y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0$, заданного в бесконечном интервале. Полученная асимптотика в некотором отношении дополняет асимптотику, данную в работах ([1]) и ([2]). Основным вспомогательным средством в настоящей работе является общая тауберова теорема Н. Винера.

Введение

Пусть в бесконечном интервале $(0, \infty)$ или $(-\infty, \infty)$ задано уравнение

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0. \tag{0.1}$$

Функция $q(x)$ предполагается действительной и суммируемой в каждом конечном интервале. Обозначим через $\theta(x, y; \lambda)$ спектральную функцию уравнения (0.1) и через $\theta^*(x, y; \lambda)$ — спектральную функцию уравнения *

$$y'' + \lambda y = 0.$$

Далее, положим при $\lambda > 0$:

$$\lambda = \mu^2, \quad \theta(x, y; \lambda) = \theta_1(x, y; \mu), \quad \theta^*(x, y; \lambda) = \theta_1^*(x, y; \mu),$$
$$\Phi(x, y; \mu) = \theta_1(x, y; \mu) - \theta_1^*(x, y; \mu).$$

Цель настоящей статьи состоит в доказательстве следующей теоремы:

ТЕОРЕМА. *При каждых фиксированных x, y и $\mu_0 > 0$*

$$\lim_{a\to\infty} \{\Phi(x, y; a + \mu_0) - \Phi(x, y; a)\} = 0. \tag{0.2}$$

Если μ_0 фиксировано, а точка (x, y) пробегает конечную область, то равенство (0.2) *имеет место равномерно.*

Частный случай этой теоремы был ранее получен В. А. Марченко ([3]). Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм, которые приводятся в двух следующих параграфах.

---

* Определение спектральной функции см. в работе ([2]). Если уравнение (0.1) задано в интервале $(0, \infty)$, то в точке 0 следует задать граничное условие.

§ 1. Вывод некоторых вспомогательных формул

Рассмотрим для определенности интервал $(-\infty, \infty)$. В случае интервала $(0, \infty)$ рассуждения аналогичны.

Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = 0,$$

и через $\psi(x, \lambda)$ — решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0, \lambda) = 0, \quad \psi'(0, \lambda) = 1.$$

Как известно [см. (2)],

$$\varphi(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}\, t = \frac{1}{2}[\varphi(x+t, \lambda) + \varphi(x-t, \lambda)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s)\,\varphi(s, \lambda)\,ds \tag{1.1}$$

Для функции $w(x, t, s)$ при $t > 0$ справедлива оценка [см. (2), § 1]

$$|w(x, t, s)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} |q(r)|\,dr \exp\left(\frac{1}{2}t\int_{x-t}^{x+t}|q(r)|\,dr\right). \tag{1.2}$$

Из оценки (1.2) легко следует существенная в дальнейшем

ЛЕММА 1.1. *Пусть x принадлежит конечному интервалу (x_0, x_1). Существует функция $\varphi(t)$ $(t > 0)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\varphi(t) > 0$;

2) *$\varphi(t)$ монотонно возрастает;*

3) *существует положительная константа α такая, что для всех достаточно больших t выполняется неравенство*

$$\varphi(t) > e^{\alpha t}; \tag{1.3}$$

4) *если x принадлежит интервалу (x_0, x_1), то для всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство*

$$|w(x, t, s)| < \varphi(t). \tag{1.4}$$

Доказательство. В силу оценки (1.2), достаточно положить $(t > 0)$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\int_{x_0-t}^{x_1+t}|q(r)|\,dr \exp\left(\frac{1}{2}t\int_{x_0-t}^{x_1+t}|q(r)|\,dr\right).$$

Легко видеть, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям.

2. Определим функцию $g(t)$ следующим образом:

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(t+1)\{1+\varphi(t+1)\}^2}, & \text{если } t \geqslant 0, \\ g(-t), & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Из оценки (1.3) следует, что $g(t) \in L(-\infty, \infty)$. Кроме того, из условия 1) предыдущей леммы следует, что для всех t функция $g(t)$ конечна и положительна. Это обстоятельство чрезвычайно существенно

в дальнейшем. Далее, положим

$$g(t, a) = g(t)\cos at,$$

где через a обозначено произвольное действительное число. Помножим обе части равенства (1.1) на $g(t, a)$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до ∞. Мы получим формулу:

$$\varphi(x, \lambda) h(\lambda, a) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi(x+t, \lambda) g(t, a)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi(x-t, \lambda) g(t, a)\,dt + \\ + \frac{1}{2}\int_0^\infty g(t, a)\,dt \int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s)\varphi(s, \lambda)\,ds = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \{g(s-x, a) + \chi(x, s; a)\}\varphi(s, \lambda)\,ds, \tag{1.5}$$

где

$$h(\lambda, a) = \int_0^\infty g(t)\cos at \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt,$$

$$\chi(x, s; a) = \int_{|s-x|}^{\infty} w(x, t, s) g(t, a)\,dt.$$

Существование функции $\chi(x, s; a)$ следует из оценки (1.4). Существование функции $h(\lambda, a)$ для $\lambda \geqslant 0$ очевидно. Для $\lambda < 0$ функция $h(\lambda, a)$ также существует в обычном смысле. В самом деле, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q(r)|\,dr = \infty,$$

то из определения функции $\varphi(t)$ следует, что, каково бы ни было положительное число β, для достаточно больших t выполняется неравенство

$$\varphi(t) > e^{\beta t}$$

и, значит,

$$g(t) < e^{-2\beta t}.$$

Поэтому функция $h(\lambda, a)$ существует для всех $\lambda < 0$. Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q(r)|\,dr < \infty,$$

то проще всего заменить функцию $\varphi(t)$ на функцию $\varphi_1(t) = Ce^{t^2}$, где C — некоторая константа. При надлежащем выборе константы C функция $\varphi_1(t) > \varphi(t)$ и удовлетворяет всем условиям леммы 1.1. При этом

$$|h(\lambda, a)| \leqslant \int_0^\infty |g(t, a)| \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt \leqslant \int_0^\infty \frac{\cos h\sqrt{|\lambda|}\,t\,dt}{(t+1)\{1 + Ce^{t^2}\}} < \infty$$

и, следовательно, $h(\lambda, a)$ существует при всех $\lambda < 0$.

Точно так же можно получить формулу

$$\psi(x, \lambda) h(\lambda, a) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \{g(s-x, a) + \chi(x, s; a)\}\psi(s, \lambda)\,ds. \tag{1.5'}$$

Формулы (1.5) и (1.5′) показывают что при фиксированном x функции $\varphi(x,\lambda)\,h(\lambda,a)$ и $\psi(x,\lambda)\,h(\lambda,a)$ суть преобразования Фурье (по собственным функциям $\varphi(s,\lambda)$ и $\psi(s,\lambda)$) функции*

$$\frac{1}{2}\,g(s-x,a)+\frac{1}{2}\int\limits_{|s-x|}^{\infty} w(x,t,s)\,g(t,a)\,dt.$$

Поэтому из равенства Парсеваля следует [см. ([2]), § 4], что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h^2(\lambda,a)\,d_\lambda\theta(x,y;\lambda)=\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{g(s-x,a)+\chi(x,s;a)\}\{g(s-y,a)+\chi(y,s;a)\}\,ds. \tag{1.6}$$

Если $q(x)=0$, то

$$w(x,t,s)=0,\quad \chi(x,s;a)=0,$$

и формула (1.6) дает

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h^2(\lambda,a)\,d_\lambda\theta^*(x,y;\lambda)=\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s-x,a)\,g(s-y,a)\,ds. \tag{1.6′}$$

Вычитая из равенства (1.6) равенство (1.6′), мы получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h^2(\lambda,a)\,d_\lambda\{\theta(x,y;\lambda)-\theta^*(x,y;\lambda)\}=\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s-x,a)\,\chi(y,s;a)\,ds+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s-y,a)\,\chi(x,s;a)\,ds+\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi(x,s;a)\,\chi(y,s;a)\,ds. \tag{1.7}$$

Равенство (1.7) играет в дальнейшем фундаментальную роль.

§ 2. Некоторые вспомогательные оценки

1. ЛЕММА 2.1. *Пусть $g(t)$ и $h(\lambda,a)$ определены так же, как и в предыдущем параграфе. Тогда при каждых фиксированных x и y*

$$\lim_{a\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{0} h^2(\lambda,a)\,d_\lambda\theta(x,y;\lambda)=0. \tag{2.1}$$

Если точка (x,y) пробегает конечную область, то равенство (2.1) имеет место равномерно.

Доказательство. Оценим сначала интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cosh^2\sqrt{|\lambda|}\,t_0\,d_\lambda\theta(x,y;\lambda)$$

при произвольном положительном числе t_0. С этой целью проинтегрируем обе части равенства (1.1) по t в пределах от 0 до t_0. Мы получим,

* То, что эта функция имеет интегрируемый квадрат, легко следует из оценки (1.3) (см. также доказательство леммы 2.2).

изменив порядок интегрирования:

$$\varphi(x, \lambda)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, t_0}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2}\int_{x-t_0}^{x+t_0}\left\{1 + \int_{|s-x|}^{t_0} w(x, t, s)\, dt\right\}\varphi(s, \lambda)\, ds.$$

Точно так же

$$\psi(x, \lambda)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, t_0}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2}\int_{x-t_0}^{x+t_0}\left\{1 + \int_{|s-x|}^{t_0} w(x, t, s)\, dt\right\}\psi(s, \lambda)\, ds.$$

Поэтому из равенства Парсеваля следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\, t_0}{\lambda}\, d_\lambda\theta(x, x; \lambda) = \frac{1}{4}\int_{x-t_0}^{x+t_0}\left\{1 + \int_{|s-x|}^{t_0} w(x, t, s)\, dt\right\}^2 ds.$$

Из этого равенства и оценки (1.4) следует оценка:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin^2\sqrt{|\lambda|}\, t_0}{|\lambda|}\, d_\lambda\theta(x, x; \lambda) < \frac{t_0}{2}\{1 + \varphi(t_0)\}^2, \tag{2.2}$$

если только x заключается внутри интервала (x_0, x_1) (см. лемму 1.1). Так как

$$\cosh\sqrt{|\lambda|}\, t_0 < \frac{\sinh\sqrt{|\lambda|}(t_0+1)}{\sqrt{|\lambda|}},$$

то из оценки (2.2) следует:

$$\int_{-\infty}^{0}\cos h^2\sqrt{|\lambda|}\, t_0\, d_\lambda\theta(x, x; \lambda) < \frac{t_0+1}{2}\{1 + \varphi(t_0+1)\}^2 = \frac{1}{2g(t_0)}. \tag{2.3}$$

Так как [см. (2), § 3, формула (3.14)]

$$|\Delta\theta(x, y; \lambda)| \leqslant \frac{1}{2}\{\Delta\theta(x, x; \lambda) + \Delta\theta(y, y; \lambda)\},$$

то из оценки (2.3) следует

$$\int_{-\infty}^{0}\cos h^2\sqrt{|\lambda|}\, t_0\, d_\lambda\theta(x, x; \lambda) < \frac{1}{2g(t_0)}, \tag{2.3'}$$

если только x и y принадлежат интервалу (x_0, x_1). Перейдем теперь непосредственно к доказательству равенства (2.1). Меняя порядок интегрирования, мы получим:

$$I = \int_{-\infty}^{0} h^2(\lambda, a)\, d_\lambda\theta(x, y; \lambda) = \int_0^\infty\int_0^\infty g(t)\, g(s)\, F(x, y; s, t)\cos at\cos as\, dt\, ds,$$

где

$$F(x, y; s, t) = \int_{-\infty}^{0}\cos\sqrt{\lambda}\, t\cos\sqrt{\lambda}\, s\, d_\lambda\theta(x, y; \lambda).$$

Из оценки (2.3′) и неравенства Коши—Буняковского следует:

$$|F(x, y; s, t)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g(t)\, g(s)}}. \tag{2.4}$$

Поэтому функция

$$F_1(x, y; s, t) = g(s)\, g(t)\, F(x, y; s, t)$$

при фиксированных x и y абсолютно интегрируема в прямоугольнике $(0 \leqslant s \leqslant \infty;\ 0 \leqslant t \leqslant \infty)$; следовательно, равенство (2.1) выполняется при каждых фиксированных x и y. Чтобы доказать, что равенство (2.1) имеет место равномерно в каждой конечной области, заметим, что функция $F(x, y; s, t)$ имеет непрерывные частные производные по s и t, а функция $g(s)$ имеет производную, суммируемую в каждой конечной области, что следует непосредственно из определения этой функции.

Выберем произвольное положительное число N и положим

$$I = \int_0^N \int_0^N F_1(x, y;\ s, t) \cos at \cdot \cos as\, ds\, dt +$$

$$+ \iint_{D_N} F_1(x, y; s, t) \cos at \cdot \cos as\, ds\, dt = I_1 + I_2,$$

где D_N — область, лежащая вне квадрата $(0 \leqslant s \leqslant N;\ 0 \leqslant t \leqslant N)$. Обозначим через ε произвольное положительное число. Из оценки (2.4) следует, что при достаточно большом N будет выполняться неравенство

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.5}$$

и притом равномерно в каждой конечной области изменения точки (x, y).

Преобразуем интеграл I_1, интегрируя его по частям. Мы получим:

$$I_1 = \int_0^N g(s) \cos as \left[\frac{\sin aN}{a}\, g(N)\, F(x, y; s, N) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{a} \int_0^N \frac{\partial}{\partial t} \{F(x, y; s, t)\, g(t)\} \sin at\, dt\right] ds.$$

Поэтому при фиксированном N и фиксированной области изменения точки (x, y) можно взять a настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует

$$|I| < \varepsilon,$$

что и доказывают лемму, ибо число ε было выбрано произвольно.

ЛЕММА 2.2. *Пусть функция $g(t)$ определена так же, как и в предыдущем параграфе, и пусть*

$$\chi(x, s; a) = \int_{|s-x|}^{\infty} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt,$$

Имеют место следующие утверждения:

1) *при фиксированных* x *и* a $\chi(x, s; a) \in L_2(-\infty, \infty)$;

2) *при фиксированном* x

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^2(x, s; a)\, ds = 0. \tag{2.7}$$

Если x *пробегает конечный интервал, то равенство* (2.7) *выполняется равномерно.*

Доказательство: 1) В силу оценки (1.3),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi^2(x, s; a)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ \int_{|s-x|}^{\infty} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ \int_{|s-x|}^{\infty} \varphi(t)\, g(t)\, dt \right\}^2 < \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ \int_{|s-x|}^{\infty} e^{-\alpha t}\, dt \right\}^2 = \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|s-x|}\, ds < \infty,$$

что и доказывает утверждение 1).

2) Обозначим через N произвольное положительное число и положим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\{ \int_{|s-x|}^{\infty} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt \right\}^2 = \int_{|s|\leqslant N} ds \left\{ \int_{|s-x|}^{\infty} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt \right\}^2 +$$

$$+ \int_{|s|>N} ds \left\{ \int_{|s-x|}^{\infty} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt \right\}^2 = I_1 + I_2.$$

Из оценки (1.3) следует оценка

$$|I_2| \leqslant \int_{|s|>N} ds \left\{ \int_{|s-x|}^{\infty} e^{-\alpha t}\, dt \right\} = \frac{1}{\alpha^2} \int_{|s|>N} e^{-2\alpha|s-x|}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\alpha^3} \{ e^{-2\alpha|N-x|} + e^{-2\alpha|N+x|} \}. \tag{2.8}$$

Далее, обозначим через X произвольное положительное число и положим

$$I_1 = \int_{|s|\leqslant N} ds \left\{ \int_{|s-x|}^{\infty} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt \right\}^2 =$$

$$= \int_{|s|\leqslant N} ds \left\{ \int_{|s-x|}^{X} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt + \int_{X}^{\infty} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt \right\}^2 =$$

$$= \int_{|s|\leqslant N} ds \left\{ \int_{|s-x|}^{X} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt \right\}^2 +$$

$$+ 2 \int_{|s|\leqslant N} ds \left\{ \int_{|s-x|}^{X} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt \right\} \left\{ \int_{X}^{\infty} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt \right\} +$$

$$+ \int_{|s|\leqslant N} ds \left\{ \int_{X}^{\infty} w(x, t, s)\, g(t) \cos at\, dt \right\}^2 = I_{11} + I_{12} + I_{13}.$$

В силу оценки (1.3),

$$|I_{13}| \leqslant \int\limits_{|s| \leqslant N} ds \left\{ \int\limits_X^\infty e^{-\alpha t}\, dt \right\}^2 = \frac{1}{\alpha^2} \int\limits_{|s| \leqslant N} e^{-2\alpha X}\, ds = \frac{e^{-2\alpha X}}{\alpha^2}, \tag{2.9}$$

$$|I_{12}| \leqslant \int\limits_{|s| \leqslant N} ds \left\{ \int\limits_{|s-x|}^X e^{-\alpha t}\, dt \right\} \cdot \left\{ \int\limits_X^\infty e^{-\alpha t}\, dt \right\} \leqslant \frac{e^{-\alpha|s-x|} e^{-\alpha X}\, 2N}{\alpha^2}. \tag{2.10}$$

Далее, из свойств тригонометрического интеграла следует, что при фиксированных N и X

$$\lim_{a \to \infty} I_{11} = 0. \tag{2.11}$$

Выберем произвольное положительное число ε и возьмем N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{2.12}$$

что возможно в силу оценки (2.8).

Выбрав N, возьмем X настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$|I_{13}| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.13}$$

и

$$|I_{12}| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{2.14}$$

что возможно в силу оценок (2.9) и (2.10). Наконец, в силу (2.11), при фиксированных N и X можно выбрать положительное число $A = A(\varepsilon)$ настолько большим, чтобы при $|a| > A$ выполнялось неравенство

$$|I_{11}| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.15}$$

Из оценок (2.12) — (2.15) следует, что при $|a| > A$ выполняется неравенство

$$|I| < \varepsilon,$$

а так как число ε было выбрано произвольно, то последнее неравенство означает, что

$$\lim_{a \to \infty} I = 0,$$

что и требовалось доказать. Из проведенных оценок ясно, что если x пробегает конечный интервал, то равенство (2.7) выполняется равномерно.

2. Положим

$$k(\sqrt{\lambda}) = \int\limits_0^\infty g(t) \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt.$$

Тогда

$$h(\lambda, a) = \frac{1}{2} \{k(\sqrt{\lambda} + a) + k(\sqrt{\lambda} - a)\},$$

$$h^2(\lambda, a) = \frac{1}{4} \{k^2(\sqrt{\lambda} + a) + 2k(\sqrt{\lambda} + a)\, k(\sqrt{\lambda} - a) + k^2(\sqrt{\lambda} - a)\},$$

ЛЕММА 2.3. *При фиксированных x и y*

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty k(\sqrt{\lambda}+a)\,k(\sqrt{\lambda}-a)\,d_\lambda\theta(x, y; \lambda)=0. \tag{2.16}$$

Равенство (2.16) *имеет место равномерно в каждой конечной области.*

Доказательство. Положим $\lambda=\mu^2$, $\theta(x, y; \lambda)=\theta_1(x, y; \mu)$ и продолжим функцию $\theta_1(x, y; \mu)$ на отрицательные μ нечетно. Так как функция $k(\mu+a)\,k(\mu-a)$ (a фиксировано) четна, то вместо равенства (2.16) мы можем доказывать равенство

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^\infty k(\mu+a)\,k(\mu-a)\,d_\mu\theta_1(x, y; \mu)=0. \tag{2.16'}$$

При этом достаточно рассмотреть случай $a>0$. Положим

$$I=\int_{-\infty}^\infty I(\mu+a)\,k(\mu-a)\,d_\mu\theta_1(x, y; \mu)=\int_{-\infty} k(\mu+a)\,k(\mu-a)\,d_\mu\theta_1(x, y; \mu)+$$
$$+\int_0^\infty k(\mu+a)\,k(\mu-a)\,d_\mu\theta_1(x, y; \mu)=I_1+I_2.$$

В силу неравенства Коши—Буняковского,

$$|I_2|\leqslant\left\{\int_0^\infty k^2(\mu+a)\,|d_\mu\theta_1(x, y; \mu)|\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty k^2(\mu-a)\,|d_\mu\theta_1(x, y; \mu)|\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.17}$$

Из монотонности функции $g(t)$ следует, что при больших * μ

$$k(\mu)=O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Далее, из леммы 3.3 работы ([2]) следует, что

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty}\mathop{\mathrm{V}}_{\mu}^{\mu+1}\{\theta_1(x, y; \mu)\}<C,$$

причем константа в этом неравенстве зависит от области изменения точки (x, y). Поэтому мы имеем:

$$\int_0^\infty k^2(\mu+a)\,|d_\mu\theta_1(x, y; \mu)|\leqslant\int_0^\infty\frac{C}{(\mu+a)^2}|d_\mu\theta_1(x, y; \mu)|\leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(k+a)^2}=O\left(\frac{1}{a}\right),$$

$$\int_0^\infty k^2(\mu-a)\,|d_\mu\theta_1(x, y; \mu)|\leqslant\int_{-\infty}^\infty k^2(\mu-a)\,|d_\mu\theta_1(x, y; \mu)|=$$
$$=\int_{-\infty}^\infty k^2(\mu)\,|d_\mu\theta_1(x, y; \mu+a)|\leqslant C\left\{1+\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}\right\}=O(1).$$

---

* В самом деле,

$$|k(\mu)|=\left|\frac{1}{\mu}\int_0^\infty g'(t)\sin\mu t\,dt\right|\leqslant-\frac{1}{|\mu|}\int_0^\infty g'(t)\,dt=\frac{g(0)}{|\mu|}.$$

Из этих оценок и неравенства (2.17) следует, что $\lim\limits_{a\to\infty} I_2 = 0$. Точно так же доказывается, что $\lim\limits_{a\to\infty} I_1 = 0$.

3. Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_0^\infty \left\{k^2(\sqrt{\lambda}+a) + k^2(\sqrt{\lambda}-a)\right\} d_\lambda \left\{\theta(x, y; \lambda) - \theta^*(x, y; \lambda)\right\}. \qquad (2.18)$$

Положим

$$\lambda = \mu^2, \quad \theta(x, y; \lambda) - \theta^*(x, y; \lambda) = \theta_1(x, y; \mu) - \theta_1^*(x, y; \mu) = \Phi(x, y; \mu)$$

и продолжим функцию $\Phi(x, y; \mu)$ (x, y фиксированы) на отрицательные μ нечетно. Так как функция $k(\mu)$ четна, то

$$\int_0^\infty k^2(\mu+a)\, d_\mu \Phi(x, y; \mu) = \int_{-\infty}^0 a^2(\mu-a)\, d_\mu \Phi(x, y; \mu).$$

Поэтому интеграл (2.18) можно преобразовать к виду

$$\int_{-\infty}^\infty k^2(\mu-a)\, d_\mu \Phi(x, y; \mu).$$

Из равенства (1.7), неравенства Коши—Буняковского и лемм 2.1, 2.2 и 2.3 следует основная в дальнейшем изложении

ЛЕММА 2.4. *При фиксированных x и y*

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^\infty k^2(\mu-a)\, d_\mu \Phi(x, y; \mu) = 0. \qquad (2.19)$$

Равенство (2.19) *имеет место равномерно в каждой конечной области.*

§ 3. Доказательство теоремы

1. Лемма 2.4 позволяет, опираясь на основную тауберову теорему Н. Винера, доказать теорему, сформулированную во введении.

Нам понадобится следующая тауберова теорема Н. Винера [см. ([4]), стр. 74]:

Обозначим через $f(\mu)$ измеримую ограниченную функцию и предположим, что для больших μ выполняется оценка

$$|f(\mu)| = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \qquad (3.1)$$

Далее, предположим, что преобразование Фурье функции $f(\mu)$ не обращается в нуль ни в одной точке. Пусть $f_1(\mu)$ — измеримая ограниченная функция, удовлетворяющая для больших μ оценке (3.1), *и пусть функция $\theta(\mu)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \mathop{V}_{\mu}^{\mu+1} \{\theta(\mu)\} < \infty. \qquad (3.2)$$

Тогда если

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu-a)\,d\theta(\mu) = A\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\,d\mu,$$

то

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\mu-a)\,d\theta(\mu) = A\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\mu)\,d\mu.$$

В частности, если $A=0$, *из равенства*

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu-a)\,d\theta(\mu) = 0$$

следует равенство

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\mu-a)\,d\theta(\mu) = 0.$$

2. Положим $f(\mu)=k^2(\mu)$, где

$$k(\mu)=\int_0^{\infty} g(t)\cos\mu t\,dt.$$

Покажем, что преобразование Фурье функции $f(\mu)$ ни в одной точке не обращается в нуль. С этой целью рассмотрим свертку функции $g(t)$:

$$g_1(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(x+t)\,g(x)\,dx.$$

Так как $g(t)$ есть преобразование Фурье функции $k(\mu)$, то, как легко проверить непосредственным вычислением, $g_1(t)$ есть преобразование Фурье функции $k^2(\mu)=f(\mu)$. Так как $g(t)>0$, то $g_1(t)$ также больше нуля.

Выберем теперь произвольное фиксированное положительное число μ_0 и положим

$$f_1(\mu)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leqslant\mu<\mu_0\\ 0 & \text{для прочих } \mu.\end{cases}$$

Далее, положим при фиксированных x и y

$$\theta(\mu)=\Phi(x, y; \mu).$$

Так как для больших μ $k(\mu)=O\left(\frac{1}{\mu}\right)$, то функция $f(\mu)=k^2(\mu)$ удовлетворяет условиям теоремы Н. Винера. Функция $f_1(\mu)$ также удовлетворяет условиям теоремы Н. Винера. Наконец, функция $\theta(\mu)$ также удовлетворяет условиям этой теоремы, что следует из леммы 4.4 работы ([2]).

Поэтому, на основании леммы 2.4 и тауберовой теоремы Н. Винера,

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\mu-a)\,d_\mu\Phi(x, y; \mu) = \lim_{a\to\infty}\int_a^{\mu_0+a} d\Phi(x, y; \mu) = 0,$$

т. е.

$$\lim_{a\to\infty}\{\Phi(x, y; \mu_0+a)-\Phi(x, y; a)\}=0, \tag{3.3}$$

что и требовалось доказать.

В частности, при $x=y$ из равенства (3.3) следует

$$\lim_{a\to\infty} \{\theta_1(x, x; \mu_0+a)-\theta_1(x, x; a)\} = \frac{1}{\pi}\mu_0. \tag{3.4}$$

Так как равенство (2.19) имеет место равномерно в каждой конечной области, то из доказательства теоремы Н. Винера следует, что равенства (3.3) и (3.4) имеют место равномерно в каждой конечной области.

В заключение заметим, что из равенства (3.4) можно получить асимптотическое поведение спектральной функции $\theta_1(x, y; \mu)$ на диагонали $x=y$, однако без оценки остатка.

Поступило
12. XI. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 325—352.

[2] Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 331—364.

[3] Марченко В. А., Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, Труды Моск. матем. об-ва, т. 1 (1952), 327—420.

[4] Wiener N., The Fourier integrals, Cambridge University Press, 1933.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 485—498

В. И. НЕЧАЕВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ СУММОЙ СЛАГАЕМЫХ ВИДА $\frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{n!}$

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

В настоящей статье рассматривается проблема Варинга для многочлена $\varphi_n(x) = \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{n!}$. При этом существенно улучшается оценка $g(\varphi_n)$, установленная автором раньше [1]. В доказательстве используются новые оценки некоторых тригонометрических сумм.

Пусть n — целое $\geqslant 12$, $\varphi(x) = \varphi_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$. Символом $G(\varphi_n)$ обозначим наименьшее целое r со свойствами: существует постоянное c с условием, что при $r = G(\varphi_n)$ всякое целое $N \geqslant c$ представляется в форме

$$N = \frac{\varphi(x_1)}{n!} + \frac{\varphi(x_2)}{n!} + \cdots + \frac{\varphi(x_r)}{n!} \tag{1}$$

с целыми неотрицательными x_i, но не существует никакого $c' > c$ такого, что всякое целое $N \geqslant c'$ представляется в форме (1) при $r < G(\varphi_n)$. Символом $g(\varphi_n)$ обозначим наименьшее r с условием, что всякое целое $N \geqslant 1$ представляется в форме (1). Нетрудно доказать, что

$$G(\varphi_n) \geqslant n.$$

Нами доказано [см. [1]], что

$$G(\varphi_n) < 4n \ln n + 8n \ln \ln n,$$

а также, что

$$n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] \leqslant g(\varphi_n) < \frac{1}{2} n^2 \ln n + 6n \ln n.$$

В настоящей работе доказывается, что

$$g(\varphi_n) < 6n \ln n + 9n \ln \ln n.$$

§ 1

Уточним оценки некоторых тригонометрических сумм. Введем обозначения: n — целое $\geqslant 2$, $\nu = \frac{1}{n}$, p — простое, s — целое > 0,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

— многочлен степени n с целыми коэффициентами. В случае, если q — целое > 0, $(a_1, a_2, \ldots, a_n, q) = 1$, полагаем

$$S(q, f(x)) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{f(x)}{q}}. \tag{2}$$

Мы говорим, что многочлен $f(x)$ имеет степень m по модулю p, если

$$(a_i, p) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = m, \\ p & \text{при } i > m, \end{cases}$$

и пользуемся обозначением

$$m = \text{ст}\, f(x) \pmod p.$$

Буквою l_0 будем обозначать число различных корней сравнения

$$f'(x) \equiv 0 \pmod p), \tag{3}$$

буквою τ — наибольшую из кратностей корней этого сравнения. При $x > 1$ положим

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p,$$

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

Мы будем пользоваться неравенствами, установленными Чебышевым:

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta(x) > Ax - \frac{12}{5} Ax^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8 \ln 6} \ln^2 x - \frac{15}{4} \ln x - 3, \\ &\vartheta(x) < \frac{6}{5} x - Ax^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4 \ln 6} \ln^2 x + \frac{5}{2} \ln x + 2 \\ &\qquad (A = 0,92129\ldots), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$0,92 \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1,11 \frac{x}{\ln x}. \tag{5}$$

Морделл ([2]) установил, что

$$|S(p, f(x))| < n^{\frac{1}{2}} p^{1-\nu}.$$

Для составного q оценку сумм (2) дал Хуа Ло-Кен ([3]). Он доказал, что

$$|S(p^s, f(x))| < n^{2n} p^{s(1-\nu)} \tag{6}$$

и что при любом q

$$S(q, f(x)) \ll q^{1-\nu+\varepsilon},$$

где ε — произвольно малое положительное число. В 1948 г. А. Вейль дал оценку тригонометрических сумм весьма общего вида. В частности, он установил, что

$$|S(p, f(x))| < np^{\frac{1}{2}} \,{}^{*}. \tag{7}$$

Эта оценка дает возможность существенно улучшить оценки Хуа Ло-Кена. Так, оказывается, что при любом целом q

$$S(q, f(x)) \ll q^{1-\nu}.$$

ЛЕММА 1. *Пусть $s \geqslant 2$, $p > n$, $n_0 = \text{ст} f(x) \pmod p$, $n_0 \geqslant 1$. Тогда имеем:*

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant l_0 p \left| \sum_{x=1}^{p^{s-2}} e^{2\pi i \frac{p^\mu f(x)}{p^s}} \right|,$$

где $f(x)$ — многочлен степени n с целыми коэффициентами, μ — неотрицательное целое, удовлетворяющее условиям:

$$l_0 + \mu \leqslant n_0 + 1, \quad 2 \leqslant \mu \leqslant n_0, \quad \mu \leqslant \tau + 1, \quad 1 \leqslant n_1 \leqslant \mu,$$
$$n_1 = \text{ст} f_1(x) \pmod p.$$

Замечание. При $l_0 \leqslant 1$ имеет место равенство.

Доказательство. Имеем:

$$S(p^s, f(x)) = \sum_{y=1}^{p^{s-1}} \sum_{z=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(y+zp^{s-1})}{p^s}} =$$
$$= \sum_{y=1}^{p^{s-1}} e^{2\pi i \frac{f(y)}{p^s}} \sum_{z=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f'(y)}{p} z}.$$

Мы можем предполагать, что $l_0 \geqslant 1$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l_0}$ — различные корни сравнения (3), $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{l_0}$ — соответственно кратности этих корней. Тогда имеем $(\tau = \max(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{l_0}))$:

$$\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_{l_0} \leqslant n_0 - 1; \quad l_0 + \tau \leqslant n_0.$$

Далее, находим, что

$$S(p^s, f(x)) = p \sum_{i=1}^{l_0} \sum_{x=1}^{p^{s-2}} e^{2\pi i \frac{f(\lambda_i + px)}{p^s}}.$$

Обозначим через λ тот из корней сравнения (3), для которого модуль внутренней суммы имеет наибольшее значение. Через μ обозначим целое с условием, что

$$f_1(x) = \frac{f(\lambda + px) - f(\lambda)}{p^\mu} \tag{8}$$

---

* Указанное соотношение есть следствие неравенства [см. (4)]

$$\left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}} \chi(x) \right| < (n-1)p^{\frac{1}{2}},$$

где χ — любой характер модуля p.

есть многочлен с целыми коэффициентами, не все из которых делятся на p. Тогда

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant l_0 p \left| \sum_{x=1}^{p^{s-2}} e^{2\pi i \frac{p^\mu f_1(x)}{p^s}} \right|.$$

Из условия (8) получаем:

$$p^\mu f_1(x) = pf'(\lambda)x + p^2 \frac{f''(\lambda)}{2!} x^2 + \cdots + p^n \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} x^n. \tag{9}$$

Легко видеть, что $\mu \geqslant 2$. Далее, так как при $i > n_0$

$$f^{(i)}(\lambda) \equiv 0 \pmod p,$$

то $\mu \leqslant n_0$. Пусть $n_1 = \text{ст} f_1(x) \pmod p$. Нетрудно заметить, что $1 \leqslant n_1 \leqslant \mu$. Мы имеем:

$$f'(\lambda) \equiv 0 \pmod p,\ f''(\lambda) \equiv 0 \pmod p,\ \ldots,\ f^{(\mu-1)}(\lambda) \equiv 0 \pmod p,$$

поэтому $\tau \geqslant \mu - 1$, откуда $l_0 + \mu \leqslant n_0 + 1$, что доказывает утверждение.

ЛЕММА 2. *Пусть* $s \geqslant 2$, $p > n$, $n_0 = \text{ст} f_1(x) \pmod p$, $n_0 \geqslant 1$. *Тогда существуют такие неотрицательные целые числа* $l_1, l_2, \ldots, l_{r-1}$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, *удовлетворяющие неравенствам:*

$$l_0 + \mu_1 \leqslant n_0 + 1,$$
$$l_1 + \mu_2 \leqslant \mu_1 + 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_{r-1} + \mu_r \leqslant \mu_{r-1} + 1;$$
$$2 \leqslant \mu_r \leqslant \mu_{r-1} \leqslant \cdots \leqslant \mu_1 \leqslant n_0 \leqslant n; \quad \mu_1 \leqslant \tau + 1,$$

что для них

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant l_0 l_1 \ldots l_{r+1} \rho p^{s-r-\theta},$$

где

а) $\rho = 1$, $\theta = 0$, *если* $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{r-1} + 1 < s \leqslant \mu_1 + \cdots + \mu_r$; $\mu_0 = 0$;

б) $\rho = \mu_r$, $\theta = \frac{1}{2}$, *если* $s = \mu_1 + \cdots + \mu_r + 1$.

Доказательство. В силу леммы 1,

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant l_0 p \left| \sum_{x+1}^{p^{s-2}} e^{2\pi i \frac{p^{\mu_1} f_1(x)}{p^s}} \right|,$$

где $f_1(x)$ — многочлен степени n с целыми коэффициентами, μ_1 — неотрицательное целое, удовлетворяющее условиям:

$$l_0 + \mu_1 \leqslant n_0 + 1, \quad 2 \leqslant \mu_1 \leqslant n_0,$$
$$\mu_1 \leqslant \tau + 1, \quad 1 \leqslant n_1 \leqslant \mu_1,$$
$$n_1 = \text{ст} f_1(x) \pmod p.$$

Если $s > \mu_1 + 1$, то применяем лемму 1 снова. Продолжая так дальше, мы, наконец, получим:

$$|S(p^s, f(x)| \leqslant l_0 l_1 \ldots l_{r-1} p^{\mu_1+\cdots+\mu_{r-1}-r+2} \left| \sum_{x=1}^{p^{s_{r-1}-2}} e^{2\pi i \frac{\mu_r f_r(x)}{p^{s_{r-1}}}} \right|,$$

где $f_r(x)$ — многочлен степени n с целыми коэффициентами,

$$s_{r-1} = s - \mu_1 - \ldots - \mu_{r-1} \geqslant 2$$

и либо $s_{r-1} \leqslant \mu_r$, либо $s_{r-1} = \mu_r + 1$, а для неотрицательных чисел $l_1, \ldots, l_{r-1}, \mu_1, \ldots, \mu_r$ выполняются неравенства:

$$l_0 + \mu_1 \leqslant n_0 + 1,$$

$$l_1 + \mu_2 \leqslant \mu_1 + 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l_{r-1} + \mu_r \leqslant \mu_{r-1} + 1;$$

$$2 \leqslant \mu_r \leqslant \mu_{r-1} \leqslant \cdots \leqslant \mu_1 \leqslant n_1 \leqslant n, \quad \mu_1 \leqslant \tau + 1;$$

$$1 \leqslant n_r \leqslant \mu_r, \quad n_r = \text{ст}\, f_r(x) \pmod p.$$

Если $s_{r-1} \leqslant \mu_r$, то

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant l_0 l_1 \ldots l_{r-1} p^{s-r}.$$

Если же $s_{r-1} = \mu_r + 1$, то

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant l_0 l_1 \ldots l_{r-1} \mu_r p^{s-r-\frac{1}{2}}.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $s \geqslant 1$, $p > n$, $n_0 = \text{ст}\, f(x) \pmod p$, $n_0 \geqslant 1$, $\tau \leqslant 1$. *Тогда*

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant 2np^{\frac{s}{2}}. \tag{10}$$

В самом деле, пусть $s \geqslant 2$. Тогда $\mu_r = \mu_{r-1} = \ldots = \mu_1 = 2$, $l_i \leqslant 1$ для $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Поэтому

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant \begin{cases} l_0 p^{s-r} \leqslant np^{\frac{s}{2}}, & \text{если } s = 2r, \\ l_0 \mu_r p^{s-r-\frac{1}{2}} \leqslant 2np^{\frac{s}{2}}, & \text{если } s = 2r+1. \end{cases}$$

Если же $s = 1$, то справедливость утверждения следует непосредственно из неравенства (7).

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $s \geqslant 1$, $n \geqslant 12$, $n_0 = \text{ст}\, f(x) \pmod p$, $n_0 \geqslant 1, \tau \leqslant 1$. *Тогда*

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant c_1 p^{s(1-\nu)},$$

где

$$c_1 \leqslant \begin{cases} n^{\frac{7}{12}}, & \text{если } p < n^{2,4}, \\ 1, & \text{если } p \geqslant n^{2,4}. \end{cases}$$

В самом деле, в силу (7),

$$|S(p, f(x))| \leqslant np^{-\frac{n-2}{2n}} p^{1-\nu}.$$

Если же $s \geqslant 2$, то, в силу (10), имеем:

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant 2np^{-\frac{n-2}{n}} p^{s(1-\nu)}.$$

Но

$$2np^{-\frac{n-2}{n}} < np^{-\frac{n-2}{2n}} \leqslant \begin{cases} n^{\frac{7}{12}}, & \text{если } p < n^{2,4}, \\ 1, & \text{если } p \geqslant n^{2,4}. \end{cases}$$

ЛЕММА 3. *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r$ — неотрицательные целые, удовлетворяющие условиям:*

$$\begin{gathered} x_1 + y_1 \leqslant n + 1, \\ x_2 + y_2 \leqslant y_1 + 1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_r + y_r \leqslant y_{r-1} + 1. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда

$$x_1 x_2 \ldots x_r y_r \leqslant 2^{n-1}.$$

Доказательство. Так как при целом a

$$a \leqslant 2^{a-1},$$

то

$$x_1 x_2 \ldots x_r y_r \leqslant 2^{x_1+x_2+\cdots+x_r+y_r-r-1},$$

откуда, в силу (11), следует наше утверждение.

ЛЕММА 4. *Пусть $s \geqslant 1, n \geqslant 12, \quad n_0 = \text{ст} f(x) \pmod p, n_0 \geqslant 1$. Тогда*

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant c_1 p^{s(1-\nu)},$$

где

$$c_1 \leqslant \begin{cases} 2^{n-1}, & \textit{если } n < p < 2^n, \\ 1, & \textit{если } p \geqslant 2^n. \end{cases}$$

Доказательство. а) $s \geqslant 2$. Мы будем пользоваться обозначениями леммы 2. В силу лемм 2 и 3, при $p > n$

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant 2^{n-1} p^{s-r-\theta}.$$

Нетрудно проверить, что $s\nu - r - \theta \leqslant 0$. Поэтому

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant 2^{n-1} p^{s(1-\nu)}.$$

Пусть $p \geqslant 2^n$. Покажем, что

$$l_0 l_1 \ldots l_{r-1} \rho p^{s\nu-r-\theta} \leqslant 1.$$

Возможны два случая.

1) $s \leqslant \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r, \qquad \theta = 0, \quad \rho = 1,$

2) $s = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r + 1, \quad \theta = \frac{1}{2}, \quad \rho = \mu_r.$

Если $s \leqslant \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r$, то

$$l_0 l_1 \dots l_{r-1} p^{s\nu - r} \leqslant 2^{n-\mu_r+s-r\nu} \leqslant 1.$$

Если же $s = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r + 1$, то

$$l_0 l_1 \dots l_{r-1} \mu_r p^{s-r-\frac{1}{2}} \leqslant n 2^{n-\mu_r+s-rn-\frac{n}{2}} < 1.$$

Поэтому при $p \geqslant 2^n$

$$|S(p^s, f(x))| \leqslant p^{s(1-\nu)}.$$

б) $s = 1$. В силу (7), имеем:

$$|S(p, f(x))| < np^{\frac{1}{2}}.$$

Но

$$np^{-\frac{1}{2}+\nu} < \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если } p > n, \\ 1, & \text{если } p \geqslant 2^n. \end{cases}$$

Таким образом, лемма доказана полностью.

ЛЕММА 5. *Пусть* $x > 100$. *Тогда* $0{,}7x < \vartheta(x) < 1{,}11\,x$.

Доказательство. Легко проверить, что из неравенств (4) вытекает справедливость соотношений:

$$1)\ \vartheta(x) < 1{,}11\,x \text{ при } x \geqslant 100,$$

$$2)\ \vartheta(x) > 0{,}7\,x \text{ при } x \geqslant 700.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\vartheta(100) > 83, \quad \vartheta(193) > 178, \quad \vartheta(409) > 292,$$

$$\vartheta(113) > 107, \quad \vartheta(251) > 232, \quad \vartheta(523) > 374,$$

$$\vartheta(151) > 136, \quad \vartheta(331) > 292, \quad \vartheta(691) > 484.$$

Отсюда следует, что неравенство $\vartheta(x) > 0{,}7\,x$ выполняется и на интервале (100, 700).

ЛЕММА 6. *Число различных простых сомножителей, входящих в каноническое разложение целого* $N > e^{100}$, *не превосходит*

$$1{,}6\,\frac{\ln N}{\ln\ln N - \ln 1{,}6}.$$

Доказательство. Пусть $p_1 p_2 \dots p_t \leqslant N < p_1 p_2 \dots p_t p_{t+1}$, где $p_1 = 2$, $p_2, \dots$ — простые числа, занумерованные в порядке следования. Очевидно, что число различных простых сомножителей, входящих в каноническое разложение целого N, не превосходит t. Так как $\vartheta(101) = 88{,}3 < 100$, то $p_t > 100$. Имеем:

$$p_1 p_2 \dots p_t p_{t+1} < (p_1 p_2 \dots p_t)^{\frac{4}{3}},$$

откуда следует, что

$$\frac{3}{4} \ln N < \theta(p_t) < \ln N.$$

В силу (5), $t < 1{,}11 \frac{p_t}{\ln p_t}$. Поэтому, применяя лемму 5, получим

$$t < 1, \quad \frac{\ln N}{\ln \ln N - \ln 1{,}6}.$$

ЛЕММА 7. *Коэффициенты многочлена*

$$\varphi(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

удовлетворяют неравенству

$$0 \leqslant a_i \leqslant \frac{n!}{i!\,(n-1)!}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Коэффициенты многочлена $(x+i)(x+n-i-1)$ не превосходят соответствующих коэффициентов многочлена $\left(x+\frac{1}{2}(n-1)\right)^2$. Отсюда следует, что коэффициенты многочлена $\varphi(x)$ не превосходят соответствующих коэффициентов многочлена $\left(x+\frac{n-1}{2}\right)^n$, что доказывает лемму.

ЛЕММА 8. *Результант D первой и второй производной многочлена $\varphi(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ удовлетворяет неравенству*

$$0 < |D| < n^{2n^2}.$$

Доказательство. В самом деле, все корни многочлена $\varphi(x)$ действительны и различны. Отсюда следует, что производная многочлена $\varphi(x)$ не имеет кратных корней. Поэтому $|D| > 0$. В силу леммы 7, коэффициенты многочленов $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$ не превосходят n^n. Оценивая тривиально абсолютную величину определителя D, получим:

$$|D| \leqslant (2n-3)!\ (n^n)^{2n-3} < (2n)^{2n}\, n^{2n^2-3n} < n^{2n^2}.$$

ЛЕММА 9. *Пусть* $\varphi(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$. *Тогда число простых, для которых сравнение*

$$\varphi'(x) \equiv 0 \pmod p$$

имеет кратные корни, не превосходит $1{,}6n^2$.

Доказательство. В самом деле, число различных простых делителей результанта многочленов $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$, в силу лемм 6 и 8, не превосходит

$$1{,}6\,\frac{2n^2 \ln n}{2\ln n + \ln\ln n + \ln 2 - \ln 1{,}6} < 1{,}6n^2.$$

ЛЕММА 10. *Пусть* q — *целое* >0, $n \geqslant 12$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n, q) = 1$, $(a, q) = 1$,

$$S_{a,q} = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q} f(x)}.$$

Тогда имеем:

$$|S_{a,q}| \leqslant e^{2^{n+1}} q^{1-\nu}.$$

Если $f(x) = \varphi(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$, *то*

$$|S_{a,q}| \leqslant e^{2n^2} q^{1-\nu}.$$

Доказательство. а) Известно [см., например, лемму 3.2 работы ([1])], что

$$S_{a,q}=\prod_p S_{a',p^s},\quad q=\prod_p p^s,$$

где p пробегает различные простые делители q, a' — целое, взаимно простое с p. Отсюда следует, что

$$S_{a,q}=\prod{}' S_{a',p^s}\prod{}'' S_{a',p^s}\prod{}''' S_{a',p^s},$$

где произведение Π' распространяется на все простые делители q, не превосходящие n, произведение Π'' распространяется на все простые делители целого q с условием $n<p<2^n$ и произведение Π''' распространяется на все простые делители q с условием $p>2^n$. В силу (6) и леммы 4, имеем:

$$\prod{}'|S_{a',p^s}|\leqslant\prod{}' n^{2n}p^{s(1-\nu)}\leqslant n^{2n\pi(n)}\prod{}' p^{s(1-\nu)},$$

$$\prod{}''|S_{a',p^s}|\leqslant 2^{(n-1)\pi(2^n)}\prod{}'' p^{s(1-\nu)},$$

$$\prod{}'''|S_{a',p^s}|\leqslant\prod{}''' p^{s(1-\nu)}.$$

Поэтому, ввиду (5),

$$|S_{a,q}|\leqslant n^{2n\pi(n)}2^{(n-1)\pi(2^n)}q^{1-\nu}\leqslant e^{2^{n+1}}q^{1-\nu}.$$

б) Пусть $f(x)=\varphi(x)=x(x+1)\cdots(x+n-1)$. В силу леммы 9 и следствия 2 из леммы 2,

$$\prod{}''|S_{a',p^s}|\leqslant 2^{1,6n^3 n^{\frac{7}{12}}\pi(n^2,4)}\prod{}'' p^{s(1-\nu)}.$$

Поэтому

$$|S_{a,q}|<e^{2n^3}q^{1-\nu}.$$

§ 2

В этом параграфе мы установим оценку для $g(\varphi)$. Введем следующие обозначения: N — целое >0, r и k — целые,

$$r\geqslant 2n+1,\quad k>1,\quad n\geqslant 12,\quad M=n!N,\quad P=[M^\nu],$$

$$P_1=[0,25P],\ P_2=[0,5P_1^{1-\nu}],\ \ldots,\ P_k=[0,5P_{k-1}].$$

Полагаем

$$u=\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi_2)+\cdots+\varphi(\xi_k),$$

где ξ_i пробегает значения:

$$\xi_i=P_i,\ P_i+1,\ \ldots,\ 2P_i-1.$$

Число чисел u обозначим через V. Легко видеть, что $V=P_1P_2\ldots P_k$. Пусть u_1 пробегает те же значения, что и u. Полагаем

$$M_0=M-u-u_1,\quad N_0=\frac{M_0}{n!}.$$

Обозначим через $I(N)$ число представлений целого $M = n!N$ в форме

$$M = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \cdots + \varphi(x_r) + u + u_1. \qquad (12)$$

Пусть $\tau = P^{\frac{n}{1+\nu}}$. Тогда имеем:

$$I(N) = \int\limits_{-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} L_\alpha^r U_\alpha^2 e^{-2\pi i\alpha M} d\alpha,$$

где

$$L_\alpha = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha\varphi(x)},$$

$$U_\alpha = \sum_u e^{2\pi i\alpha u}.$$

Интервал интегрирования $(-\tau^{-1},\ 1-\tau^{-1})$ разобьем на основные и дополнительные интервалы. Основными назовем интервалы, включающие все α с условиями

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad (a,\ q) = 1, \quad -\frac{1}{q\tau} \leqslant z \leqslant \frac{1}{q\tau},$$

$$0 < q \leqslant P^{1-\nu}, \quad 0 \leqslant a < q.$$

Интервалы, остающиеся после выделения из интервала $-\tau^{-1} \leqslant \alpha \leqslant 1-\tau^{-1}$ основных интервалов, назовем дополнительными.

Соответственно этому разбиению интеграл $I(N)$ представится суммой двух слагаемых:

$$I(N) = I_1(N) + I_2(N).$$

Полагаем, далее, при $(a,\ q) = 1,\ q > 0$

$$S_{a,q} = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i\frac{a}{q}\varphi(x)}.$$

Заставляя a пробегать приведенную систему вычетов по модулю q, полагаем

$$A(q) = A(q,\ N,\ r) = q^{-r} \sum_a S_{a,q}^r e^{-2\pi i\frac{a}{q}M}.$$

Пусть, далее,

$$\mathfrak{S}(N,\ r) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q,\ N,\ r),$$

$$\psi(p) = \psi(p,\ N,\ r) = \sum_{s=0}^{\infty} A(p^s,\ N,\ r),$$

$$T_r = \frac{\Gamma(1+\nu)^r}{\Gamma(r\nu)} (n!)^{r\nu-1}.$$

В главе 8 работы ([1]) было доказано следующее утверждение.

Пусть для положительных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ при всяком целом $N \geqslant c$ выполняются неравенства:

$$0 < \frac{1}{\mathfrak{S}(N_0, r)} < \alpha_1, \qquad 0 < \frac{1}{T_r} < \alpha_2,$$

$$\left| I_1(N) - T_r \sum_{N_0} N_0^{r\nu-1} \mathfrak{S}(N_0, r) \right| < \alpha_3 N^{r\nu-1-0,5\nu^2(1-\nu)},$$

$$|I_2(N)| < \alpha_4 V^2 N^{r\nu-1-\delta},$$

где $0 < \delta \leqslant 0,5\nu^2(1-\nu)$,

$$\sum_{N_0} N_0^{r\nu-1} > \frac{1}{\alpha_5} V N^{r\nu-1}.$$

Тогда при $n \geqslant 12$ имеем

$$g(\varphi) \leqslant \max(n \ln \ln c + 3n + 2,2k + r), \tag{13}$$

если

$$c \geqslant [\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3 + \alpha_4) \alpha_5]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Положим

$$r = 2n + 1, \quad k = \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \frac{18n^3 \ln n}{r}\right] + 1.$$

Имеем:

$$2k + r < 4n \ln n + 2n \ln \ln n + 6,4n < 4n \ln n + 9n \ln \ln n.$$

Оценим постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.

ЛЕММА 1. *Имеем*: $\ln \alpha_1 < 3n^4$.

Доказательство. В силу леммы 3.8 работы ([1]),

$$\mathfrak{S}(N, r) = \prod_p \psi(p, N, r),$$

где p пробегает все простые числа. Поэтому

$$\frac{1}{\mathfrak{S}(N, r)} = \prod{}' \frac{1}{\psi(p)} \prod{}'' \frac{1}{\psi(p)} \prod{}''' \frac{1}{\psi(p)},$$

где произведение Π' распространяется на все простые, не превосходящие $n^{2,4}$, произведение Π'' распространяется на все простые из интервала $(n^{2,4}, 2^n)$, для которых сравнение $\varphi'(x) = 0 \pmod p$ имеет кратные корни, и произведение Π''' распространяется на все остальные простые числа. Как в лемме 3.9 работы ([1]), находим, что

$$\psi(p, N, r) \geqslant p^{-(\theta+\beta)(r-1)}.$$

Рассуждая, как в лемме 8.4 работы ([1]), получим:

$$-1) \sum_{p \leqslant n^{2,4}} (\theta + \beta) \ln p \leqslant (r-1) \left(\sum_{p \leqslant n^{2,4}} \ln p + \ln 2 + n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p-1} \right) <$$

$$< 2n(1,2n^{2,4} + \ln 2 + n^2) < 0,7n^4.$$

В силу лемм 4 и 9, имеем:

$$\prod{}'' \frac{1}{\psi(p)} \leqslant 2^{n\cdot 2n\cdot 1{,}6n^3} = 2^{3{,}2n^4}.$$

При $p \geqslant n^{2,4}$

$$|\psi(p, N, r) - 1| \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} p^{s(1-r\nu)} = \frac{p^{-1-\nu}}{1-p^{-1-\nu}} < p^{-1-0{,}5\nu},$$

ибо

$$\frac{1}{1-p^{1-\nu}} < e^{2p^{-1-\nu}} < p^{0{,}5\nu}.$$

Поэтому

$$\psi(p, N, r) \geqslant 1 - p^{-1-0{,}5\nu}$$

и

$$\prod{}''' \frac{1}{\psi(p)} \leqslant \prod_{p>n^{2,4}} \frac{1}{1-p^{-1-0{,}5\nu}} \leqslant \sum_{x \geqslant n^{2,4}} x^{-1-0{,}5\nu} < \int_{n^2}^{\infty} x^{-1-0{,}5\nu}\,dx < 2n.$$

Собирая полученные оценки, найдем:

$$\frac{1}{\mathfrak{S}(N, r)} < e^{0{,}7n^4} 2^{3{,}2n^4} < e^{3n^5}.$$

ЛЕММА 2. *Имеем*: $\alpha_2 < 1$.

Доказательство. В самом деле,

$$\frac{1}{T_r} = \frac{\Gamma(r\nu)}{\Gamma(1+\nu)^r (n!)^{r\nu-1}} = \frac{\Gamma(2+\nu)}{\Gamma(1+\nu)^r (n!)^{1+\nu}} < 2\cdot 0{,}88^{-2n-1} e^n n^{-n} < 1.$$

ЛЕММА 3. *Пусть* $N > n^{20n^4}$. *Тогда*

$$\left| I_1(N) - T_r \sum_{N_0} N_0^{r\nu-1} \mathfrak{S}(N_0, r) \right| < \alpha_3,$$

где $\alpha_3 < e^{5n^4}$.

Доказательство. Пользуясь обозначениями работы (1), покажем, что:

а) $c_{14} < (6n)^{n^2+n}$. В самом деле, если $M > (6n)^{n^2+n}$, то $P > (6n)^{n+1}$, а тогда, как в лемме 8.6 работы (1), имеет место:

$$2P^{1-\nu} < \tau, \quad \varphi'(P) \leqslant \frac{1}{2}\tau.$$

б) $c_{20} \leqslant n!\, n^{20n^4}$. Прежде всего,

$$2c_{14} < n!\, n^{20n^4}.$$

Далее, при $M > n!\, n^{20n^4}$ имеем

$$P > n^{20n^3}.$$

Как в лемме 8.6 работы (1), получим:

$$P_k > 2^{-2n} P^{(1-\nu)^{k-1}}.$$

Но

$$(1-\nu)^{k-1} > (9n^2 \ln n)^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(1-\nu)} > (9n^2 \ln n)^{-1-\nu^2} > (10n^2 \ln n)^{-1}.$$

Поэтому

$$P_k > 2^{-2n} n^{20n^3 \cdot \frac{1}{10n^3 \ln n}} = 2^{-2n} n^{\frac{2n}{\ln n}} = 2^{-2n} e^{2n} > n^2,$$

а отсюда, как в лемме 8.6 работы (¹), мы получим, что

$$c_{20} \leqslant n!\, n^{20n^4}.$$

в) В силу леммы 10, мы вправе положить

$$c_2 = e^{2n^3}.$$

г) Как в лемме 8.6 работы (¹), получаем:

$$c_{15} < 2^{3r} n^{nr} c_2^{r-1} = 2^{6n+3} n^{2n^2+n} c_2^{r-1} < c_2^r.$$

Далее, имеем:

$$c_{16} < (2^{2r} + 1)\, c_2^r,$$

$$c_{17} < (6c_{16} + 2^r c_2^r) < (6 \cdot 2^{2r} + 6 + 2^r)\, c_2^r,$$

$$c_{18} < \left(5c_{17} + 3n \frac{\Gamma(1+\nu)^r}{\Gamma(r\nu)} c_2^r\right)(n!)^{r\nu} <$$

$$< (30 \cdot 2^{2r} + 20 + 5 \cdot 2^r + 3n) \cdot n^r c_2^r < (8nc_2)^r < e^{5n^4}.$$

ЛЕММА 4. *Имеем:*

$$|I_2(N)| < e^{3n^3} V N^{r\nu - 1 - \delta_1},$$

где

$$\delta_1 \geqslant \frac{r}{6n^3 \ln 12n^3}.$$

Доказательство. В силу неравенства (13) гл. 7 работы (¹),

$$|I_2(N)| < (8n)^{\frac{1}{2} nr \ln 12n^2} 2^{2kn+2} (n!)^{2+\nu} N^{r\nu-1-\delta_1},$$

где

$$\delta_1 \geqslant \frac{r}{6n^3 \ln 12n^3},$$

что устанавливаем, как в лемме 8.7 работы (¹).

Имеем далее:

$$(8n)^{\frac{1}{2} nr \ln 12n^2} 2^{2kn+2} (n!)^{2+\nu} <$$

$$< (8n)^{\frac{1}{2} n(2n+1) \ln 12n^2} 2^{2n^2 \ln 9n^2 \ln n} e^{(2n+1)\ln n} < e^{3n^3}.$$

ЛЕММА 5. *Имеем:* $\alpha_5 < 4$.

Доказательство. В самом деле, рассуждая, как в главе 7 работы (¹), получим

$$\sum_{N_0} N_0^{r\nu-1} > 2^{-r\nu+1} \cdot V^2 N^{r\nu-1};$$

но

$$2^{r\nu-1} = 2^{1+\nu} < 4.$$

Из доказанных лемм следует, что

$$\ln \alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5 < \ln e^{3n^4}(e^{5n^4}+e^{3n^4})\,4 < 8n^4+\ln 5.$$

Пусть $0{,}5\nu^2(1-\nu)\leqslant\delta_1$, тогда

$$\ln c \leqslant \frac{2n^2}{1-\nu}\ln \alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5 < 21n^6 < 72n^6\ln 12n^2.$$

Если

$$\delta_1=\frac{r}{6n^3\ln 12n^2}<0{,}5\nu^2(1-\nu),$$

то

$$\ln c \leqslant \frac{6n^3\ln 12n^2}{r}\ln \alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)\sigma_5 < 24n^6\ln 12n^2 < 72n^6\ln n.$$

Поэтому имеем

$$H(c,\ n) < 6n\ln n + n\ln 72 + n\ln\ln n + 3n + 2 <$$

$$< 6n\ln n + 7{,}28n + n\ln\ln n < 6n\ln n + 9n\ln\ln n,$$

откуда, в силу (13), следует, что

$$g(\varphi_n) < 6n\ln n\left(1+\frac{3}{2}\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right).$$

Поступило
18. III. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Нечаев В. И., Проблема Варинга для многочленов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 190—243.
[2] Mordell L. I., On a sum analogous to a Gauss's sum, Quart. J. Math., Oxford series, 3 (1932), 161—167.
[3] Хуа Ло-Кен, Аддитивная теория чисел, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, т. XXII, 1947.
[4] Weyl A., On some exponential sums, Proc. Nat. Ac. Sci. Washington, v. 34, No. 5 (1948), 204—207.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953) 499—512

С. Б. СТЕЧКИН

О ТЕОРЕМЕ КОЛМОГОРОВА-СЕЛИВЕРСТОВА

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе даются новые формулировки и устанавливаются локальные аналоги теоремы Колмогорова-Селиверстова.

Введение

Как хорошо известно, А. Н. Колмогоров и Г. А. Селиверстов [(3), (4); см. также (1), § 10.32] доказали такую теорему:

Пусть $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ *и*

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

— ряд Фурье функции $f(x)$. *Если*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \rho_n^2 \ln n < \infty, \tag{I}$$

где $\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$, *то ряд* $\mathfrak{S}[f]$ *сходится почти всюду.*

А. И. Плеснер (6) установил, что условие (I) выполняется в том и только том случае, если

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^2}{t}\, dt\, dx < \infty. \tag{II}$$

Нетрудно указать еще несколько условий, равносильных (I) или (II). Обозначим через $\omega^{(2)}(\delta, f)$ квадратический модуль непрерывности функции $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, через $\omega_2^{(2)}(\delta, f)$ — ее квадратический модуль гладкости и через $R_n^{(2)}(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — квадратические приближения функции $f(x)$ ее суммами Фурье. Иными словами, предполагая, что функция $f(x)$ продолжена периодически на всю числовую прямую, положим

$$\omega^{(2)}(\delta, f) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \|\Delta_h f(x)\| = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_2^{(2)}(\delta, f) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \|\Delta_h^2 f(x)\| = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

и

$$R_n^{(2)}(f) = \| f(x) - s_{n-1}(x) \| = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} | f(x) - s_{n-1}(x) |^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

В § 1 настоящей работы показывается, что для функций $f(x)$, принадлежащих классу $L^2[-\pi, \pi]$, условия (I) и (II) равносильны каждому из следующих условий:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{R_n^{(2)}(f)\}^2 < \infty, \tag{III}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \omega_2^{(2)} \left(\frac{1}{n}, f \right) \right\}^2 < \infty, \tag{IV}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \omega^{(2)} \left(\frac{1}{n}, f \right) \right\}^2 < \infty. \tag{V}$$

Таким образом, в формулировке теоремы Колмогорова-Селиверстова условие (I) можно заменить любым из условий (II), (III), (IV) или (V). Соответствующий вариант теоремы Колмогорова-Селиверстова мы будем в дальнейшем называть теоремой Колмогорова-Селиверстова в форме (I), (II), ..., (V).

Как условия, так и заключение теоремы Колмогорова-Селиверстова, носят интегральный характер, т. е. относятся ко всему периоду $[-\pi, \pi]$. Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить локальные аналоги этой теоремы, относящиеся к произвольному отрезку $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$. Ясно, что эту задачу имеет смысл рассматривать для теоремы Колмогорова-Селиверстова в любой из форм (I) — (V). Мы рассмотрим ее здесь для форм (III), (IV) и (V).

Пусть $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$. Положим, аналогично предыдущему,

$$\omega^{(2)}(\delta, f; a, b) = \sup_{0 < h \leq \delta} \| \Delta_h f(x) \|_{[a, b]} = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_a^b | f(x+h) - f(x-h) |^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_2^{(2)}(\delta, f; a, b) = \sup_{0 < h \leq \delta} \| \Delta_h^2 f(x) \|_{[a, b]} =$$

$$= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_a^b | f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h) |^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

и

$$R_n^{(2)}(f; a, b) = \left\{ \int_a^b | f(x) - s_{n-1}(x) |^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В этих обозначениях наши основные результаты состоят в том, что если $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$, $f(x) \in L[-\pi, \pi]$ и для любого отрезка $[a', b'] \subset \subset [a, b]$* $f(x) \in L^2 [a', b']$ и выполняется одно из условий

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)\right\}^2 < \infty, \tag{1}$$

или

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)\right\}^2 < \infty, \tag{2}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{R_n^{(2)}(f; a', b')\}^2 < \infty, \tag{3}$$

то ряд Фурье $\mathfrak{S}[f]$ сходится почти всюду на $[a, b]$. Эти утверждения доказываются в § 2 и 3 методами теории приближения функций.

Мы пишем ряды в соотношениях (1) и (2) в форме $\sum\limits_{n=N}^{\infty}$, а не $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$, так как для некоторого числа начальных значений n выражения $\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)$ и $\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)$ могут обращаться в бесконечность, что, понятно, не влияет на сходимость ряда $\mathfrak{S}[f]$.

Полагая $[a, b] = [-\pi, \pi]$, мы получаем прямое обобщение теоремы Колмогорова-Селиверстова. Дальнейшее обобщение напрашивается само собой. Пусть G — область меры 2π, расположенная на отрезке $[-\pi, \pi]$, и (a_i, b_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ — интервалы, составляющие эту область. Допустим, что для любого номера i и для любого отрезка $[a'_i, b'_i] \subset (a_i, b_i)$ сходится ряд

$$\sum_{n=N_i}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a'_i b'_i\right)\right\}^2.$$

Тогда ряд $\mathfrak{S}[f]$ сходится почти всюду. Это видоизменение теоремы Колмогорова-Селиверстова позволяет устанавливать сходимость почти всюду рядов Фурье таких функций $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, особенности которых, вызывающие расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)\right\}^2,$$

сосредоточены на замкнутом множестве F меры 0.

В заключение укажем, что после того как настоящая работа была выполнена и доложена на семинаре по теории функций в МГУ, П. Л. Ульянов получил локальные аналоги теоремы Колмогорова-Селиверстова в формах (I) и (II)**.

* Здесь и в дальнейшем запись $[a', b'] \subset\subset [a, b]$ означает, что отрезок $[a', b']$ лежит целиком внутри отрезка $[a, b]$, т. е. $a < a' < b' < b$.

** Работа П. Л. Ульянова напечатана в этом же номере журнала.

§ 1

Здесь будет установлена эквивалентность всех данных во введении формулировок теоремы Колмогорова-Селиверстова. Начнем с доказательства одной леммы о квадратических модулях непрерывности.

ЛЕММА 1. *Пусть* $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$. *Тогда*

$$\left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)\right\}^2 \leqslant \frac{8}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \{R_k^{(2)}(f)\}^2 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_h f(x)|^2 dx = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \sin^2 kh = 4\pi \left\{\sum_{k=1}^{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi \left\{h^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 \rho_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_k^2\right\}.$$

Отсюда

$$\left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)\right\}^2 = \sup_{0<h\leqslant \frac{1}{n}} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_h f(x)|^2 dx \leqslant 4\pi \left\{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \rho_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_k^2\right\} =$$

$$= \frac{4\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \sum_{m=k}^{\infty} \rho_m^2 \leqslant \frac{8\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{m=k}^{\infty} \rho_m^2.$$

Но, по равенству Парсеваля,

$$\{R_k^{(2)}(f)\}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_{k-1}(x)|^2 dx = \pi \sum_{m=k}^{\infty} \rho_m^2.$$

Поэтому окончательно

$$\left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)\right\}^2 \leqslant \frac{8}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \{R_k^{(2)}(f)\}^2 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

и лемма 1 доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$. *Тогда ряды*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \rho_n^2 \ln n, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{R_n^{(2)}(f)\}^2, \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)\right\}^2, \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)\right\}^2 \tag{8}$$

и интеграл

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|^2}{t}\,dt\,dx \tag{9}$$

сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Одновременная сходимость и расходимость ряда (5) и интеграла (9) установлена Плеснером [см. (6)].

Так как

$$\ln n \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

то ряд (5) сходится и расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\rho_n^2.$$

Меняя порядок суммирования, что законно в силу неотрицательности членов ряда, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\rho_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=k}^{\infty}\rho_n^2 = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\{R_k^{(2)}(f)\}^2.$$

Итак, ряды (5) и (6) сходятся и расходятся одновременно.

Далее, согласно неравенству Джексона для пространства L^2 в форме Зигмунда (2), имеем:

$$R_n^{(2)}(f) \leqslant C_1\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{10}$$

где C_1 — абсолютная константа. Кроме того, очевидно,

$$\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqslant 2\,\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Отсюда вытекает, что сходимость ряда (8) влечет сходимость ряда (7), а сходимость ряда (7) влечет сходимость ряда (6). Остается показать, что сходимость ряда (6) влечет сходимость ряда (8). Для этого воспользуемся леммой 1. Получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)\right\}^2 \leqslant 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\,\{R_k^{(2)}(f)\}^2 =$$

$$= 8\sum_{k=1}^{\infty} k\,\{R_k^{(2)}(f)\}^2 \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^3} \leqslant C_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\{R_k^{(2)}(f)\}^2,$$

и теорема полностью доказана.

Из этой теоремы непосредственно вытекает эквивалентность всех пяти перечисленных во введении формулировок теоремы Колмогорова-Селиверстова.

Отметим, что так как

$$\omega^{(2)}(\delta, f) \leqslant C_3\omega(\delta, f),$$

где $\omega(\delta, f)$ — обыкновенный модуль непрерывности функции $f(x)$, то имеем такое следствие из теоремы Колмогорова-Селиверстова в форме (V).

Следствие. *Если периодическая функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\right\}^2 < \infty,$$

то ее ряд Фурье $\mathfrak{S}[f]$ сходится почти всюду.

Аналогичное предложение было установлено также Марцинкевичем [см. ([5])].

§ 2

В этом и следующем параграфах устанавливаются локальные аналоги теоремы Колмогорова-Селиверстова. Нам будет нужна одна лемма, относящаяся к задаче распространения функций.

ЛЕММА 2. *Пусть* $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$, $f(x) \in L^2[a, b]$ *и* $[a_1, b_1] \subset [a, b]$. *Тогда существует функция* $f_1(x) \in L^2[\pi, \pi]$, *обладающая следующими свойствами*:

1) $f_1(x) = f(x)$ *для* $x \in [a_1, b_1]$,

2) $\omega_2^{(2)}(\delta, f_1) \leqslant \omega_2^{(2)}(\delta, f; a + 2\delta, b - 2\delta) + O(\delta)$

для $0 < \delta \leqslant \delta_0 = \min\left\{\frac{a_1 - a}{4}, \frac{b - b_1}{4}\right\}$.

Доказательство. Пусть

$$\alpha = \frac{a + a_1}{2}, \quad \beta = \frac{b + b_1}{2},$$

так что $a < \alpha < a_1 < b_1 < \beta < b$. Построим для $x \in [-\pi, \pi]$ непрерывную функцию $\varphi(x)$, положив $\varphi(x) = 1$ для $x \in [a_1, b_1]$, $\varphi(x) = 0$ вне (α, β) и определив $\varphi(x)$ как линейную функцию на каждом из отрезков $[\alpha, a_1]$ и $[b_1, \beta]$. Ясно, что при таком определении функции $\varphi(x)$

$$\max_x |\Delta_h \varphi(x)| \leqslant Kh \quad (h > 0), \tag{11}$$

где

$$K = \max\left\{\frac{4}{a_1 - a}, \frac{4}{b - b_1}\right\} = \frac{1}{\delta_0}.$$

Далее, положим

$$f_1(x) = f(x)\varphi(x) \text{ для } x \in [\alpha, \beta]$$

и

$$f_1(x) = 0 \text{ вне } [\alpha, \beta].$$

Так как, согласно построению, $\varphi(x) = 1$ для $x \in [a_1, b_1]$, то

$$f_1(x) = f(x) \text{ для } x \in [a_1, b_1].$$

Остается оценить квадратический модуль гладкости $\omega_2^{(2)}(\delta, f_1)$. Имеем:

$$\Delta_h^2 f_1(x) = \Delta_h^2 f(x)\,\varphi(x) = f(x+2h)\varphi(x+2h) - 2f(x)\,\varphi(x) + f(x-2h)\,\varphi(x-2h) =$$
$$= \varphi(x)\,\Delta_h^2 f(x) + f(x+2h)\,\Delta_h\varphi(x+h) + f(x-2h)\,\Delta_h\varphi(x-h),$$

считая, что если в некоторой точке x $\varphi(x) = 0$, то и $\varphi(x)\,f(y) = 0$. Отсюда

$$\|\Delta_h^2 f_1(x)\| \leqslant \|\varphi(x)\,\Delta_h^2 f(x)\| + \|f(x+2h)\,\Delta_h\varphi(x+h)\| +$$
$$+ \|f(x-2h)\,\Delta_h\varphi(x-h)\|. \tag{12}$$

Оценим каждое из выражений в правой части этого неравенства. Имеем:

$$\|\varphi(x)\,\Delta_h^2 f(x)\| = \|\varphi(x)\,\Delta_h^2 f(x)\|_{[\alpha,\beta]} =$$
$$= \left\{\int_\alpha^\beta |\varphi(x)\,\Delta_h^2 f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{\int_\alpha^\beta |\Delta_h^2 f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда для $0 < h \leqslant \delta$, $a + 2\delta \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant b - 2\delta$, т. е., в силу определения чисел α и β, для $0 < h \leqslant \delta \leqslant \delta_0$ имеем:

$$\|\varphi(x)\,\Delta_h^2 f(x)\| \leqslant \left\{\int_{a+2\delta}^{b-2\delta} |\Delta_h^2 f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \omega_2^{(2)}(\delta, f;\ a+2\delta,\ b-2\delta). \tag{13}$$

Далее, при тех же условиях на h, используя (11), выводим, что

$$\|f(x+2h)\,\Delta_h\varphi(x+h)\| = \|f(x+h)\,\Delta_h\varphi(x+h)\|_{[\alpha-2h,\,\beta]} \leqslant$$
$$\leqslant \max_x |\Delta_h\varphi(x+h)|\,\|f(x+h)\|_{[\alpha-2h,\,\beta]} \leqslant Kh\left\{\int_{\alpha-h}^{\beta+h} |f(u)|^2\,du\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant Kh\left\{\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant K\delta\left\{\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

и аналогично

$$\|f(x-2h)\,\Delta_h\varphi(x-h)\| \leqslant K\delta\left\{\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Сопоставляя неравенства (12) — (15), получаем окончательно:

$$\|\Delta_h^2 f_1(x)\| \leqslant \omega_2^{(2)}(\delta, f;\ a+2\delta,\ b-2\delta) + 2K\delta\left\{\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (0 < h \leqslant \delta \leqslant \delta_0)$$

и

$$\omega_2^{(2)}(\delta, f_1) \leqslant \omega_2^{(2)}(\delta, f;\ a+2\delta,\ b-2\delta) + 2K\delta\left\{\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \omega_2^{(2)}(\delta, f;\ a+2\delta,\ b-2\delta) + O(\delta) \quad (0 < \delta \leqslant \delta_0).$$

Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$ *и* $f(x) \in L[-\pi, \pi]$. *Если для любого отрезка* $[a', b'] \subset [a, b]$ $f(x) \in L^2[a', b']$ *и*

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)\right\}^2 < \infty, \tag{16}$$

то ряд $\mathfrak{S}[f]$ *сходится почти всюду на* $[a, b]$.

Доказательство. Достаточно установить, что, каков бы ни был отрезок $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, ряд $\mathfrak{S}[f]$ сходится почти всюду на $[a_1, b_1]$. Пусть

$$[a_1, b_1] \subset [a', b'] \subset [a, b].$$

Построим для пары отрезков $[a_1, b_1] \subset [a', b']$ функцию $f_1(x)$, удовлетворяющую всем условиям леммы 2. Так как

$$\omega_2^{(2)}(\delta, f_1) \leqslant \omega_2^{(2)}(\delta, f; a' + 2\delta, b' - 2\delta) + O(\delta) \quad (\delta \leqslant \delta_0),$$

то тем более для достаточно малых δ

$$\omega_2^{(2)}(\delta, f_1) \leqslant \omega_2^{(2)}(\delta, f; a', b') + O(\delta),$$

откуда

$$\left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f_1\right)\right\}^2 \leqslant 2\left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)\right\}^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \geqslant N_1).$$

Отсюда, в силу (16), вытекает, что для $N_2 = \max\{N, N_1\}$

$$\sum_{n=N_2}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f_1\right)\right\}^2 \leqslant 2\sum_{n=N_2}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)\right\}^2 + O\left(\sum_{n=N_2}^{\infty} \frac{1}{n^3}\right) < \infty.$$

Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f_1\right)\right\}^2$$

сходится. Отсюда по теореме Колмогорова-Селиверстова в форме (IV) следует, что ряд $\mathfrak{S}[f_1]$ сходится почти всюду на $[a_1, b_1]$. Наконец, так как $f_1(x) = f(x)$ на отрезке $[a_1, b_1]$, то, в силу принципа локализации для рядов Фурье [см. ([1]), § 2.51], ряд $\mathfrak{S}[f]$ сходится почти всюду на любом отрезке $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, а значит, и почти всюду на $[a_1, b_1]$.

Теорема 2 доказана.

Очевидно, что если $[a'', b''] \subset [a', b'] \subseteq [-\pi, \pi]$ и $0 < \delta \leqslant \delta_0(a', b', a'', b'')$, то

$$\omega_2^{(2)}(\delta, f; a'', b'') \leqslant 2\omega^{(2)}(\delta, f; a', b').$$

Поэтому из теоремы 2 вытекает такое

Следствие. *Пусть* $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$ *и* $f(x) \in L[-\pi, \pi]$. *Если для любого отрезка* $[a', b'] \subset [a, b]$ $f(x) \in L^2[a', b']$ *и*

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a', b'\right)\right\}^2 < \infty, \tag{17}$$

то ряд $\mathfrak{S}[f]$ *сходится почти всюду на* $[a, b]$.

Отметим, что на самом деле условия (16) и (17) эквивалентны. Уже показано, что (17) влечет (16). Покажем, что и, обратно, (16) влечет (17). В ходе доказательства теоремы 2 мы установили, что для любого отрезка $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ найдется функция $f_1(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, совпадающая с функцией $f(x)$ для $x \in [a_1, b_1]$ и такая, что для нее

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f_1\right)\right\}^2 < \infty.$$

Пользуясь теоремой 1, выводим отсюда, что для этой функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f_1\right)\right\}^2 < \infty. \tag{18}$$

Но так как функции $f(x)$ и $f_1(x)$ совпадают на $[a_1, b_1]$, то для любого отрезка $[a'', b''] \subset [a, b]$ и всех достаточно малых δ

$$\omega^{(2)}(\delta, f; a'', b'') = \omega^{(2)}(\delta, f_1; a'', b'') \leqslant \omega^{(2)}(\delta, f_1).$$

Отсюда и из (18) вытекает, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a'', b''\right)\right\}^2 < \infty,$$

что эквивалентно (17).

§ 3

Переходим к локализации теоремы Колмогорова-Селиверстова в форме (III). Нам потребуется одна лемма, представляющая собою локальный аналог леммы 1.

ЛЕММА 3. *Пусть тригонометрический ряд*

$$\mathfrak{T}(x) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$$

сходится на отрезке $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$ *в смысле* $L^2[a, b]$, *т. е. существует функция* $f(x) \in L^2[a, b]$, *для которой*

$$R_n^{(2)}(f; a, b) = \left\{\int_a^b |f(x) - s_{n-1}(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Тогда для любого натурального $n \geqslant \frac{4}{b-a}$

$$\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a + \frac{2}{n}, b - \frac{2}{n}\right) \leqslant 8\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k R_k^{(2)}(f; a, b) + R_n^{(2)}(f; a, b)\right\}.$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta_h^2 s_{n-1}(x) = -4\sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) \sin^2 kh.$$

Положим для $x \in [a, b]$

$$r_n(x) = f(x) - s_{n-1}(x).$$

Тогда

$$A_k(x) = r_k(x) - r_{k+1}(x)$$

и

$$\Delta_h^2 s_{n-1}(x) = -4 \sum_{k=1}^{n-1} \{r_k(x) - r_{k+1}(x)\} \sin^2 kh =$$

$$= -4 \sum_{k=1}^{n-1} \{\sin^2 kh - \sin^2 (k-1) h\} r_k(x) + 4 \sin^2 (n-1) h \cdot r_n(x) =$$

$$= -4 \sin h \sum_{k=1}^{n-1} \sin (2k-1) h \cdot r_k(x) + 4 \sin^2 (n-1) h \cdot r_n(x).$$

Отсюда

$$|\Delta_h^2 s_{n-1}(x)| \leqslant 4h^2 \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) |r_k(x)| + 4(n-1)^2 h^2 |r_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 8h^2 \sum_{k=1}^{n-1} k |r_k(x)| + 4n^2h^2 |r_n(x)|,$$

$$\| \Delta_h^2 s_{n-1}(x) \|_{[a, b]} \leqslant 8h^2 \sum_{k=1}^{n-1} k \| r_k(x) \|_{[a, b]} + 4n^2h^2 \| r_n(x) \|_{[a, b]} =$$

$$= 8h^2 \sum_{k=1}^{n-1} k R_k^{(2)}(f; a, b) + 4n^2h^2 R_n^{(2)}(f; a, b)$$

и

$$\omega_2^{(2)}(\delta, s_{n-1}; a, b) \leqslant 8\delta^2 \sum_{k=1}^{n-1} k R_k^{(2)}(f; a, b) + 4\delta^2 n^2 R_n^{(2)}(f; a, b). \qquad (19)$$

Далее, пусть

$$0 < h \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{b-a}{4}.$$

Имеем:

$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h^2 s_{n-1}(x) + \Delta_h^2 \{f(x) - s_{n-1}(x)\}.$$

Отсюда

$$\| \Delta_h^2 f(x) \|_{\left[a+\frac{2}{n},\, b-\frac{2}{n}\right]} \leqslant \| \Delta_h^2 s_{n-1}(x) \|_{[a, b]} + 4 \| f(x) - s_{n-1}(x) \|_{[a, b]} \leqslant$$

$$\leqslant \omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, s_{n-1}; a, b\right) + 4R_n^{(2)}(f; a, b).$$

Пользуясь оценкой (19) для $\delta = \frac{1}{n}$, получаем окончательно:

$$\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a + \frac{2}{n}, b - \frac{2}{n}\right) \leqslant \frac{8}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} kR_k^{(2)}(f; a, b) + 4R_n^{(2)}(f; a, b) +$$

$$+ 4R_n^{(2)}(f; a, b) = 8\left\{\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} kR_k^{(2)}(f; a, b) + R_n^{(2)}(f; a, b)\right\}.$$

Лемма 3 доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$ *и* $f(x) \in L[-\pi, \pi]$. *Если для любого отрезка* $[a', b'] \subset [a, b]$ $f(x) \in L^2[a', b']$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{R_n^{(2)}(f; a', b')\}^2 < \infty, \tag{20}$$

то ряд $\mathfrak{S}[f]$ *сходится почти всюду на* $[a, b]$.

Доказательство. В силу теоремы 2, достаточно показать, что для любого отрезка $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ сходится ряд

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a_1, b_1\right)\right\}^2 \quad (N \geqslant N_3). \tag{16}$$

Построим отрезки

$$[a_1, b_1] \subset [a', b'] \subset [a, b]$$

и воспользуемся леммой 3, в силу которой для всех $n \geqslant N_3$

$$\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a_1, b_1\right) \leqslant \omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a' + \frac{2}{n}, b' - \frac{2}{n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 8\left\{\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} kR_k^{(2)}(f; a', b') + R_n^{(2)}(f; a', b')\right\}.$$

Преобразуем правую часть этого неравенства. Имеем:

$$\left\{\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} kR_k + R_n\right\}^2 \leqslant 2\left\{\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} kR_k\right\}^2 + 2R_n^2.$$

Далее, по неравенству Коши,

$$\left\{\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} kR_k\right\}^2 \leqslant \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} R_k^2 \leqslant \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^{n-1} R_k^2.$$

Отсюда для $n \geqslant N_3$

$$\left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a_1, b_1\right)\right\}^2 \leqslant 64\left\{\frac{2}{3n} \sum_{k=1}^{n-1} [R_k^{(2)}(f; a', b')]^2 + 2[R_n^{(2)}(f; a', b')]^2\right\} =$$

$$= 128\left\{\frac{1}{3n} \sum_{k=1}^{n-1} [R_k^{(2)}(f; a', b')]^2 + [R_n^{(2)}(f; a', b')]^2\right\}.$$

Применяя это неравенство, получаем

$$\sum_{n=N_8}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{ \omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f; a_1, b_1\right)\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 128 \sum_{n=N_8}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n-1}[R_k^{(2)}(f; a', b')]^2 + [R_n^{(2)}(f; a', b')]^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 128 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n-1}[R_k^{(2)}(f; a', b')]^2 + [R_n^{(2)}(f; a', b')]^2\right\} =$$

$$= 128\left\{\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[R_k^{(2)}(f; a', b')]^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[R_n^{(2)}(f; a', b')]^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 128\left\{\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[R_k^{(2)}(f; a', b')]^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[R_n^{(2)}(f; a', b')]^2\right\} =$$

$$= \frac{512}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{R_n^{(2)}(f; a', b')\}^2.$$

Этим установлена сходимость ряда (16), и теорема 3 доказана.

Итак, мы показали, что выполнение условия (20) влечет выполнение условия (16). Возникает вопрос, будут ли на самом деле эти условия эквивалентны? Установим это, предполагая, что $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$. Нам потребуется следующая лемма, доказанная Харди и Литтльвудом [7]:

ЛЕММА 4. *Пусть* $k \geqslant p > 1$. *Тогда*

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|s_n(x) - f(x)|^k\right\}^{\frac{1}{k}} \leqslant K(p, k)\left\{\int_0^{\pi}\frac{|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)|^p}{t}dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Полагая в этой лемме $k = p = 2$, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|s_n(x) - f(x)|^2 \leqslant K_1\int_0^{\pi}\frac{|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)|^2}{t}dt. \qquad (21)$$

Проинтегрируем это неравенство по x в пределах от a' до b'. Находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{R_{n+1}^{(2)}(f; a', b')\}^2 \leqslant K_1\int_0^{\pi}\int_{a'}^{b'}|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)|^2 dx\frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant K_1\int_0^{\pi}\left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{t}{2}, f; a', b'\right)\right\}^2\frac{dt}{t} = K_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\omega_2^{(2)}(u, f; a', b')\}^2\frac{du}{u} \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{4(\nu+1)}}^{\frac{\pi}{4\nu}} \{\omega_2^{(2)}(u, f; a', b')\}^2 \frac{du}{u} + K_1 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \{\omega_2^{(2)}(u, f; a', b')\}^2 \frac{du}{u} \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left\{\omega_2^{(2)}\left(\frac{\pi}{4\nu}, f; a', b'\right)\right\}^2 + K_2 \|f\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left\{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{\nu}, f; a', b'\right)\right\}^2 + K_2 \|f\|^2.$$

Таким образом, выполнение условия (16) влечет сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{R_{n+1}^{(2)}(f; a', b')\}^2,$$

а следовательно, и выполнение условия (20).

Сопоставляя это замечание с тем, что говорилось в конце § 2, мы приходим к тому заключению, что для функций $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ условия (16), (17) и (20) эквивалентны.

В заключение заметим, что, кроме локальных квадратических приближений суммами Фурье $R_n^{(2)}(f; a, b)$, можно было бы ввести локальные наилучшие квадратические приближения

$$E_n^{(2)}(f; a, b) = \inf_{t_{n-1}} \left\{\int\limits_a^b |f(x) - t_{n-1}(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $t_{n-1}(x)$ — произвольный тригонометрический полином порядка $n-1$. Естественно ожидать, что условие (20) теоремы 3 можно заменить условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{E_n^{(2)}(f; a', b')\}^2 < \infty; \tag{22}$$

однако для доказательства этого факта нужен локальный аналог неравенства С. Н. Бернштейна для метрики L^2, который пока что не установлен *.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
23. X. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.
[2] Zygmund A., Smooth functions, Duke Math. Journ., 12 (1945), 47—76.
[3] Колмогоров А. Н. и Селиверстов Г. А., Sur la convergence des séries de Fourier, Comptes Rendus Acad. Sci., 178 (1924), 303—306.

* К настоящему времени такого рода неравенства уже установлены. См. Н. К. Бари, Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова, Доклады Ак. наук СССР, XC (1953), 701—702. (*Примечание при корректуре.*)

[4] Колмогоров А. Н. и Селиверстов Г. А., Sur la convergence des séries de Fourier, Atti Acad. naz. Lincei, 3 (1926), 307—310.
[5] Marcinkiewicz J., On the convergence of Fourier series, Journ. Lond. Math. Soc., 10 (1935), 264—268.
[6] Плеснер А. И., Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, Journ. für reine und angew. Math., 155 (1926), 15—25.
[7] Hardy G. H. and Littlewood J. E., Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series, Duke Math. Journ., 2 (1936), 354—382.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

17 (1953), 513—524

П. Л. УЛЬЯНОВ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МАРЦИНКЕВИЧА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе дается некоторый критерий сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a, b] \subset [0,2\pi]$, соответствующий обобщению теоремы Марцинкевича на случай любого отрезка. В частном случае, соответствующем обобщению теоремы Колмогорова-Селиверстова, устанавливается другая эквивалентная формулировка теоремы.

Введение

В работе Марцинкевича [1] доказана теорема: *если* $f(x) \in L^p(0,2\pi)$, *где* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *и*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(x+t)-f(x-t)|^p}{t}\,dt\,dx < \infty, \tag{1}$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ *сходится почти всюду на отрезке* $[0,2\pi]$.

При $p = 1$, по теореме Фубини [см. [2], стр. 296], эта теорема Марцинкевича сводится для почти всех $x \in [0, 2\pi]$ к признаку Дини [см. [6], § 2.4] сходимости ряда Фурье функции $f(x)$. Если же $p = 2$, то условие теоремы Марцинкевича, по теореме Плеснера [3], эквивалентно условию

$$\sum_{k=2}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\ln k < \infty, \tag{2}$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, т. е. в этом случае теорема Марцинкевича эквивалентна теореме Колмогорова-Селиверстова [4] [см. [6], § 10.3] и Плеснера.

С. Б. Стечкин в работе [8] рассматривает обобщение теоремы Колмогорова-Селиверстова на случай любого отрезка $[a, b] \subset [0,2\pi]$. При этом его формулировки теорем выражаются в терминах квадратичных модулей непрерывности или же через проинтегрированные (на соответствующих интервалах) квадраты разности функции $f(x)$ и ее частных сумм Фурье, а доказательство проводится методами теории приближения функций.

В настоящей работе даются некоторые другие критерии сходимости ряда Фурье на $[a, b] \subset [0,2\pi]$, соответствующие обобщению теоремы

Марцинкевича (а значит, и теоремы Колмогорова-Селиверстова) на случай $[a, b] \subset [0, 2\pi]$, доказательства же проводятся обычными методами теории функций действительного переменного.

В § 1 устанавливается

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $f(x) \in L(0, 2\pi)$, $f(x) \in L^p(a', b')$ *для любого* $[a', b'] \sqsubset [a, b] \subset [0, 2\pi]$ *, *где* $1 \leqslant p \leqslant 2$. *Если для любого* $\varepsilon > 0 \left(\varepsilon < \frac{b-a}{4}\right)$

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^p}{t} \, dt \, dx < A(\varepsilon) < \infty, \tag{3}$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ *сходится почти всюду на* $[a, b]$.

В § 2 рассматривается теорема 1 при $p = 2$ и доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $f(x) \in L(0, 2\pi)$, $f(x) \in L^2(a', b')$ *для любого* $[a', b'] \sqsubset [a, b] \subset (0, 2\pi]$. *Тогда выполнение условия*

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t} \, dt \, dt < A(\varepsilon) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0 \tag{4}$$

эквивалентно выполнению условия

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \left(\int_{a''}^{b''} (f(x) \cos kx \, dx \right)^2 + \left(\int_{a''}^{b''} f(x) \sin kx \, dx \right)^2 \right\} \ln k < \infty \tag{5}$$

для почти всех точек $P(a'', b'')$, *принадлежащих квадрату* $[a \leqslant a'' \leqslant b, a \leqslant b'' \leqslant b]$.

§ 1

В этом параграфе доказывается теорема 1 и некоторые следствия из нее.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\delta < \min\left\{\frac{b-a-2\varepsilon}{4}, \varepsilon\right\}$ есть некоторое положительное число. Положим $a + \varepsilon = a_1$, $b - \varepsilon = b_1$ и определим функцию $\varphi(x)$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in [a_1 + \delta, \ b_1 - \delta], \\ 0 \text{ при } x \in \left[0, \ a_1 + \frac{\delta}{2}\right] + \left[b_1 - \frac{\delta}{2}, \ 2\pi\right], \end{cases}$$

а в отрезках $\left[a_1 + \frac{\delta}{2}, \ a_1 + \delta\right]$ и $\left[b_1 - \delta, \ b_1 - \frac{\delta}{2}\right]$ определим ее линейным образом так, чтобы $\varphi(x)$ была непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$. Вне отрезка $[0, 2\pi]$ продолжаем функцию $\varphi(x)$ периодически. Легко убедиться, что функция $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}\, 1$, т. е.

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant k |x_2 - x_1| \quad \left(k = \frac{2}{\delta}\right).$$

* Запись $[a', b] \sqsubset [a, b]$ означает, что отрезок $[a', b']$ принадлежит отрезку $[a, b]$ и $a' \neq a$, $b' \neq b$.

Определим функцию $F(x) = f(x)\varphi(x)$ и положим $F(x) = 0$ при $\varphi(x) = 0$. Очевидно, что $F(x) \in L^p(0, 2\pi)$. Заметим, что если $\eta > 0$ — любое число и $\psi(x) \in L^p(0, 2\pi)$, то всегда

$$\int_0^{2\pi}\int_\eta^{2\pi} \frac{|\psi(x+t) - \psi(x-t)|^p}{t}\, dt\, dx < \infty. \tag{6}$$

Покажем, что

$$I_0 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|F(x+t) - F(x-t)|^p}{t}\, dt\, dx < \infty. \tag{7}$$

В силу (6), достаточно показать, что

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{|F(x+t) - F(x-t)|^p}{t}\, dt\, dx < \infty.$$

Так как $F(x) = 0$ для $x \in \left[0,\ a_1 + \frac{\delta}{2}\right] + \left[b_1 - \frac{\delta}{2},\ 2\pi\right]$, то I можно представить в виде

$$I = \int_{a_1+\frac{\delta}{4}}^{a_1+2\delta}\int_0^{\frac{\delta}{4}} + \int_{a_1+2\delta}^{b_1-2\delta}\int_0^{\frac{\delta}{4}} + \int_{b_1-2\delta}^{b_1-\frac{\delta}{4}}\int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{|F(x+t) - F(x-t)|^p}{t}\, dt\, dx = \sum_{i=1}^{3} I_i, \tag{8}$$

где I_i означает двойной интеграл, стоящий на i-м месте в разложении I.

Оценим I_2. В силу условия теоремы 1 и выбора δ, имеем:

$$I_2 = \int_{a_1+2\delta}^{b_1-2\delta}\int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{|F(x+t) - F(x-t)|^p}{t}\, dt\, dx =$$

$$= \int_{a_1+2\delta}^{b_1-2\delta}\int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^p}{t}\, dt\, dx \leqslant I(\varepsilon) < \infty. \tag{9}$$

Остается оценить интегралы I_1 и I_3. Но, как будет видно из доказательства, оценки для интегралов I_1 и I_3 аналогичны. Рассмотрим, например, интеграл I_1.

$$I_1 = \int_{a_1+\frac{\delta}{4}}^{a_1+2\delta}\int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{|F(x+t) - F(x-t)|^p}{t}\, dt\, dx. \tag{10}$$

В силу того что $|\varphi(x)| \leqslant 1$ и $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}\,1$, имеем:

$$|F(x+t) - F(x-t)|^p = |f(x+t)\varphi(x+t) - f(x-t)\varphi(x-t)|^p =$$
$$= |f(x+t)\varphi(x+t) - f(x+t)\varphi(x-t) + f(x+t)\varphi(x-t) -$$
$$- f(x-t)\varphi(x-t)|^p \leqslant 2^p\{|f(x+t)(\varphi(x+t) - \varphi(x-t))|^p +$$
$$+ |\varphi(x-t)(f(x+t) - f(x-t)|^p\} \leqslant$$
$$\leqslant 2^p\left\{\left(\frac{2}{\delta}\right)^p 2^p t^p |f(x+t)|^p + |f(x+t) - f(x-t)|^p\right\}.$$

Следовательно, в силу условия $f(x) \in L^p(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$, условия (3) и выбора δ, имеем:

$$I_1 \leqslant \left(\frac{2^2}{\delta}\right) \int\limits_{a_1+\frac{\delta}{4}}^{a_1+2\delta} \int\limits_0^{\frac{\delta}{4}} t^{p-1} |f(x+t)|^p \, dt\, dx +$$

$$+ 2^p \int\limits_{a_1+\frac{\delta}{4}}^{a_1+2\delta} \int\limits_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|^p}{t} \, dt\, dx < \infty. \tag{11}$$

Объединяя (8), (9) и (11), получаем:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{|F(x+t)-F(x-t)|^p}{t} \, dt\, dx < \infty,$$

а тогда, по теореме Марцинкевича, ряд Фурье функции $F(x)$ сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Но для $x \in [a_1+\delta,\ b_1-\delta]$ имеем $F(x) = f(x)$. Следовательно, в силу принципа локализации Римана для ряда Фурье [см. ([6]), § 25], ряд Фурье функции $f(x)$ сходится почти всюду на отрезке $[a_1+\delta,\ b_1-\delta]$ или сходится почти всюду на $[a+2\varepsilon,\ b-2\varepsilon]$. Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число, то отсюда следует, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится почти всюду на $[a,\ b]$. Теорема 1 полностью доказана.

Следствие 1. *Производя замену переменного в интеграле* (3), *легко показать, что условие* (3) *эквивалентно каждому из следующих условий:*

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{|f(x+t)-f(x)|^p}{t} \, dt\, dx < B(\varepsilon) < \infty$$

или

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{|f(x-t)-f(x)|^p}{t} \, dt\, dx < C(\varepsilon) < \infty,$$

где $B(\varepsilon)$ *и* $C(\varepsilon)$ *конечны для каждого* $\varepsilon > 0$.

Следствие 2. *Если в теореме* 1 *принять* $p = 2$, *то получим обобщение теоремы Колмогорова-Селиверстова на случай* $[a,\ b] \subset [0, 2\pi]$.

Следствие 3. *Пусть* $f(x) \in L(0, 2\pi)$. *Если для почти всех точек* $x_0 \in [0, 2\pi]$ *найдутся некоторая окрестность* $[x_0 - \varepsilon_{x_0},\ x_0 + \varepsilon_{x_0}]$ *и функция* $\varphi(x) = \varphi_{x_0}(x) \in L(0, 2\pi)$ *такая, что* $\varphi(x) = f(x)$ *при* $x \in [x_0 - \varepsilon_{x_0},\ x_0 + \varepsilon_{x_0}]$, *и если для некоторого* $1 \leqslant p_{x_0} \leqslant 2$

$$\int\limits_{x_0-\varepsilon_{x_0}+\varepsilon}^{x_0+\varepsilon_{x_0}-\varepsilon} \int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{|\varphi(x+t)-\varphi(x-t)|^{p_{x_0}}}{t} \, dt\, dx < \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$, *то ряд Фурье функции* $f(x)$ *сходится почти всюду на* $[0, 2\pi]$.

Это непосредственно следует из теоремы 1.

§ 2

Исследуем более подробно теорему 1 при $p = 2$. Предварительно докажем две леммы, которые представляют некоторый самостоятельный интерес и понадобятся для доказательства теоремы 2.

ЛЕММА 1. *Если* $f(x) \in L(0, 2\pi)$, $f(x) \in L^2(a, b)$, *где* $[a, b] \subset [0, 2\pi]$, *то из условия*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \left(\int_a^b f(x) \cos kx\, dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin kx\, dx \right)^2 \right\} \ln k < \infty \tag{12}$$

следует сходимость ряда Фурье функции $f(x)$ *почти всюду на отрезке* (a, b), *а также выполнение условия*

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t}\, dt\, dx < C_1, \tag{13}$$

где C_1 *не зависит от* ε.

Доказательство. Пусть

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \,\overline{\in}\, [a, b] \end{cases}$$

и $a_k^{(1)}$, $b_k^{(1)}$ — коэффициенты Фурье функции $f_1(x)$. Тогда из условия (12) вытекает, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} \{(a_k^{(1)})^2 + (b_k^{(1)})^2\} \ln k < C < \infty, \tag{14}$$

и, по теореме Колмогорова-Селиверстова, ряд Фурье функции $f_1(x)$ сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ сходится почти всюду на $[a, b]$. По теореме же Плеснера, условие (14) эквивалентно условию

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f_1(x+t) - f_1(x-t)]^2}{t}\, dt\, dx < C_1 < \infty.$$

Отсюда имеем:

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t}\, dt\, dx =$$

$$= \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{[f_1(x+t) - f_1(x-t)]^2}{t}\, dt\, dx < C_1 < \infty,$$

т. е. имеет место неравенство (13), и лемма 1 полностью доказана.

Замечание. *Если* $f(x) \in L(0, 2\pi)$ *и* $f(x) \in L^2(a_n, b_n)$, *где* $a_n > a \geqslant 0$, $b_n < b < 2\pi$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *то из условия*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x) \cos kx\, dx \right)^2 + \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x) \sin kx\, dx \right)^2 \right\} \ln k < \infty$$

для любого $n = 0, 1, \ldots$

следует сходимость ряда Фурье функции $f(x)$ *почти всюду на отрезке* $[a, b]$, *а также выполнение условия*

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t}\, dt\, dx < \infty \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Построим для каждого n периодическую функцию $f_n(x)$ следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in [a_n, b_n], \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} [a_n, b_n]. \end{cases}$$

Очевидно, что для функции $f_n(x)$ выполнены условия леммы 1. Следовательно, ряд Фурье функции $f_n(x)$ (а значит, и ряд Фурье функции $f(x)$) сходится почти всюду на отрезке $[a_n, b_n]$ и

$$\int_{a_n+\varepsilon}^{b_n-\varepsilon} \int_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t}\, dt\, dx < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0.$$

Так как n — произвольное число, то получаем, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится почти всюду на отрезке $[a, b]$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_{a+2\varepsilon}^{b-2\varepsilon} \int_{0}^{\varepsilon} \frac{[f(x+t) - f(x-t)]^2}{t}\, dt\, dx < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что условия на функцию $f(x)$ в лемме 1 более ограничительны, чем в теореме 1 при $p = 2$, так как в теореме 1 может иметь место случай

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, A(\varepsilon) = \infty.$$

В самом деле, существует функция $f_1(x)$, удовлетворяющая условию теоремы 1 при $p = 2$ и не удовлетворяющая условию леммы 1. Именно, положим $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$ и пусть

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^{\frac{1}{2}} \left| \ln\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right|} & \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right), \\ 0 & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_1(x) \in L^2(0, 2\pi)$. Так как функция $f_1(x)$ имеет ограниченную первую производную на отрезке $\left[\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right]$, то при $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$ имеем:

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{[f_1(x+t) - f_1(x-t)]^2}{t} \, dt \, dx < A(\varepsilon) < \infty,$$

т. е. условия теоремы 1 выполнены. Если бы выполнялось условие леммы 1, то мы имели бы

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \left(\int_0^{2\pi} f_1(x) \cos kx \, dx \right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} f_1(x) \sin kx \, dx \right)^2 \right\} \ln k < \infty.$$

По теореме Плеснера это условие эквивалентно выполнению условия

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f_1(x+t) - f_1(x-t)]^2}{t} \, dt \, dx < \infty,$$

но этого не может быть, так как

$$I \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\varepsilon} \left(\int_0^{\varepsilon} \frac{f_1^2(x-t)}{t} \, dt \right) dx \geqslant \int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{t} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+t} f_1^2(x-t) \, dx =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{t} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+t} \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{4} + t - x\right) \ln^2\left(\frac{\pi}{4} + t - x\right)} \right) = \int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{t \, |\ln t|} = \infty.$$

Следовательно, $S = \infty$ и, тем самым, условия леммы 1 не выполнены.

ЛЕММА 2. *Пусть* $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$, *где* $p \geqslant 1$, *и*

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{при } x \in [a, b] \subset [0, 2\pi], \\ 0 & \textit{при } x \overline{\in} [a, b]. \end{cases}$$

Тогда выполнение условия

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x-t|^p}{t} \, dt \, dx < \infty \tag{15}$$

влечет выполнение условия

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f_1(x+t) - f_1(x-t)|^p}{t} \, dt \, dx < \infty \tag{16}$$

для почти всех точек $p(a, b)$, *принадлежащих квадрату* $[0 \leqslant a \leqslant 2\pi,$ $0 \leqslant b \leqslant 2\pi]$.

Доказательство. Пусть $F(x) = \int_0^x |f(t)|^p \, dt$ и a, b таковы, что $F(x)$ имеет конечные производные в точках a и b. Если мы покажем, что

функция $f_1(x)$, образованная для этих концов, удовлетворяет условию (16), то лемма 2 будет доказана, так как функция $F(x)$ имеет почти всюду на $[0, 2\pi]$ конечную производную. В силу (6), достаточно показать, что выполняется условие

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{|f_1(x+t)-f_1(x-t)|^p}{t}\,dt\,dx < \infty,$$

где $\varepsilon < \min\left\{(2\pi - b),\ a,\ \frac{b-a}{4}\right\}$ — произвольное положительное число. Так как $f_1(x) = 0$ при $x \in [0, a] + [b, 2\pi]$, то I можно представить в виде

$$I = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} + \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \frac{|f_1(x+t)-f_1(x-t)|^p}{t}\,dt\,dx = \sum_{i=1}^{3} I_i, \tag{17}$$

где I_i означает двойной интеграл, стоящий на i-м месте в разложении I. Оценим I_2. В силу (15), имеем:

$$I_2 = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \frac{|f_1(x+t)-f_1(x-t)|^p}{t}\,dt\,dx =$$

$$= \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|^p}{t}\,dt\,dx \leqslant I_0 < \infty. \tag{18}$$

Остается оценить I_1 и I_2. Так как их оценки аналогичны, то проведем оценку, например, для I_1. Интеграл I_1 можно представить в виде

$$I_1 = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \frac{|f_1(x+t)-f_1(x-t)|^p}{t}\,dt\,dx =$$

$$= \int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\left(\int_{a-\varepsilon}^{a-t} |f_1(x+t)-f_1(x-t)|^p\,dx\right) + \int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\left(\int_{a-t}^{a+t} |f_1(x+t)-f_1(x-t)|^p\,dx\right) +$$

$$+ \int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\left(\int_{a+t}^{a+\varepsilon} |f_1(x+t)-f_1(x-t)|^p\,dx\right) = \sum_{j=1}^{3} I_1^{(j)}, \tag{19}$$

где $I_1^{(j)}$ означает двойной интеграл, стоящий на j-м месте в разложении I_1. В силу построения функции $f_1(x)$ и выбора ε, для интеграла $I_1^{(1)}$ имеем:

$$I_1^{(1)} = \int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\left(\int_{a-\varepsilon}^{a-t} |f_1(x+t)-f_1(x-t)|^p\,dx\right) = 0. \tag{20}$$

Далее, в силу выбора ε и условия (15), для интеграла $I_1^{(3)}$ имеем:

$$I_1^{(3)} = \int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\left(\int_{a+t}^{a+\varepsilon} |f_1(x+t)-f_1(x-t)|^p\,dx\right) =$$

$$= \int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\left(\int_{a+t}^{a+\varepsilon} |f(x+t)-f(x-t)|^p\,dx\right) \leqslant I_0 < \infty. \tag{21}$$

Рассмотрим интеграл $I_1^{(2)}$. Так как $f_1(x)=0$ при $x\in[0, a]$, то

$$I_1^{(2)}=\int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\left(\int_{a-t}^{a+t}|f_1(x+t)-f_1(x-t)|^p\,dx\right)=$$

$$=\int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\int_{a-t}^{a+t}|f(x+t)|^p\,dx=2\int_0^{\varepsilon}dt\,\frac{1}{2t}\int_a^{a+2t}|f(x)|^p\,dx=$$

$$=2\int_0^{t_0}dt\,\frac{1}{2t}\int_a^{a+2t}|f(x)|^p\,dx+\int_{t_0}^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\int_a^{a+2t}|f(x)|^p\,dx<\infty, \tag{22}$$

где t_0 таково, что для всех $0<t\leqslant t_0$ выполняется условие

$$\left|\frac{1}{2t}\int_a^{a+2t}|f(x)|^p\,dx-F'(a)\right|<\eta,$$

где η может быть как угодно малой, в силу выбора точки a и величины t_0. Объединяя (20), (21), (22), (19), (18) и (17), получаем условие (16). Лемма 2 доказана.

Следствие. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$|f(x)|^p\,\overset{+}{\ln}|f(x)|\in L(0,2\pi).$$

Если

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(x+t)-f(x-t)|^p}{t}\,dt\,dx<\infty$$

и

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x) & \text{при } x\in[a, b]\subset(0,2\pi),\\ 0 & \text{при } x\,\overline{\in}\,[a, b],\end{cases}$$

то

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f_1(x+t)-f_1(x-t)|^p}{t}\,dt\,dx<\infty$$

для всех a и b, принадлежащих интервалу $(0,2\pi)$.

Доказательство. Анализируя доказательство леммы 2, замечаем, что для доказательства следствия достаточно показать, что

$$K=\int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\int_{a-t}^{a+t}|f(x+t)|^p\,dx<\infty$$

для любого $a\in(0,2\pi)$. Но K можно представить в виде

$$K=\int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\left(\int_0^{2t}|f(a+x)|^p\,dx\right).$$

Так как

$$|f(a+x)|^p\,\overset{+}{\ln}|f(a+x)|\in L(0,2\pi),$$

то, по теореме Харди-Литтльвуда ([5]) [см. также ([6]), § 10.22], интеграл $K<\infty$, что и требовалось доказать.

Замечание. *Если* $p=1$, *то из конечности интеграла*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}\,dt\,dx$$

следует, что функция $|f(x)|^p \overset{+}{\ln}|f(x)| \in L(0,2\pi)$, *т. е. в этом случае в силу только что доказанного следствия, утверждение леммы 2 верно для всех точек* a *и* b, *принадлежащих отрезку* $[0,2\pi]$.

Доказательство. Представим функцию $f(x)$ в виде разности двух неотрицательных функций:

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x),$$

где $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=0$ при $f(x)\geqslant 0$ и $f_1(x)=0$, $f_2(x)=-f(x)$ при $f(x)<0$. Очевидно, что

$$|f_i(x+t)-f_i(x-t)|\leqslant|f(x+t)-f(x-t)| \quad (i=1,2).$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f_i(x+t)-f_i(x-t)|}{t}\,dt\,dx\leqslant\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}\,dt\,dx<\infty \quad (i=1,\ 2)$$

и

$$\int_0^{2\pi}|\bar{f}_i(x)|\,dx\leqslant\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}\,dt\,dx<\infty \quad (i=1,\ 2),$$

где $\bar{f}_i(x)$ — сопряженная функция к функции $f_i(x)$, т. е. $\bar{f}_i(x)$ интегрируема. По теореме Рисса [см. (6), стр. 152], из интегрируемости функции $\bar{f}_i(x)$ следует, что функция $f_i(x)\overset{+}{\ln} f_i(x)$ интегрируема. Следовательно, $|f(x)|\overset{+}{\ln}|f(x)|$ — интегрируемая функция, что и требовалось доказать.

Теперь мы можем доказать теорему 2, которую сформулировали во введении. Покажем, что условие (5) влечет условие (4). В силу леммы 1, из условия (5) следует, что

$$\int_{a''+\varepsilon}^{b''-\varepsilon}\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{[f(x+t)-f(x-t)]^2}{t}\,dt\,dx<\infty.$$

Поэтому, если $a''-a<\varepsilon$, $b-b''<\varepsilon$, то

$$\int_{a+2\varepsilon}^{b-2\varepsilon}\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{[f(x+t)-f(x-t)]^2}{t}\,dt\,dx<\infty$$

для достаточно малых ε. Это и есть условие (4). Покажем, что условие (4) влечет условие (5). В силу теоремы 1 при $p=2$, для $\varepsilon>0$ существует функция $f_1(x)\in L^2(0,2\pi)$ такая, что $f_1(x)=f(x)$ при $x\in[a+2\varepsilon,\ b-2\varepsilon]$ и

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[f_1(x+t)-f_1(x-t)]^2}{t}\,dt\,dx<\infty.$$

Применяя к функции $f_1(x)$ лемму 2 при $p=2$, имеем:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[f_2(x+t)-f_2(x-t)]^2}{t}\,dt\,dx < \infty \tag{23}$$

для почти всех $P(a'', b'')$, принадлежащих квадрату $[a+2\varepsilon \leqslant a'' \leqslant b-2\varepsilon,$ $a+2\varepsilon \leqslant b'' \leqslant b-2\varepsilon]$, где

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{при } x \in [a'', b''], \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} [a'', b'']. \end{cases}$$

Пусть α_k и β_k — коэффициенты Фурье функции $f_2(x)$. Тогда, по теореме Плеснера, в силу (23), имеем:

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k^2+\beta_k^2)\ln k < \infty. \tag{24}$$

Но условие (24) можно еще записать так:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left(\int_{a''}^{b''} f(x)\cos kx dx\right)^2 + \left(\int_{a''}^{b''} f(x)\sin kx\,dx\right)^2\right\}\ln k < \infty, \tag{25}$$

а так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то условие (25) имеет место для почти всех $P(a'', b'')$, принадлежащих квадрату $[a \leqslant a'' \leqslant b,\ a \leqslant b'' \leqslant b]$. Теорема 2 доказана.

Замечание. Как указал мне С. Б. Стечкин, в формулировке теоремы 2 слова «для почти всех точек $P(a', b')$, принадлежащих квадрату $[a \leqslant a' \leqslant b,\ a \leqslant b' \leqslant b]$», можно заменить словами «для всех точек a' и b', принадлежащих интервалу (a, b)».

Доказательство. В силу следствия к лемме 2, достаточно показать, что условие

$$\sum_{k=2}^{\infty} \rho_k^2 \ln k < \infty \qquad (\rho_k^2 = a_k^2+b_k^2) \tag{*}$$

влечет за собой интегрируемость функции $f^2(x)\overset{+}{\ln}|f(x)|$, где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Сначала покажем, что из условия (*) следует

$$\sum_{k=2}^{\infty} \rho_k^2 \overset{+}{\ln}\frac{1}{\rho_k} < \infty.$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $\rho_k < e^{-1}$. Представим ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \rho_k^2 \ln\frac{1}{\rho_k}$$

в виде суммы двух рядов:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \rho_k^2 \ln\frac{1}{\rho_k} = \sum_{k=2}^{\infty}{}^{(1)} \rho_k^2 \ln\frac{1}{\rho_k} + \sum_{k=2}^{\infty}{}^{(2)} \rho_k^2 \ln\frac{1}{\rho_k},$$

где первая сумма берется по тем k, для которых $\rho_k \leqslant \frac{1}{k}$, и вторая сумма — по оставшимся k. В силу монотонного убывания функции $x^2 \ln \frac{1}{x}$ при $x \to 0$ и разбиения ряда, имеем:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \rho_k^2 \ln \frac{1}{\rho_k} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \rho_k^2 \ln k < \infty.$$

Но, принимая во внимание частный случай теоремы Мюльголланда [см. ([7]), стр. 288] и беря в формуле (8.142) работы ([7]) $q' = 2$, $k(t) = 1$, мы получим, что сходимость ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \rho_k^2 \overset{+}{\ln} \frac{1}{\rho_k}$$

влечет интегрируемость функции $f^2(x) \overset{+}{\ln} f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$, что и требовалось доказать.

Поступило
29.XII.1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Marcinkiewicz J., Sur une nouvelle condition pour la convergence presque partout des séries de Fourier, Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa, 8 (1939), 239—240.

[2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М.—Л., 1950.

[3] Плеснер А., Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, J. für reine und angew. Math., 155 (1926), 15—25.

[4] Колмогоров А. и Селиверстов Г., Sur la convergence des séries de Fourier, Atti della Reale Accademia nazionale dei Lincei, 3 (1926), 307—310.

[5] Hardy G. H. and Littlewood J. E., A maximal theorem with function-theoretic applications, Acta Math., 54 (1930), 81—116.

[6] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

[7] Mulholland H. P., Concerning the generalization of the Young-Hausdorff theorem and the Hardy-Littlewood theorems on Fourier constants, Proc. London math. Soc., 35 (1933), 257—293.

[8] Стечкин С. Б., О теореме Колмогорова-Селиверстова, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17(1953), 499—512.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 525–538

А. В. БИЦАДЗЕ

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Теория одномерных интегралов типа Коши играет важную роль при решении так называемых плоских задач математической физики [см.([10])]. В настоящей работе строится аппарат двумерных интегралов типа Коши и даются приложения этого аппарата к задачам теории ньютонова потенциала.

1°. **Интегральная формула Помпею для гладкого вектора.** Пусть D — трехмерная область, ограниченная поверхностью Ляпунова S, а

$$\vec{q}(x, y, z) = q_1(x, y, z)\vec{i} + q_2(x, y, z)\vec{j} + q_3(x, y, z)\vec{k}$$

— заданный в этой области вектор, компоненты которого имеют первые производные, непрерывные в этой области всюду вплоть до границы. Обозначим через $\rho(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$ расстояние между точками (ξ, η, ζ) и (x, y, z) и применим формулу Гаусса-Остроградского

$$\iint\limits_S \vec{p}\cdot\vec{n}\,d\omega = \iiint\limits_D \operatorname{div}\vec{p}\,d\tau$$

для векторов:

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\rho^3}\{[(\xi-x)q_1-(\eta-y)q_2-(\zeta-z)q_3]\vec{i}+[(\xi-x)q_2+(\eta-y)q_1]\vec{j} + \\ + [(\xi-x)q_3+(\zeta-z)q_1]\vec{k}\},$$

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\rho^3}\{[(\xi-x)q_2+(\eta-y)q_1]\vec{i}+[-(\xi-x)q_1+(\eta-y)q_2-(\zeta-z)q_3]\vec{j} + \\ + [(\eta-y)q_3+(\zeta-z)q_2]\vec{k}\},$$

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{\rho^3}\{[(\xi-x)q_3+(\zeta-z)q_1]\vec{i}+[(\eta-y)q_3+(\zeta-z)q_2]\vec{j} + \\ + [-(\xi-x)q_1-(\eta-y)q_2+(\zeta-z)q_3]\vec{k}\}.$$

Если полученные тождества перемножим соответственно на $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и сложим, то будем иметь:

$$\frac{1}{4\pi}\iint M(\xi,\eta,\zeta;\ x,y,z)\vec{q}\,d\omega+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D\left(\operatorname{div}\vec{q}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{\rho}+\operatorname{rot}\vec{q}\times\operatorname{grad}\frac{1}{\rho}\right)d\tau=$$

$$=\begin{cases}\vec{q}(x,y,z), & (x,y,z)\in D,\\ \quad 0\quad, & (x,y,z)\in D',\end{cases}\tag{1}$$

где D' — область, внешняя относительно S, $\times$ — знак векторного умножения, а $M(\xi,\eta,\zeta;\ x,y,z)$ — матрица вида:

$$\frac{1}{\rho^3}\begin{Vmatrix}\alpha(\xi-x)+\beta(\eta-y), & \beta(\xi-x)-\alpha(\eta-y), & \gamma(\xi-x)-\alpha(\zeta-z)\\ \alpha(\eta-y)-\beta(\xi-x), & \alpha(\xi-x)+\beta(\eta-y), & \gamma(\eta-y)-\beta(\zeta-z)\\ \alpha(\zeta-z)-\gamma(\xi-x), & \beta(\zeta-z)-\gamma(\eta-y), & \alpha(\xi-x)+\beta(\eta-y)\end{Vmatrix}+$$

$$+\begin{Vmatrix}\gamma(\zeta-z), & 0\ , & 0\\ 0, & \gamma(\zeta-z), & 0\\ 0, & 0\ , & \gamma(\zeta-z)\end{Vmatrix};\tag{2}$$

здесь $\vec{n}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ обозначает внешнюю относительно области D нормаль поверхности S в точке (ξ,η,ζ).

Формула (1) является пространственной аналогией известной формулы Помпею ([1]) для функции одного комплексного переменного.

2°. Интегральная формула Коши для потенциального вектора. Вектор $\vec{q}$ называется потенциальным в области D, если в этой области имеют место равенства:

$$\operatorname{div}\vec{q}=0,\quad \operatorname{rot}\vec{q}=0.$$

Для потенциального вектора $\vec{q}$ из формулы (1) непосредственно получается интегральная формула Коши [см.([2]), ([3])]:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S M(\xi,\eta,\zeta;\ x,y,z)\vec{q}\,d\omega=\begin{cases}\vec{q}(x,y,z), & (x,y,z)\in D,\\ \quad 0\quad, & (x,y,z)\in D'.\end{cases}\tag{3}$$

3°. Интеграл типа Коши. Теперь предположим, что вектор $\vec{q}$ задан лишь на поверхности S и его компоненты удовлетворяют условию Гельдера:

$$|q_1(x',y',z')-q_1(x,y,z)|\leqslant c\{|x'-x|^\alpha+|y'-y|^\alpha+|z'-z|^\alpha\},$$

$$|q_2(x',y',z')-q_2(x,y,z)|\leqslant c\{|x'-x|^\alpha+|y'-y|^\alpha+|z'-z|^\alpha\},$$

$$|q_3(x',y',z')-q_3(x,y,z)|\leqslant c\{|x'-x|^\alpha+|y'-y|^\alpha+|z'-z|^\alpha\},$$

где c и α — постоянные, причем $0<c$, $0<\alpha\leqslant 1$. Это условие можно записать в эквивалентной форме:

$$|\vec{q}(x',y',z')-\vec{q}(x,y,z)|\leqslant L\rho^\alpha(x',y',z';\ x,y,z),\quad L>0.$$

Рассмотрим вектор

$$\vec{Q}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S M(\xi,\eta,\zeta;\ x,y,z)\vec{q}(\xi,\eta,\zeta)\,d\omega,\tag{4}$$

где (x, y, z) — точка, не лежащая на поверхности S. Непосредственная проверка показывает, что компоненты вектора $\vec{Q}$ являются гармоническими функциями и что

$$\operatorname{div} \vec{Q}(x, y, z) = 0 .$$

Если точка $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности S, то интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S M(\xi, \eta, \zeta;\ x_0, y_0, z_0)\, \vec{q}(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega$$

с обычной точки зрения не имеет смысла. Но для класса векторов, удовлетворяющих условию Гельдера, этому интегралу можно придать определенный смысл. В самом деле, выделим точку (x_0, y_0, z_0) из поверхности S сферой σ_ε радиуса ε с центром в этой точке. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon} M(\xi, \eta, \zeta;\ x_0, y_0, z_0)\, \vec{q}(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega, \tag{5}$$

где S_ε — часть поверхности S, лежащая вне сферы σ_ε.

Если при $\varepsilon \to 0$ интеграл (5) стремится к определенному пределу, то этот предел мы будем называть главным значением интеграла по Коши.

Для вектора $\vec{q}$, удовлетворяющего условию Гельдера, этот предел существует. В самом деле, интеграл (5) представим в виде

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon} M(\xi, \eta, \zeta;\ x_0, y_0, z_0)\, [\vec{q}(\xi, \eta, \zeta) - \vec{q}(x_0, y_0, z_0)]\, d\omega +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon + \sigma_{1\varepsilon}} M(\xi, \eta, \zeta;\ x_0, y_0, z_0)\, \vec{q}(x_0, y_0, z_0)\, d\omega -$$
$$- \frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma_{1\varepsilon}} M(\xi, \eta, \zeta;\ x_0, y_0, z_0)\, \vec{q}(x_0, y_0, z_0)\, d\omega, \tag{6}$$

где $\sigma_{1\varepsilon}$ — часть сферы σ_ε, лежащая вне поверхности S.

Выражение (6) перепишем в виде:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{S_\varepsilon} M(\xi, \eta, \zeta;\ x_0, y_0, z_0)\, [\vec{q}(\xi, \eta, \zeta) - \vec{q}(x_0, y_0, z_0)]\, d\omega + \vec{q}(x_0, y_0, z_0) -$$
$$- \frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma_{1\varepsilon}} M(\xi, \eta, \zeta;\ x_0, y_0, z_0)\, \vec{q}(x_0, y_0, z_0)\, d\omega .$$

Предел этого выражения, очевидно, существует при $\varepsilon \to 0$, и его в дальнейшем будем обозначать обычным символом интеграла:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S M(\xi, \eta, \zeta;\ x_0, y_0, z_0)\, \vec{q}(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega =$$
$$= \frac{1}{2}\vec{q}(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{4\pi}\iint_S M(\xi, \eta, \zeta;\ x_0, y_0, z_0)\, [\vec{q}(\xi, \eta, \zeta) - \vec{q}(x_0, y_0, z_0)]\, d\omega . \tag{7}$$

В случае разомкнутой поверхности Ляпунова главное значение интеграла в смысле Коши определяется опять как предел выражения

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_\varepsilon} M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\ [\vec{q}(\xi, \eta, \zeta) - \vec{q}(x_0, y_0, z_0)]\, d\omega +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_\varepsilon} M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\, \vec{q}(x_0, y_0, z_0)\, d\omega,$$

когда $\varepsilon \to 0$. Этот предел всегда существует, если плотность интеграла $\vec{q}$ удовлетворяет условию Гельдера. Очевидно, что интеграл

$$\iint\limits_{S} M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\, d\omega$$

вообще не выражается в элементарных функциях.

Вектор $\vec{Q}(x, y, z)$, представленный формулой (4), естественно называть интегралом типа Коши.

Когда точка (x, y, z) не лежит на поверхности S, из (4) получаем

$$\operatorname{rot}\vec{Q} = \frac{1}{4\pi}\iint\left(\frac{\vec{n}\times\vec{q}}{\rho^3} - 3\begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi - x & \eta - y & \zeta - z\end{vmatrix} \operatorname{grad}\frac{1}{\rho^3}\right) d\omega. \qquad (8)$$

Выражение (8) вообще отлично от нуля. Если вектор $\vec{q}$ дополнительно удовлетворяет условию:

$$\iint\limits_{S}\left(\frac{\vec{n}\times\vec{q}}{\rho^3} - 3\begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi - x & \eta - y & \zeta - z\end{vmatrix} \operatorname{grad}\frac{1}{\rho^3}\right) d\omega = 0, \qquad (9)$$

то будем иметь $\operatorname{rot}\vec{Q} = 0$. Следовательно, интеграл типа Коши (4) плотностью $\vec{q}$, удовлетворяющей условию (9), дает нам вектор, который потенциален как в области D, так и в области D'.

4°. Граничные значения интеграла типа Коши. Пусть плотность $\vec{q}(x, y, z)$ интеграла типа Коши (4) удовлетворяет условию Гельдера. Обозначим через (x_0, y_0, z_0) точку поверхности S. Вектор $\vec{Q}(x, y, z)$, представленный формулой (4), перепишем в виде:

$$\vec{Q} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\ [\vec{q}(\xi, \eta, \zeta) - \vec{q}(x_0, y_0, z_0)]\, d\omega +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\, \vec{q}(x_0, y_0, z_0)\, d\omega.$$

Очевидно, что

$$\vec{Q}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\ [\vec{q}(\xi, \eta, \zeta) - \vec{q}(x_0, y_0, z_0)]\, d\omega +$$
$$+ \vec{q}(x_0, y_0, z_0), \quad (x, y, z) \in D, \qquad (10)$$

$$\vec{Q}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\iint_S M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\,[\vec{q}(\xi, \eta, \zeta) - \vec{q}(x_0, y_0, z_0)]\,d\omega,$$

$$(x, y, z) \in D'. \tag{11}$$

Обозначим через $\vec{Q}^{+}(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{Q}^{-}(x_0, y_0, z_0)$ предельные значения $\vec{Q}(x, y, z)$, когда точка $(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)$, находясь в области D или D' соответственно. В силу (7), получаем из (10) и (11):

$$\vec{Q}^{+}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}\vec{q}(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{4\pi}\iint_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\,\vec{q}(\xi, \eta, \zeta)\,d\omega, \tag{12}$$

$$\vec{Q}^{-}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{2}\vec{q}(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{4\pi}\iint_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\,\vec{q}(\xi, \eta, \zeta)\,d\omega, \tag{13}$$

причем можно показать, что стремление к пределу равномерно по отношению к положению (x_0, y_0, z_0) на S.

Из (12) и (13) получаем:

$$\vec{Q}^{+}(x_0, y_0, z_0) - \vec{Q}^{-}(x_0, y_0, z_0) = \vec{q}(x_0, y_0, z_0), \tag{14}$$

$$\vec{Q}^{+}(x_0, y_0, z_0) + \vec{Q}^{-}(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\,\vec{q}(\xi, \eta, \zeta)\,d\omega. \tag{15}$$

Формулы (14) и (15) являются обобщениями известных формул Сохоцкого из теории функций комплексного переменного.

Очевидно, что вектор, представленный интегралом типа Коши с заданным скачком (14), определяется единственным образом по формуле (4).

5°. Формула перестановки особых интегралов. Покажем, что имеет место следующая формула перестановки особых интегралов:

$$\frac{1}{4\pi^2}\iint_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\,d\omega \iint_S M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta)\,\vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1)\,d\omega_1 =$$

$$= \vec{\varphi}(x_0, y_0, z_0; x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{4\pi^2}\iint_S d\omega_1 \iint_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\cdot$$

$$M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta)\,\vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1)\,d\omega, \tag{16}$$

где S — поверхность Ляпунова, а $\vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ — заданный на S вектор, удовлетворяющий условию Гельдера по (ξ, η, ζ) и (ξ_1, η_1, ζ_1).

С этой целью рассмотрим следующие выражения:

$$\vec{\Phi}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\, d\omega \cdot$$

$$\iint\limits_S M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta)\, \vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\omega_1,$$

$$\vec{\Psi}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_S d\omega_1 \iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z) \cdot$$

$$\cdot M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta)\, \vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\omega,$$

где (x, y, z) — точка, не лежащая на S. Легко показать, что

$$\vec{\Phi}(x, y, z) = \vec{\Psi}(x, y, z). \tag{17}$$

В силу формулы (15), имеем:

$$\vec{\Phi}^+(x_0, y_0, z_0) + \vec{\Phi}^-(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= \frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\, d\omega \iint\limits_S M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta)\, \vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\omega_1. \tag{18}$$

Перепишем выражение для $\vec{\Psi}$ в виде

$$\vec{\Psi}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_S d\omega_1 \iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\, M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; x, y, z) \cdot$$
$$\cdot\, \vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\omega + \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_S d\omega \iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z) \cdot$$
$$[M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta) - M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; x, y, z)] \cdot \vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\omega_1. \tag{19}$$

На основании (12) и (13), из (19) следует:

$$\vec{\Psi}^+(x_0, y_0, z_0) + \vec{\Psi}^-(x_0, y_0, z_0) = 2\vec{\varphi}(x_0, y_0, z_0; x_0, y_0, z_0) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_S d\omega_1 \iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\, M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta)\, \varphi\, d\omega. \tag{20}$$

Приравнивая (18) и (20), получим формулу (16).

6°. Обращение одного интегрального уравнения. Пусть ищется решение следующего особого интегрального уравнения:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\, \vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega = \vec{\Psi}(x_0, y_0, z_0), \tag{21}$$

где S — замкнутая поверхность Ляпунова, $\vec{\Psi}$ — заданный на S вектор, удовлетворяющий условию Гельдера, а $\vec{\varphi}$ — искомый вектор, также удовлетворяющий условию Гельдера. Легко видеть, что решением уравнения (21) является вектор

$$\vec{\varphi}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\, \vec{\Psi}(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega. \tag{22}$$

В самом деле, рассмотрим вектор

$$\vec{Q}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\, \vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega. \tag{23}$$

В силу (15), имеем:

$$\vec{Q}^{+}(x_0, y_0, z_0) + \vec{Q}^{-}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\,\vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta)\,d\omega. \quad (24)$$

На основании (21), из (24) находим:

$$\vec{Q}^{+}(x_0, y_0, z_0) + \vec{Q}^{-}(x_0, y_0, z_0) = \vec{\Psi}(x_0, y_0, z_0). \quad (25)$$

При помощи вектора $\vec{Q}$ составим другой вектор $\vec{P}$:

$$\vec{P}(x, y, z) = \vec{Q}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D, \quad (26)$$

$$\vec{P}(x, y, z) = -\vec{Q}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D'. \quad (27)$$

В силу (25), (26) и (27) заключаем, что вектор $\vec{P}$ удовлетворяет условию:

$$\vec{P}^{+}(x_0, y_0, z_0) - \vec{P}^{-}(x_0, y_0, z_0) = \vec{\Psi}(x_0, y_0, z_0). \quad (28)$$

На основании результатов $n^{\circ}4$, имеем:

$$\vec{P}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\,\vec{\Psi}(\xi, \eta, \zeta)\,d\omega, \quad (29)$$

откуда, в силу (26), (27) и (14), получаем (22).

Точно таким же образом можно показать, что из формулы (22) получается формула (21). Следовательно, (21) и (22) являются формулами обращения.

Подставляя значение $\vec{\varphi}$ из (22) в (21) и применяя формулу перестановки (16), получим:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\,d\omega\,\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta)\,\vec{\Psi}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta)\,d\omega_1 =$$

$$= \vec{\Psi}(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_S d\omega_1 \iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\,M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta)\,\cdot$$

$$\vec{\Psi}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\,d\omega = \vec{\Psi}(x_0, y_0, z_0).$$

Отсюда имеем:

$$\iint\limits_S d\omega_1 \iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\,M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta)\,\vec{\Psi}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\,d\omega = 0$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_S M(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)\,M(\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi, \eta, \zeta)\,d\omega = 0. \quad (30)$$

Предположим, что S совпадает с плоскостью $z=0$, а D — верхнее полупространство $z>0$. Так как в этом случае $\alpha=\beta=0$, $\gamma=-1$, $\xi=0$, то

$$M(\xi, \eta, 0; x, y, z) = \frac{1}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2]^{3/2}}\left\|\begin{matrix} z & 0 & -(\xi-x) \\ 0 & z & -(\eta-y) \\ \xi-x & \eta-y & z \end{matrix}\right\|. \quad (31)$$

Предположим, что

$$\Psi_1 = -\frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad \Psi_2 = -\frac{\partial f}{\partial y_0}, \quad \Psi_3 = 0; \quad \varphi_1 \equiv \varphi_1, \quad \varphi_2 \equiv \varphi_2, \quad \varphi_3 = p.$$

Перепишем уравнение (21) в развернутом виде:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{(\xi - x_0)\, p\, d\omega}{\rho^3(\xi, \eta, 0; x, y, 0)} = \frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{(\eta - y_0)\, p\, d\omega}{\rho^3(\xi, \eta, 0; x, y, 0)} = \frac{\partial f}{\partial y_0},$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{(\xi - x_0)\varphi_1 + (\eta - y_0)\varphi_2}{\rho^3(\xi, \eta, 0; x, y, 0)}\, d\omega = 0. \tag{21_1}$$

Решение уравнения (21_1) получается по формуле (22):

$$\vec{\varphi}(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & -(\xi - x_0) \\ 0 & 0 & -(\eta - y_0) \\ \xi - x_0 & \eta - y_0 & 0 \end{matrix}\right\|}{\rho^3(\xi, \eta, 0; x_0, y_0, 0)} \vec{\Psi}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

или

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad p = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{(\xi - x_0) f_\xi + (\eta - y_0) f_\eta}{\rho^3(\xi, \eta, 0; x_0, y_0, 0)}\, d\xi\, d\eta. \tag{32}$$

Интегрируя по частям (32), получим [см. ([4])]:

$$p = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{\Delta f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2]^{1/2}}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \tag{33}$$

Легко видеть, что (33) является решением уже проинтегрированной системы (21_1):

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2]^{1/2}} = f(x_0, y_0). \tag{34}$$

Следовательно, (33) и (34) являются формулами обращения, причем предполагается, что функции f и p удовлетворяют условиям, достаточным для сходимости несобственных интегралов.

Теперь нетрудно получить решение следующего линейного интегрального уравнения первого рода:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \left\{\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2(\xi x + \eta y) + (\xi^2 + \eta^2)(x^2 + y^2)}}\right\} p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$
$$= f(x, y), \tag{35}$$

где S — круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, а $f(x, y)$ — заданная на S дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Заметим, что левая часть (35) определена для всех точек (x, y) плоскости $z = 0$. В качестве значения правой части (35) в дополнении S' области S до полной плоскости $z = 0$ примем выражение

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

После преобразования переменных в правой части (35) это уравнение можно заменить эквивалентным уравнением:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S+S'}\frac{p_1(\xi,\ \eta)}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta=f_1(x,\ y), \tag{36}$$

где

$$f_1(x,\ y)=\begin{cases} f(x,\ y), & (x,\ y)\in S,\\ -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}f\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\right), & (x,\ y)\in S',\end{cases} \tag{37}$$

$$p_1(x,\ y)=\begin{cases} p(x,\ y), & (x,\ y)\in S,\\ \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,p\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\right), & (x,\ y)\in S'.\end{cases}$$

Решение уравнения (36) получается непосредственно по формуле (33), которая в данном случае примет вид:

$$p(x,\ y)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\iint\left\{\frac{\Delta f}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}-\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,\Delta\left[\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,f(\xi,\ \eta)\right]}{\sqrt{1-2(\xi x+\eta y)+(\xi^2+\eta^2)(x^2+y^2)}}\right\}d\xi\,d\eta.$$

7°. Формула Пуассона для сферы. Хорошо известная формула Пуассона

$$u(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{l^2-r^2}{l\rho^3}\,\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,d\omega, \tag{38}$$

где σ обозначает сферу радиуса l с центром в начале координат, $r^2=x^2+y^2+z^2$, $\rho^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2$, определяет гармоническую в области D, внутренней относительно сферы σ, функцию, удовлетворяющую граничному условию:

$$u|_\sigma=\varphi, \tag{39}$$

где φ — заданная непрерывная функция.

Мы здесь даем новый простой вывод формулы (38). Обозначим через $\vec{Q}$ вектор

$$u(x,\ y,\ z)\,\vec{i}+v(x,\ y,\ z)\,\vec{j}+w(x,\ y,\ z)\,\vec{k},$$

где u — искомая гармоническая функция, а v, w — произвольные (пока) регулярные гармонические в области D функции. Доопределим вектор $\vec{Q}$ во внешней относительно сферы σ области D' по формуле

$$\vec{Q}(x,\ y,\ z)=\frac{l}{r}\,u\left(\frac{l^2x}{r^2},\ \frac{l^2y}{r^2},\ \frac{l^2z}{r^2}\right)\vec{i}-\frac{l}{r}\,v\left(\frac{l^2x}{r^2},\ \frac{l^2y}{r^2},\ \frac{l^2z}{r^2}\right)\vec{j}-\frac{l}{r}\,w\left(\frac{l^2x}{r^2},\ \frac{l^2y}{r^2},\ \frac{l^2z}{r^2}\right)\vec{k}. \tag{40}$$

Вектор $\vec{Q}$ будет удовлетворять граничному условию:

$$\vec{Q}^+(x_0,\ y_0,\ z_0)+\vec{Q}^-(x_0,\ y_0,\ z_0)=2\vec{\varphi}(x_0,\ y_0,\ z_0),\qquad \vec{\varphi}=\varphi\cdot\vec{i}. \tag{41}$$

Одно из решений граничной задачи (41) дается интегралом типа Коши (4):

$$\vec{Q}_1(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\iint_\sigma M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta)\,d\omega, \quad (x, y, z) \in D, \tag{42}$$

$$\vec{Q}_1(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\iint_\sigma M(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta)\,d\omega, \quad (x, y, z) \in D'. \tag{43}$$

Из тождества

$$\vec{Q}_2(x, y, z) = \frac{l}{r}\vec{Q}_1\left(\frac{l^2x}{r^2}, \frac{l^2y}{r^2}, \frac{l^2z}{r^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{1}{\rho^3} M_1(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\vec{\varphi}\,d\omega,$$

где

$$M_1(\xi, \eta, \zeta; x, y, z) = M\left(\frac{r^2}{l^2}\xi, \frac{r^2}{l^2}\eta, \frac{r^2}{l^2}\zeta; x, y, z\right)\rho^3\left(\frac{r^2}{l^2}\xi, \frac{r^2}{l^2}\eta, \frac{r^2}{l^2}\zeta; x, y, z\right),$$

заключаем, что вектор $\vec{Q}$ не удовлетворяет условию (40) и, следовательно, первая компонента этого вектора не будет удовлетворять условию (39). Очевидно, что условиям (40) и (41) будет удовлетворять вектор $\frac{1}{2}[\vec{Q}_1(x, y, z) - \vec{Q}_2(x, y z)] \equiv \vec{Q}(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \vec{Q}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \frac{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}(l^2 - r^2)}{l\rho^3}\vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta)\,d\omega, \quad (x, y, z) \in D, \\ \vec{Q}(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \frac{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}(l^2 - r^2)}{l\rho^3}\vec{\varphi}(\xi, \eta, \zeta)\,d\omega, \quad (x, y, z) \in D'. \end{aligned} \tag{44}$$

Из формулы (44) непосредственно следует формула Пуассона (38). Конечный результат показывает, что можно ограничиться лишь непрерывностью функции $\varphi(x, y, z)$.

8°. Задача Дирихле (D) для полупространства. Требуется определить гармоническую в полупространстве $z > 0$ функцию $w(x, y, z)$, ограниченную при $z \geqslant 0$, по граничному условию

$$w(x, y, z)|_S = f(x, y), \tag{45}$$

где f — заданная на плоскости $z = 0$ непрерывная и ограниченная функция.

Известно, что задача (D) всегда имеет единственное решение.

Для построения решения задачи (D) рассмотрим гармонический в полупространстве $z > 0$ вектор

$$\vec{\Phi} = u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k}, \tag{46}$$

где $w(x, y, z)$ — искомое решение. Доопределим вектор $\vec{\Phi}(x, y, z)$ в нижнем полупространстве $z < 0$ по формуле:

$$\vec{\Phi}(x, y, z) = u(x, y, -z)\vec{i} + v(x, y, -z)\vec{j} - w(x, y, -z)\vec{k}. \tag{47}$$

Вектор $\vec{\Phi}$ должен удовлетворять граничному условию

$$\begin{gathered}\vec{\Phi}^{+}(x_0, y_0, 0) + \vec{\Phi}^{-}(x_0, y_0, 0) = 2\vec{f}(x_0, y_0), \\ \vec{f} = f\vec{k}.\end{gathered} \tag{48}$$

Пока будем предполагать, что функция f удовлетворяет условию Гельдера.

Вектор $\vec{\Phi}(x, y, z)$, представленный интегралом типа Коши:

$$\vec{\Phi}(x, y, z) = \pm \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\begin{Vmatrix} z & 0 & -(\xi - x) \\ 0 & z & -(\eta - y) \\ \xi - x & \eta - y & z \end{Vmatrix}}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{3/2}} \vec{f}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где знак плюс берется при $z > 0$ и знак минус — при $z < 0$, очевидно, удовлетворяет условиям (47) и (48). Следовательно, первая компонента вектора $\vec{\Phi}$ дает нам хорошо известное искомое решение задачи (D):

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{z f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{3/2}}. \tag{49}$$

Конечный результат показывает, что в основных условиях достаточно предположить лишь непрерывность функций f.

9°. Задача Дирихле для пространства, разрезанного по круговому диску. Обозначим через D пространство, разрезанное по диску S:

$$\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2. \tag{50}$$

Требуется определить гармоническую в области D функцию $w(x, y, z)$, равную нулю на бесконечности и удовлетворяющую граничному условию:

$$w(x, y, +0)|_S = f^{+}(x, y), \quad w(x, y, -0)|_S = f^{-}(x, y), \tag{51}$$

где f^{+} и f^{-} — заданные на S непрерывные функции.

Рассмотрим вектор

$$\vec{\Phi}(x, y, z) = u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k}, \tag{52}$$

где $w(x, y, z)$ — искомая гармоническая функция, а $v(x, y, z)$, $u(x, y, z)$ — пока произвольные гармонические в области D функции, непрерывные во всем пространстве. Составим два вектора:

$$\begin{aligned}\vec{\Psi} = \frac{1}{2}[u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k} - u(x, y, -z)\vec{i} - \\ - v(x, y, -z)\vec{j} + w(x, y, -z)\vec{k}],\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} = \frac{1}{2}[u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k} + u(x, y, -z)\vec{i} + \\ + v(x, y, -z)\vec{j} - w(x, y, -z)\vec{k}].\end{aligned} \tag{54}$$

На основании (51), (53) и (54) заключаем, что $\vec{\Psi}$ и $\vec{\Omega}$ удовлетворяют граничным условиям:

$$\vec{\Psi}^+ + \vec{\Psi}^- = \vec{f} \quad \text{на } S, \tag{55}$$

$$\vec{\Omega}^+ - \vec{\Omega}^- = \vec{g} \quad \text{на } S, \tag{56}$$

где

$$\vec{f} = (f^+ + f^-)\ \vec{k}, \tag{57}$$

$$\vec{g} = (f^+ - f^-)\ \vec{k}. \tag{58}$$

Если нам удастся определить $\vec{\Psi}$ и $\vec{\Omega}$, то $\vec{\Phi}$ непосредственно получится из равенства

$$\vec{\Phi} = \vec{\Psi} + \vec{\Omega}. \tag{59}$$

Вектор $\vec{\Omega}$, удовлетворяющий условию (56) и исчезающий на бесконечности, строится по формуле (4):

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S M(\xi, \eta, 0; x, y, z)\, \vec{g}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{60}$$

где

$$M(\xi, \eta, 0; x, y, z) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial\zeta} & 0 & \frac{\partial}{\partial\xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial\zeta} & \frac{\partial}{\partial\eta} \\ -\frac{\partial}{\partial\xi} & -\frac{\partial}{\partial\eta} & \frac{\partial}{\partial\zeta} \end{matrix} \right\|_{\zeta=0} \cdot \frac{1}{\rho(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)}.$$

Рассмотрим многозначную гармоническую функцию [см. ([5])]:

$$W(\xi, \eta, \zeta; x, y, z) = \frac{2}{\pi\rho}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\theta-\theta_0}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \cos(\theta-\theta_0)}}, \tag{61}$$

где

$$\xi = \frac{a \operatorname{sh}\rho_1}{\operatorname{ch}\rho_1 - \cos\theta}\cos\Phi, \quad \eta = \frac{a\operatorname{sh}\rho_1}{\operatorname{ch}\rho_1 - \cos\theta}\sin\Phi, \quad \zeta = \frac{a\sin\theta}{\operatorname{ch}\rho_1 - \cos\theta},$$

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\rho_0}{\operatorname{ch}\rho_0 - \cos\theta_0}\cos\Phi_0, \quad y = \frac{a\operatorname{sh}\rho_0}{\operatorname{ch}\rho_0 - \cos\theta_0}\sin\Phi_0, \quad z = \frac{a\sin\theta_0}{\operatorname{ch}\rho_0 - \cos\theta_0},$$

$$\operatorname{ch}\alpha = \operatorname{ch}\rho_1\operatorname{ch}\rho_0 - \operatorname{sh}\rho_1\operatorname{sh}\rho_0\cos(\Phi - \Phi_0).$$

Под арктангенсом здесь подразумевается та ветвь этой функции, которая минимальна по абсолютному значению. $W(\xi, \eta, +0; x, y, z)$ является многозначной гармонической относительно x, y, z функцией, которая при $\rho = 0$ имеет особенность вида $\frac{1}{\rho}$ и на диске S удовлетворяет условию:

$$W(\xi, \eta, +0; x, y, +0) + W(\xi, \eta, +0; x, y, -0) = 0. \tag{62}$$

В силу (62) заключаем, что вектор $\vec{\Psi}$, удовлетворяющий условию (55)

и исчезающий на бесконечности, дается формулой:

$$\vec{\Psi} = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial\zeta} & 0 & \frac{\partial}{\partial\xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial\zeta} & \frac{\partial}{\partial\eta} \\ -\frac{\partial}{\partial\xi} & -\frac{\partial}{\partial\eta} & \frac{\partial}{\partial\zeta} \end{matrix} \right\|_{\zeta=+0} \frac{2}{\pi\rho}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\theta-\theta_0}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\cos(\theta-\theta_0)}}\vec{f}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{63}$$

В результате вычислений из (61) получаем:

$$\left.\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=+0} = \frac{2z}{\pi\rho^3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\cdot z\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}}{\rho\sqrt{R-a^2+x^2+y^2+z^2}} + \frac{\sqrt{2}}{\pi\rho a}\frac{\sqrt{R-a^2+x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}},$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial\xi}\right|_{\zeta=+0} = -\frac{2(\xi-x)}{\pi\rho^3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,z\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}}{\rho\sqrt{R-a^2+x^2+y^2+z^2}} + \frac{2}{\pi\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,z\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}}{\rho\sqrt{R-a^2+x^2+y^2+z^2}},$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial\eta}\right|_{\zeta=+0} = -\frac{2(\eta-y)}{\pi\rho^3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,z\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}}{\rho\sqrt{R-a^2+x^2+y^2+z^2}} + \frac{2}{\pi\rho}\frac{\partial}{\partial\eta}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,z\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}}{\rho\sqrt{R-a^2+x^2+y^2+z^2}},$$

где $R=\sqrt{(a^2-x^2-y^2-z^2)^2+4a^2z^2}$, причем берется арифметическое значение корня.

Подставляя выражения $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Psi}$ из (60) и (63) в формулу (59), получаем искомое решение задачи Дирихле:

$$w(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{z(f^+-f^-)\,d\xi\,d\eta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2]^{3/2}} + \frac{1}{2\pi^2}\iint_S \frac{z\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,z\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}}{\sqrt{R-a^2+x^2+y^2+z^2}}}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2]^{3/2}}(f^++f^-)\,d\xi\,d\eta + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi a}\iint_S \frac{\sqrt{R-a^2+x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}\sqrt{a^2-\xi^2+\eta^2}}(f^++f^-)\,d\xi\,d\eta. \tag{64}$$

В частности, при $f^+\equiv f^-$, из формулы (64) получается известная формула Гейне-Гобсона [см. ([5]) и ([6]), стр. 127—132].

10°. Обращение одного интегрального уравнения, встречающегося в приложениях. При решении контактных задач пространственной теории упругости и в теории крыла встречается интегральное уравнение [см. ([7]), ([8]), ([9])]:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{p(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2}} = q(x_0,\ y_0)+c, \tag{65}$$

где S — диск $x^2+y^2\leqslant a^2$, c — произвольная постоянная, q — заданная функция, первые производные которой удовлетворяют условию Гельдера, а $p(x,\ y)$ — искомая функция, также удовлетворяющая условию Гельдера.

Вместо уравнения (65) рассмотрим уравнение:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -(\xi-x) \\ 0 & 0 & -(\eta-y) \\ \xi-x & \eta-y & 0 \end{Vmatrix}}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{3/2}} \vec{\varphi}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \vec{\psi}(x,y), \tag{66}$$

где $\psi_1 = -\frac{\partial q}{\partial x}$, $\psi_2 = -\frac{\partial q}{\partial y}$, $\psi_3 = 0$, $\varphi_1 = \varphi_1$, $\varphi_2 = \varphi_2$, $\varphi_3 = p$. Связь между уравнениями (65) и (66) очевидна. Введем вектор

$$\vec{Q}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S M(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)\,\vec{\varphi}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{67}$$

В силу (12) и (13), уравнение (66) можно заменить эквивалентным условием:

$$\vec{Q}^+ + \vec{Q}^- = \vec{\psi}(x,y) \text{ на } S. \tag{68}$$

Вектор $\vec{Q}$, удовлетворяющий условию (68), дается формулой (63). После того как вектор $\vec{Q}$ найден, решение уравнения (66) получается непосредственно по формуле

$$\vec{\varphi}(x,y) = \vec{Q}^+(x,y) - \vec{Q}^-(x,y). \tag{69}$$

В частности, из (69) получаем:

$$p(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_S \left\{ \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(a^2-\xi^2-\eta^2)(a^2-x^2-y^2)}}{a\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} \cdot \frac{\partial q}{\partial\xi} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\eta} \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(a^2-\xi^2-\eta^2)(a^2-x^2-y^2)}}{a\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} \cdot \frac{\partial q}{\partial\eta} \right\} d\xi\,d\eta. \tag{70}$$

Предположим, что q имеет непрерывные вторые производные. Тогда в результате интегрирования по частям из (70) получаем, что

$$p = -\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_S \frac{\Delta q(\xi,\eta)}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(a^2-\xi^2-\eta^2)(a^2-x^2-y^2)}}{a\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta. \tag{71}$$

Очевидно, что произвольную постоянную, входящую в уравнение (65), всегда можно подобрать таким образом, чтобы функция $p(x,y)$, определенная по формуле (71), была решением этого уравнения.

Поступило
30. IV. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Pompeiu D., Sur une classe de fonctions d'une variable complexe, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 33 (1912), 108—113; 35 (1913), 277—281.

[2] Fulton D. G. and Rainich G. Y., Generalizations to higher dimensions of the Cochy integral formula, Amer. J. Math., vol. 54 (1932), 235—241.

[3] Mises R., Integral theorems in three-dimensional potential flow, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50 (1944), 599—611.

[4] Леонов М. Я., К теории расчета упругих оснований, Прикладная математика и механика, т. III, в. 2 (1939), 53—78.

[5] Hobson E. W., On Green's function for a circular disc, with applications to electrostatic problems, Cambridge Phil. Trans., vol. XVIII (1900), 277—291.

[6] Heine E., Kugelfunktionen, Bd. II, Berlin, 1881.

[7] Кочин Н. Е., Теория крыла конечного размаха круговой формы, Прикладная математика и механика, т. IV, в. 1 (1940), 2—32.

[8] Галин Л. А., Пространственные контактные задачи теории упругости для штампов круговой формы в плане, Прикладная математика и механика, т. X, в. 4 (1946), 425—448.

[9] Леонов М. Я., Об одном линейном интегральном уравнении, Украинский Матем. журнал, т. V, № 1 (1953), 50—57.

[10] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М — Л., Гостехиздат, 1946.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 539—562

З. Я. ШАПИРО

ОБ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В статье рассматривается краевая задача с заданием на границе дифференциальных операторов произвольного порядка для дифференциальных уравнений эллиптического типа и для систем таких уравнений. Устанавливается разрешимость такой задачи для полупространства и показывается, что для произвольной области задача сводится к интегральному уравнению.

Настоящая работа посвящена исследованию общей краевой задачи для эллиптических уравнений и систем. Эта задача, представляющая собой обобщение первой и второй краевых задач, состоит в следующем. На границе области, в которой определяется решение, задается линейный дифференциальный оператор произвольного порядка (или система таких операторов). Ищется функция, удовлетворяющая уравнению внутри области и такая, что заданный дифференциальный оператор от этой функции принимает в каждой точке границы предписанные значения.

В работе показано, что для широкого класса граничных операторов задача разрешима при наложении конечного числа условий на значения оператора. Для доказательства строятся отвечающие краевому условию специальные решения уравнения, зависящие, как от параметра, от граничной точки Q. Эти решения (которые мы называем фундаментальными решениями краевой задачи) подобны потенциалу простого или двойного слоя для уравнения Лапласа.

Решение уравнения, удовлетворяющее краевому условию, ищется в виде интеграла по границе области от фундаментального решения, умноженного на неизвестную функцию $\mu(Q)$, заданную на границе. Выполнение краевого условия дает для функции $\mu(Q)$ интегральное уравнение типа Фредгольма, правой частью которого является заданное значение граничного оператора.

Использованный метод является распространением на более общие краевые условия и на системы эллиптических уравнений общеизвестного метода сведѐния задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям.

Общие краевые задачи для уравнений и систем с двумя независимыми переменными исследовались многими математиками. Наиболее полные результаты в этой области были получены И. Н. Векуа (¹). Для уравнений с бóльшим числом независимых переменных вопрос о разрешимости общих краевых задач рассматривали М. И. Вишик (²), (³), (⁴) и Я. Б. Лопатинский (⁶). Их результаты в известной степени пересекаются с нашими.

Чтобы возможно яснее и проще изложить способ построения фундаментальных решений и суть предлагаемого метода, мы в § 1 ограничиваемся случаем одного уравнения 2-го порядка, т. е., по существу, уравнением Лапласа.

В § 2 дается постановка и решение общей краевой задачи для эллиптических систем произвольного порядка. Некоторые доказательства, ничем принципиально не отличающиеся от аналогичных доказательств для уравнения Лапласа, мы в этом параграфе опускаем.

§ 1

Дано уравнение второго порядка эллиптического типа с тремя независимыми переменными и постоянными коэффициентами:

$$Lu = \sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \tag{1}$$

Кроме того, задана выпуклая область D с достаточно гладкой границей и на Γ задан линейный дифференциальный оператор Λ произвольного порядка l с непрерывными коэффициентами:

$$\Lambda u = \sum_{p+q+s \leqslant l} c_{p,\,q,\,s}(Q) \frac{\partial^{p+q+s} u}{\partial x_1^p \, \partial x_2^q \, \partial x_3^s} \quad (Q \in \Gamma). \tag{2}$$

Продолжив коэффициенты $c_{p,\,q,\,s}(Q)$ непрерывно внутрь D на некоторую полоску, мы определим оператор Λ внутри D по крайней мере в точках, достаточно близких к границе.

Требуется найти функцию $u(x_1, x_2, x_3) = u(P)$, удовлетворяющую уравнению (1) внутри D и такую, что при приближении к точке Q

$$\lim_{P \to Q} \Lambda u(P) = f(Q), \tag{3}$$

где $f(Q)$ — заданная на границе функция.

В п. 1 мы напишем явное решение нашей задачи для случая, когда область D совпадает с полупространством $x_3 > 0$, коэффициенты оператора Λ постоянны и этот оператор не содержит производных ниже l-го порядка. В п. 2, воспользовавшись полученным решением, мы сведем краевую задачу для произвольной области к интегральному уравнению.

1. Построим решение уравнения (1) в области $x_3 > 0$ такое, что

$$\lim_{x_3 \to 0} \sum_{p+q+s=l} c_{p,\,q,\,s} \frac{\partial^l u}{\partial x_1^p \partial x_2^q \partial x_3^s} = f(x_1, x_2), \tag{4}$$

где $f(x_1, x_2)$ — непрерывная функция, достаточно быстро стремящаяся к нулю на бесконечности, а именно, удовлетворяющая условию

$$|f(x_1, x_2)| < \frac{K}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{l+1}{2}}}. \tag{5}$$

Для решения этой задачи мы сначала выберем частное решение $\Phi(s;\, x_1 + s x_2 + t(s)\, x_3)$ уравнения (1), зависящее от s и от $x_1 + s x_2 + t(s) x_3$,

где s — вещественный параметр, а $t(s)$ — комплексная функция. Проинтегрировав выбранное решение по всем вещественным значениям s, мы получим функцию $F(x_1, x_2, x_3)$, представляющую собой фундаментальное решение или аналог функции Грина для поставленной краевой задачи. Это значит, что решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (4), определяется формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3) f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2. \tag{6}$$

Итак, окончательное решение задачи определяется выбором частного решения $\Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$, зависящего от параметра s. Чтобы выбрать это решение, заметим, что, как легко убедиться подстановкой, всякая дважды дифференцируемая функция $\varphi(x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$ удовлетворяет уравнению (1), если $t(s)$ определяется из уравнения

$$a_{11} + 2a_{12}s + a_{22}s^2 + 2(a_{13} + a_{23}s)t + a_{33}t^2 = 0. \tag{7}$$

Эллиптичность уравнения (1) означает, что существует постоянная K такая, что $|\operatorname{Im} t(s)| > K$ при любом вещественном s. Из двух решений уравнения (7) возьмем то, для которого $\operatorname{Im} t(s) > 0$, и выберем комплексную функцию $\varphi_l(z) = \varphi_l(x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$, зависящую лишь от порядка краевого условия l, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_l(z) &= \frac{1}{2\pi^2(l-2)!} z^{l-2}\ln z && (l \geqslant 2), \\ \varphi_l(z) &= \frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{z} && (l = 1), \\ \varphi_l(z) &= -\frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{z^2} && (l = 0). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ветвь логарифма при $l \geqslant 2$ фиксируется произвольно*. Чтобы получить $\Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$, разделим функцию $\varphi_l(x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$ на некоторый многочлен от s и $t(s)$, определяющийся в зависимости от конкретного вида краевого условия (4).

Предварительно преобразуем граничный оператор (4). Для этого, воспользовавшись уравнением (1) и всевозможными уравнениями, полученными из него дифференцированием, выразим $\frac{\partial^l u}{\partial x_3^l}, \frac{\partial^{l-1} u}{\partial x_3^{l-1}}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$

---

* При $x_3 > 0$ и вещественном s выражение $x_1 + sx_2 + t(s)x_3$ не может обратиться в нуль в силу комплексности функции $t(s)$. Поэтому мы можем зафиксировать ветвь логарифма, т. е. $\operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{Im} t(s)x_3}{x_1 + sx_2 + \operatorname{Re} t(s)x_3}$ для всех значений s и точек полупространства $x_3 > 0$. Различный выбор ветви логарифма даст функции $\varphi_l(x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$, отличающиеся на многочлен $(l-2)$-й степени от x_1, x_2, x_3, что несущественно для дальнейшего.

через производные по x_1 и x_2 и через первую производную по x_3 от этих производных. Заменив после этого в операторе Λ производные по x_3 выше первого порядка их выражениями через производные по x_1 и x_2, мы запишем оператор Λu в следующем «каноническом» виде:

$$\Lambda u = \sum_{q=0}^{l} a_q \frac{\partial^l u}{\partial x_1^q \partial x_2^{l-q}} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sum_{q=0}^{l-1} b_q \frac{\partial^{l-1} u}{\partial x_1^q \partial x_2^{l-q-}} = Au + \frac{\partial}{\partial x_3} Bu. \tag{9}$$

Предположим, далее, что либо оператор A содержит производную $\frac{\partial^l u}{\partial x_2^l}$, либо B содержит $\frac{\partial^{l-1} u}{\partial x_2^{l-1}}$, т. е. хотя бы один из двух коэффициентов a_0 и b_0 отличен от нуля. Этого всегда можно добиться при помощи линейного преобразования переменных x_1 и x_2, не меняющего характера уравнения.

Поставим оператору краевого условия Λ в соответствие многочлен от s и $t(s)$, заменяя дифференцирование по x_1 умножением на 1, дифференцирование по x_2 — умножением на s и дифференцирование по x_3 — умножением на $t(s)$. Полученную функцию от s обозначим той же буквой, что и самый оператор, т. е. положим

$$\Lambda(s) = \sum_{q=0}^{l} a_q s^{l-q} + t(s) \sum_{q=0}^{l-1} b_q s^{l-q-1} = A(s) + t(s) B(s). \tag{10}$$

Определим вещественное частное решение уравнения (1) формулой

$$\Phi(s;\ x_1 + sx_2 + t(s)\,x_3) = \mathrm{Re}\,\frac{\varphi_l(x_1 + sx_2 + t(s)\,x_3)}{\Lambda(s)}. \tag{11}$$

2. Чтобы определить фундаментальное решение поставленной краевой задачи, мы, как было указано выше, проинтегрируем функцию (11) по всем вещественным значениям s, т. е. рассмотрим

$$F(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s;\ x_1 + sx_2 + t(s)\,x_3)\,ds. \tag{12}$$

Выясним вопрос о существовании интеграла (12). Так как, в силу эллиптичности уравнения (1), модуль отношения $\frac{t(s)}{s}$ при $|s| > 1$ остается ограниченным, то в любой точке области $x_3 > 0$

$$|x_1 + sx_2 + t(s)\,x_3| < M \cdot R \cdot |s|,$$

где M — некоторая постоянная, а $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Отсюда следует, что

$$|\varphi_l(x_1 + sx_2 + t(s)\,x_3)| < KR^{l-2}|s|^{l-2}\ln|s|.$$

Так как знаменатель функции Φ растет как $|s|^l$, то при достаточно больших $|s|$ справедливо неравенство

$$|\Phi(s;\ x_1 + sx_2 + t(s)\,x_3)| < C\,\frac{\ln|s|}{s^2}. \tag{13}$$

При $l = 1$ и $l = 0$ оценку можно еще улучшить, отбросив в правой части $\ln|s|$.

Во всяком случае уже из неравенства (13) следует, что интегралы

$$\int_{-\infty}^{-N} \Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)\,ds \quad \text{и} \quad \int_{N}^{\infty} \Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)\,ds$$

при $N \to \infty$ стремятся к нулю, и остается рассмотреть вопрос о сходимости интеграла от $\Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$ на любом конечном интервале.

Если многочлен $\Lambda(s)$, определенный формулой (11), не имеет вещественных нулей, то функция Φ непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом конечном интервале. В любой конечной части полупространства $x_3 > 0$ сходимость интеграла равномерна по x_1, x_2, x_3 и он определяет непрерывную функцию от этих переменных.

Предположим теперь, что многочлен $\Lambda(s)$ обращается в нуль в некоторых точках $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ на вещественной оси. Функция $\Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$ обращается в точках a_k в бесконечность, и интеграл (12) становится несобственным. Определим функцию $F(x_1, x_2, x_3)$ для этого случая следующим образом. Заменим вещественную ось линией C_ε, совпадающей с вещественной осью при $|s - a_k| > \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и обходящей точки a_k по окружностям радиуса ε, лежащим в верхней или нижней полуплоскости. Для каждой области вида $M > x_3 > \delta$, $|x_1| < M$, $|x_2| < M$ можно указать настолько малое ε, чтобы выражение $x_1 + sx_2 + t(s)x_3$ не обращалось в нуль, когда точка x_1, x_2, x_3 лежит в этой области, а s — внутри или на границе круга радиуса ε с центром на вещественной оси. Действительно, $\operatorname{Im} t(s) > K$ и, следовательно, $\operatorname{Im} t(s)x_3 > K\delta$, а $|\operatorname{Im}(x_1 + sx_2)| < M\varepsilon$. Поэтому при достаточно малом ε $\operatorname{Im}(x_1 + sx_2 + t(s)x_3) \neq 0$ и, следовательно, $x_1 + sx_2 + t(s)x_2 \neq 0$ в данной области.

При таком выборе ε у функции

$$(x_1 + sx_2 + t(s)x_3)^{l-2} \ln(x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$$

не будет особенностей на контуре C_ε и между этим контуром и вещественной осью. Так как при достаточно малом ε функция $\Lambda(\varepsilon)$ не обращается в нуль на C_ε и, следовательно, функция $\Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$ непрерывна на этой кривой, то интеграл

$$\int_{C_\varepsilon} \Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)\,ds \tag{14}$$

существует и сходится равномерно в области $|x_1| < M$, $|x_2| < M$, $\delta < x_3 < M$. Будем уменьшать ε. При этом интеграл (14) не будет меняться, так как функция $\Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$ в промежутке между C_ε и вещественной осью является однозначной аналитической функцией без особенностей. Поэтому в любой точке (x_1, x_2, x_3) полупространства $x_3 > 0$ существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} \Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)\,ds.$$

Положим

$$F(x_1, x_2, x_3) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} \Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)\, ds \tag{15}$$

и будем обозначать предел, стоящий справа, через

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, x_1 + sx_2 + t(s)x_3)\, ds.$$

Таким образом, формулу (12), определяющую фундаментальное решение, мы будем считать справедливой также тогда, когда функция $\Lambda(s)$ имеет вещественные нули, только в этом случае интеграл понимается в смысле (15).

Заметим, что предел (15) зависит от того, с какой стороны мы «обходим» вещественные нули, т. е. по какую сторону от вещественной оси в s-плоскости лежат окружности радиуса ε, обходящие точки a_k. При различных обходах получаются различные фундаментальные решения и, соответственно, различные решения данной краевой задачи.

Приведем пример. Пусть для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ поставлена в полупространстве задача

$$\lim_{z \to 0} \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y).$$

Соответствующая этой краевой задаче функция $\Phi(s, x + sy + t(s)z)$ имеет вид

$$\mathrm{Re}\, \frac{1}{s(x + sy + i\sqrt{1 + s^2}\, z)}$$

и фундаментальное решение

$$F(x, y, z) = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s(x + sy + t(s)z)}.$$

В точке $s = 0$ подинтегральная функция имеет полюс. При обходе этого полюса сверху и снизу мы получаем различные фундаментальные решения, отличающиеся друг от друга на вещественную часть интеграла от $\frac{1}{s(x + sy + i\sqrt{1 + s^2})}$ по окружности с центром в начале координат. Легко подсчитать, что интеграл по такой окружности равен $\frac{2\pi i}{x + iz}$ и вещественная часть интеграла (разность между двумя различными фундаментальными решениями) равна $\frac{2\pi z}{x^2 + z^2}$. При различном выборе фундаментальных решений (т. е. различном выборе пути интегрирования) мы получаем решения краевой задачи, отличающиеся на функцию

$$v(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \cdot f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{(x - \xi)^2 + z^2},$$

т. е. на гармоническую функцию переменных x, z, принимающую при $z = 0$ граничные значения $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \eta)\, d\eta$.

Мы определили фундаментальное решение $F(x_1, x_2, x_3)$ для краевого оператора Λ, заданного формулой (9). Очевидно, что все сказанное о сходимости интеграла (12) в такой же мере относится к интегралам от производных функции $\Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$ по x_1, x_2 и x_3. Порядок роста числителя при этом или понижается (при дифференцировании по x_1), или не изменяется (при дифференцировании по x_2 или x_3). Поэтому сходимость интеграла на бесконечности может только улучшиться. Что же касается того случая, когда знаменатель, т. е. $\Lambda(s)$, имеет вещественные нули, то интеграл от производных в этом случае надо понимать в том же смысле, как интеграл от самой функции Φ.

Таким образом, функцию $F(x_1, x_2, x_3)$, определенную формулой (12), можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз.

Так как функция $\Phi(s; x_1 + sx_2 + t(s)x_3)$ удовлетворяет уравнению (1), то отсюда следует, что функция $F(x_1, x_2, x_3)$ также удовлетворяет этому уравнению. При $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \to \infty$ и $l \geqslant 2$ функция $F(x_1, x_2, x_3)$ неограниченно возрастает. Оценим порядок возрастания этой функции. Так как

$$|x_1 + sx_2 + t(s)x_3| < RM|s|,$$

то

$$|\varphi_l(x_1 + sx_2 + t(s)x_3| < CR^{l-2}\ln R\,|s|^{l-2}\ln|s|$$

и

$$F(x_1, x_2, x_3) < C_1 R^{l-2}\ln R.$$

3. Покажем, что решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (4), определяется формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3) f(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2. \qquad (6)$$

В силу того что функция $f(\xi_1, \xi_2)$ достаточно быстро стремится к нулю при $\xi_1^2 + \xi_2^2 \to 0$ [см. условие (5)], этот интеграл сходится при любых x_1, x_2, x_3. В любой ограниченной области вида $|x_1| < M$, $|x_2| < M$, $\delta < x_3 < M$ его сходимость равномерна. Дифференцируя функцию (6) по x_1, x_2, x_3 под знаком двойного интеграла, мы понижаем порядок роста подынтегральной функции, т. е. улучшаем сходимость интеграла. Поэтому такое дифференцирование возможно.

Отсюда следует, что функция $u(x_1, x_2, x_3)$, определяемая формулой (6), удовлетворяет уравнению (1) в полупространстве $x_3 > 0$.

Покажем, что функция $u(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет краевому условию (3). Для этого возьмем произвольную точку P в полупространстве $x_3 > 0$ и вычислим $\Lambda u(P)$. В более подробной записи имеем:

$$u(P) = u(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \frac{1}{2\pi^2(l-2)!}\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{X^{l-2}\ln X}{\Lambda(s)}\,ds\right\} f(\xi_1\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2,$$

где $X = x_1 - \xi_1 + s(x_2 - \xi_2) + t(s)x_3$. Производя дифференциальную опера-

цию Λ под знаком всех трех интегралов, получим:

$$\Lambda u(P) = -\frac{1}{2\pi^2}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{[x_1-\xi_1+s(x_2-\xi_2)+t(s)x_3]^2}\right\}f(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2. \quad (16)$$

Найдем $\lim\limits_{P\to Q_0}\Lambda u(P)$, где Q_0 — точка плоскости $x_3=0$ с координатами x_1^0, x_2^0. Для этого рассмотрим подробнее внутренний интеграл по s. Обозначим

$$K[x_1-\xi_1+s(x_2-\xi_2)+t(s)x_3] = -\frac{1}{2\pi^2}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{[x_1-\xi_1+s(x_2-\xi_2)+t(s)x_3]^2}.$$

Вспоминая, что $t(s)$ есть лежащий в верхней полуплоскости корень уравнения

$$a_{11}+2a_{12}s+a_{22}s^2+2(a_{12}+a_{13}s)t+a_{33}t^2=0,$$

мы можем вычислить этот интеграл в конечном виде. В результате вычислений получается

$$K(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Delta}{2\pi}\frac{x_3}{\left[\sum\limits_{i,k=1}^{3}A_{ik}x_ix_k\right]^{\frac{3}{2}}},$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

а Δ — определитель этой матрицы.

Исходя из этого явного выражения для функции $K(x_1, x_2, x_3)$, непосредственным вычислением легко убедиться, что когда точка (x_1, x_2, x_3) стремится к точке $(x_1^0, x_2^0, 0)$ плоскости $x_3=0$, то

$$\Lambda u(P) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, x_3)f(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2$$

стремится к $f(x_1^0, x_2^0)$.

Тем самым доказано, что функция $u(x_1, x_2, x_3)$ формулы (6) есть решение поставленной краевой задачи для полупространства. Решение это заведомо не единственно. Если граничный оператор имеет порядок l, то к решению можно добавлять любой многочлен не выше $l-1$-й степени, удовлетворяющий уравнению. Само построенное решение имеет порядок роста на бесконечности такой же, как построенное фундаментальное решение, т. е. оно растет как $R^{l-2}\ln R$, где $R=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

4. Перейдем к общему случаю, т. е. предположим, что область D — произвольная выпуклая область с гладкой границей Γ, а коэффициенты краевого условия (2) — непрерывные и дифференцируемые на Γ функции. При этом мы уже не будем требовать, чтобы все входящие в оператор Λ производные имели в точности порядок l, а будем считать, что в каждой точке границы оператор Λ разбит на сумму дифференциальных операторов

$$\Lambda = \Lambda^{(l)} + \Lambda^{(l-1)} + \cdots + \Lambda^{(0)},$$

причем $\Lambda^{(k)}$ содержит только производные k-го порядка. Чтобы свести в этом случае решение поставленной краевой задачи к решению интегрального уравнения типа Фредгольма, построим решение уравнения (1) в области D, зависящее, как от параметра, от точки границы, и затем, интегрируя это решение с некоторой плотностью вдоль всей границы Γ, будем искать решение поставленной краевой задачи.

Обозначим через P произвольную внутреннюю точку области D, через Q — произвольную граничную точку, через T_Q — касательную плоскость к границе в точке Q. Введем отнесенную к точке Q аффинную систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, причем оси ξ_1 и ξ_2 предположим лежащими в плоскости T_Q, а ось ξ_3 — направленной внутрь области D.

Заменим краевой оператор Λ оператором с постоянными коэффициентами, взяв в качестве этих постоянных коэффициентов их значения в точке Q. После этого запишем дифференциальное уравнение и краевое условие в координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3. Мы получим некоторое уравнение

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik}^{Q} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_k} = 0$$

и краевое условие

$$\Lambda_Q u = \sum_{p+q+s\leqslant l} c_{p,\,q,\,s}^{Q} \frac{\partial^{p+q+s}}{\partial \xi_1^p\, \partial \xi_2^q\, \partial \xi_3^s},$$

где a_{ik}^Q и $c_{p,\,q,\,s}^Q$ — постоянные, зависящие от отнесенной к точке Q системы координат. Выделим из этого краевого условия главную часть $\Lambda^{(l)}$ (часть, содержащую только производные l-го порядка по различным комбинациям переменных) и запишем оператор $\Lambda_Q^{(l)}$ в том же каноническом виде, в каком мы записывали краевое условие для полупространства [см. формулу (3)]:

$$\Lambda_Q^{(l)} u = \sum_{q=0}^{l} a_q \frac{\partial^l u}{\partial \xi_1^q\, \partial \xi_2^{l-q}} + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \sum_{q=0}^{l-1} b_q \frac{\partial^{l-1}}{\partial \xi_1^2\, \partial \xi_2^{l-q-1}}.$$

По этому уравнению и краевому условию можно решить граничную задачу для полупространства $\xi_3 > 0$, содержащего область D. Решая такую задачу, мы должны построить функцию

$$F(\xi_1 - \xi_1',\ \xi_2 - \xi_2',\ \xi_3) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 (l-2)!} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\xi_1 - \xi_1' + s(\xi_2 - \xi_2') + t(s)\xi_3]^{l-2} \ln [\xi_1 - \xi_1' + s(\xi_2 - \xi_2') + t(s)\xi_3]}{\sum\limits_{q=1}^{l} a_q s^{l-q} + t(s) \sum\limits_{q=0}^{l-1} b_q s^{l-q-1}}\, ds, \tag{17}$$

являющуюся функцией от точки $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ полупространства $\xi_3 > 0$, точки $Q'(\xi_1', \xi_2', 0)$ плоскости $\xi_3 = 0$ и зависящую от точки Q, так как эта точка определяет выбор системы координат в пространстве и, следовательно, вид функции. Обозначим эту функцию сокращенно через $F_Q(P, Q')$. Заметим, что функция $F_Q(P, Q')$ не существенно зависит от того, как именно выбраны координатные оси ξ_1, ξ_2 в плоскости T_Q, так как если в интеграле

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+sy+t(s)z)^{l-2}\ln[x+sy+t(s)z]}{\sum_{q=0}^{l} a_q s^{l-q} + t(s)\sum_{q=0}^{l-1} b_q s^{l-q-1}}\, ds$$

произвести линейную замену переменных

$$\frac{y}{x} = \frac{\alpha x' + \beta y'}{\gamma x' + \delta y'}$$

и преобразовать к соответствующим переменным дифференциальный оператор

$$\sum_{q=0}^{l} a_q \frac{\partial^l u}{\partial x^q\, \partial y^{l-2}} + \frac{\partial}{\partial z}\sum_{q=0}^{l-1} b_q \frac{\partial^{l-1} u}{\partial x^q\, \partial y^{l-q-1}},$$

то, выбрав подходящим образом новую переменную интеграции $\left(s' = \dfrac{\delta + s\beta}{\gamma + s\alpha}\right)$, мы можем записать наш интеграл в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[x'+s'y'+t'(s')z]^{l-2}\ln[x'+s'y'+t'(s')z]}{\sum_{q=0}^{l} \tilde{a}_q s'^{\,l-q} + t'(s)\sum_{q=0}^{l-1} \tilde{b}_q s'^{\,l-q-1}}\, ds' + g(x', y', z'),$$

где $\tilde{a}_q$ и $\tilde{b}_q$—коэффициенты преобразованного дифференциального оператора, а $g(x', y', z')$ — многочлен степени $l-2$, представляющий решение однородной краевой задачи.

Из построения следует, что по координатам точки P функция $F_Q(P, Q')$ удовлетворяет уравнению (1). Положим $Q' = Q$ и рассмотрим интеграл по поверхности Γ:

$$u(P) = \iint_{\Gamma} F_Q(P, Q)\,\rho(Q)\, d\sigma_Q. \tag{18}$$

Здесь $\rho(Q)$ — пока произвольная функция на поверхности. Так как при любом фиксированном значении Q функция $F_Q(P, Q)$ удовлетворяет уравнению (1), то и функция $u(P)$, определенная интегралом (18), удовлетворяет этому уравнению при произвольной интегрируемой функции $\rho(Q)$. Определим фуницию $\rho(Q)$ так, чтобы выполнялось краевое условие (2). Для этого применим дифференциальный оператор Λ к функции $u(P)$, определенной равенством (18). Взяв точку P настолько близко к границе,

чтобы граничный оператор был определен в этой точке, применим оператор Λ к функции $u(P)$ под знаком двойного интеграла и к функции $F_Q(P, Q)$ — под знаком интеграла по s [см. формулу (17) при $Q = Q'$, т. е. $\xi_1' = \xi_2' = 0$]. При этом под знаком интеграла по s мы получим сумму нескольких слагаемых. Производные порядка l, входящие в оператор Λ, дадут выражение вида

$$-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum\limits_{q=0}^{l} a_q(P)\, s^{l-q} + t(s)\sum\limits_{q=0}^{l-1} b_q(P)\, s^{l-q-1}}{\sum\limits_{q=0}^{l} a_q s^{l-q} + t(s)\sum\limits_{q=0}^{l-1} b_q s^{l-q-1}}\cdot\frac{ds}{[\xi_1 + s\xi_2 + l(s)\,\xi_3]^2}, \qquad (19_1)$$

где $a_q(P)$ и $b_q(P)$ — значения коэффициентов оператора $\Lambda^{(l)}$ в точке P, а a_q и b_q — значения этих коэффициентов в точке Q. Производные порядка $l-1$ дадут выражение вида

$$\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum\limits_{q=0}^{l-1} a_q'(P)\, s^{l-q-1} + t(s)\sum\limits_{q=0}^{l-2} b_q'(P)\, s^{l-q-s}}{\sum\limits_{q=0}^{l} a_q s^{l-2} + t(s)\sum\limits_{q-0}^{l-1} b_q s^{l-q-1}}\cdot\frac{ds}{\xi_1 + s\xi_2 + t(s)\,\xi_3}, \qquad (19_2)$$

где $a_q'(P)$ и $b_q'(P)$ — коэффициенты $\Lambda^{(l-1)}$ в точке P, производные порядка $l-2$ — выражение вида

$$\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum\limits_{q=0}^{l-2} a_q''(P)\, s^{l-q-2} + t(s)\sum\limits_{q=0}^{i-2} b_q''(P)\, s^{l-q-s}}{\sum\limits_{q=0}^{l} a_q s^{l-2} + t(s)\sum\limits_{q=0}^{l-1} b_q s^{l-q-1}}\,\ln(\xi_1 + s\xi_2 + t(s)\,\xi_3)\,ds, \qquad (19_3)$$

где $a_q''(P)$ и $b_q''(P)$ — коэффициенты $\Lambda^{(l-2)}$ в точке P, и т. д. При этом в точке P оператор Λ рассматривается также в координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3. Обозначим функцию (19_1) через $K_l(P, Q)$, функцию (19_2) — через $K_{l-1}(P, Q)$ и т. д., а сумму

$$K_l(P, Q) + K_{l-1}(P, Q) + \cdots$$

— через $K(P, Q)$. Тогда

$$\Lambda u(P) = \iint\limits_{\Gamma} K(P, Q)\,\rho(Q)\,d\sigma_Q.$$

Чтобы удовлетворить краевому условию (3), найдем предел

$$\lim_{P\to Q_0}\iint\limits_{\Gamma} K(P, Q)\,\rho(Q)\,d\sigma_Q.$$

Для нахождения этого предела разобьем поверхность интегрирования Γ на две части: через Γ_ε обозначим ту часть поверхности, которая проектируется в плоскости T_Q в круг радиуса ε с центром в точке Q_0; остальную часть поверхности обозначим через $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$.

Когда $P \to Q_0$, а Q лежит на $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$, то подинтегральная функция не имеет особенностей и

$$\lim_{P \to 0} \iint_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} K(P, Q)\, \rho(Q)\, d\sigma_Q = \iint_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} K(Q_0, Q)\, \rho(Q)\, d\sigma_Q.$$

Рассмотрим

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon} K(P, Q)\, \rho(Q)\, d\sigma_Q.$$

Ядро $K(P, Q)$ этого интеграла состоит из слагаемых $K_l(P, Q)$, $K_{l-1}(P, Q)$, $K_{l-2}(P, Q)$ и т. д., которые при $P = Q$ имеют особенности различных порядков. Интегралы

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon} K_{l-1}(P, Q)\, \rho(Q)\, d\sigma_Q,$$

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon} K_{l-2}(P, Q)\, \rho(Q)\, d\sigma_Q$$

и т. д., подинтегральные функции которых имеют особенности не выше первого порядка, стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, как бы ни была расположена точка P (в том числе и при $P = Q_0$). Что же касается первого интеграла

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon} K_l(P, Q)\, \rho(Q)\, d\sigma_Q =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \iint_{\Gamma_\varepsilon} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\sum_0^l a_q(P)\, s^{l-q} + t(s) \sum_0^{l-1} b_q(P)\, s^{l-q-1} \right) ds}{\left(\sum_0^l a_q s^{l-q} + t(s) \sum_0^{l-1} b_q s^{l-q-1} \right) (\xi_1 + s\xi_2 + t(s)\xi_3)^2} \right\} \rho(Q)\, d\sigma_Q, \quad (20)$$

то его предел при $P \to Q_0$ равен $\mu(Q_0) + \varphi(\varepsilon)$, где $\varphi(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Докажем это. Для этого заметим, что при P, близком к Q, дробь

$$\frac{\sum a_q(P)\, s^{l-q} + t(s) \sum b_q(P)\, s^{l-q-1}}{\sum a_q s^{l-q} + t(s) \sum b_q\, s^{l-q-1}}$$

сколь угодно мало отличается от единицы, и мы можем записать ее в виде

$$1 + \psi(P, Q, s),$$

где $\psi(P, Q, s) \to 0$ при $P \to 0$. Следовательно, при вычислении предела интеграла (20) мы можем заменить указанную дробь единицей.

Преобразуем функцию $\frac{1}{(\xi_1 + s\xi_2 + t(s)\xi_3)^2}$ к координатам, связанным с точкой Q_0, а интегрирование по Γ_ε заменим интегрированием по Γ_ε' проекции Γ_ε на плоскость T_{Q_2}. Если ε достаточно мало, то интеграл (20) изменится при этом сколь угодно мало, т. е. мы можем утверждать, что

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{(\xi_1+s\xi_2+t(s)\xi_3)^2}\right\}\rho(Q)\,d\sigma_Q=$$

$$=\iint_{\Gamma'_\varepsilon}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{[\tilde\xi_1-\tilde\xi'_1+s(\tilde\xi_2-\tilde\xi'_2)+t(s)\tilde\xi_3]^2}\right\}\rho(\tilde\xi'_1\tilde\xi'_2)\,d\tilde\xi'_1\,d\tilde\xi'_2+\chi(\varepsilon),$$

где $\tilde\xi_i$ — координаты точки P в системе, отнесенной к точке Q_0, $(\tilde\xi'_1, \tilde\xi'_2, 0)$ — координаты проекции точки Q на плоскость T_{Q_0} в той же системе, а под $\rho(\tilde\xi'_1, \tilde\xi'_2)$ понимается просто $\rho(Q)$. Дифференциал поверхности $d\sigma_Q$ мы заменяем при этом на $d\tilde\xi'_1 d\tilde\xi'_2$, также совершая малую ошибку, так как поверхность предполагается гладкой и, следовательно, на малом участке она сколь угодно мало отклоняется от касательной плоскости. Таким образом, можно утверждать, что $\chi(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Но из результатов п. 3, в котором приведен явный вид функции

$$-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{[\tilde\xi_1-\tilde\xi'_1+s(\tilde\xi_2-\tilde\xi'_2)+t(s)\tilde\xi_3]^2},$$

следует, что

$$\lim_{P\to Q_0}-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\iint_{\Gamma'_\varepsilon}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{[\tilde\xi_1-\tilde\xi'_1+s(\tilde\xi_2-\tilde\xi'_2)+t(s)\tilde\xi_3]^2}\right\}\rho(\tilde\xi'_1,\ \tilde\xi'_2)\,d\tilde\xi'_1\,d\tilde\xi'_2=\rho(Q_0).$$

Таким образом, наше утверждение доказано.

Заставляя ε стремиться к нулю, мы получим окончательный результат:

$$\lim_{P\to Q_0}\iint_{\Gamma}K(P,\ Q)\,\rho(Q)\,d\sigma_Q=\iint_{\Gamma}K(Q_0,\ Q)\,\rho(Q)\,d\sigma_Q+\rho(Q_0).$$

Итак, если функция $\rho(Q)$ выбрана таким образом, что удовлетворяется условие

$$\rho(Q_0)+\iint_{\Gamma}K(Q_0,\ Q)\,\rho(Q)\,d\sigma_Q=f(Q_0), \tag{21}$$

то решение $u(P)$, заданное формулой (18), удовлетворяет поставленному краевому условию.

Условие (21) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма относительно функции $\rho(Q)$. Это уравнение разрешимо, если его правая часть ортогональна конечному числу функций (решениям сопряженного интегрального уравнения). Таким образом, мы можем утверждать, что поставленная краевая задача имеет решение, если функция удовлетворяет не более чем конечному числу условий. Этот результат следует из работ М. И. Вишика ([2]) и ([3]), относящихся к одному уравнению.

§ 2

Перейдем к рассмотрению общей краевой задачи для эллиптических систем уравнений. Мы будем рассматривать линейные системы произвольного порядка k с постоянными коэффициентами, причем будем требовать, чтобы эти системы были однородны относительно операции дифференцирования, т. е. содержали только производные наивысшего k-го порядка. Такие системы удобно записывать в виде

$$\sum_{i_1+i_2+i_3=k} A_{i_1, i_2, i_3} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} = 0, \tag{1}$$

где u — n-мерный вектор с компонентами $u^1, u^2, \ldots, u^\nu, \ldots, u^n$ и A_{i_1, i_2, i_3} — квадратная матрица n-го порядка из коэффициентов при производных

$$\frac{\partial^k u^\nu}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \partial x_3^{i_3}}.$$

Эллиптичность системы, как известно, означает положительную определенность формы порядка kn от переменных s^1, s^2, s^3:

$$\det \left\| \sum_{i_1+i_2+i_3=k} A_{i_1, i_2, i_3} (s^1)^{i_1} (s^2)^{i_2} (s^3)^{i_3} \right\|. \tag{2}$$

Очевидно, что для эллиптической системы произведение порядка системы k на число уравнений и неизвестных n должно быть четным числом.

Предположим, что на границе Γ области D задано $\frac{1}{2} kn$ линейных дифференциальных операторов l-го порядка над вектором u:

$$\Lambda_\mu u = \sum_{\nu=1}^{n} \sum\sum_{k_1+k_2+k_3 \leqslant l} c_{k_1 k_2 k_3}^{\mu\nu} \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3} u^\nu}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} \quad \left(\mu = 1, 2, \ldots, \frac{kn}{2}\right). \tag{3}$$

Если граница области D — достаточно гладкая поверхность, а коэффициенты $c_{k_1 k_2 k_3}^{\mu\nu}$ — непрерывные функции, то мы непрерывно продолжим заданные операторы на некоторую граничную полоску внутрь области.

Общая краевая задача для системы (1) ставится следующим образом: найти решение системы в области D такое, что

$$\lim_{P \to Q} \Lambda_\mu u(P) = f_\mu(Q) \quad \left(\mu = 1, 2, \ldots, \frac{kn}{2}\right), \tag{4}$$

где P — точка области D, Q — точка границы Γ, а $f_\mu(Q)$ — произвольные непрерывные функции, заданные на границе. Более компактно можно записать краевое условие (4) в форме

$$\lim_{P \to Q} \Lambda u(P) = f(Q), \tag{4'}$$

где Λ — прямоугольная матрица дифференциальных операторов с $\frac{kn}{2}$ строками и n столбцами, а f — $\frac{kn}{2}$-мерная вектор-функция.

В статье М. И. Вишика [4] для некоторых классов эллиптических систем (так называемые сильно эллиптические системы) рассматривается краевая задача, в которой дифференциальный оператор, заданный на границе, имеет достаточно низкий порядок. Для таких краевых задач доказывается справедливость трех теорем, аналогичных теоремам Фредгольма, и ряд других результатов.

1. Аналогично тому, как мы делали это в случае одного уравнения, предположим сначала, что область D совпадает с полупространством $x_3 > 0$, а операторы Λ_μ содержат только производные l-го порядка с постоянными коэффициентами. При этих предположениях мы построим матрицу F фундаментальных решений для задачи (4). Под этим понимается матрица с n строками и $\frac{kn}{2}$ столбцами из функций от $x_1 - \xi_1$, $x_2 - \xi_2$ и x_3, каждый столбец которой при $x_3 > 0$ дает решение системы (1), а вектор

$$u(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x_1 - \xi_1, \ x_2 - \xi_2, x_3) f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \tag{5}$$

удовлетворяет как системе (1), так и краевым условиям (4).

Для построения матрицы фундаментальных решений заметим, что для системы (1), в силу ее линейности и однородности относительно операции дифференцирования, естественно искать решения вида:

$$u = g\left(\sum_{i=1}^{3} x_i s^i, \ s^1, \ s^2, \ s^3\right),$$

где g — n-мерная вектор-функция, а s^1, s^2, s^3 — постоянные. Подстановкой в систему легко убедиться, что такое решение существует только для тех значений s^i, для которых матрица

$$\left\| \sum_{i_1+i_2+i_3=k} A_{i_1 i_2 i_3} (s^1)^{i_1} (s^2)^{i_2} (s^3)^{i_3} \right\| \tag{6}$$

вырождена, и оно равно в этом случае

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{3} x_i s^i\right) u_0 (s^1, \ s^2, \ s^3),$$

где φ — произвольная скалярная, достаточное число раз дифференцируемая функция, а u_0 — вектор, аннулируемый матрицей (6). Соответствующие значения параметров s^i должны при этом удовлетворять уравнению

$$D(s^1, \ s^2, \ s^3) = \left| \sum_{i_1+i_2+i_3=k} A_{i_1 i_2 i_3} (s^1)^{i_1} (s^2)^{i_2} (s^3)^{i_3} \right| = 0, \tag{7}$$

определяющему, например, переменную s^3 как функцию от s^1 и s^2. В силу однородности уравнения (7), s^3 фактически зависит только от отношения $\frac{s^2}{s^1}$ и, полагая $s_1 = 1$, $s_2 = s$ и $s_3 = t$, мы получаем уравнение

$$D(1, s, t) = 0, \tag{7'}$$

определяющее переменную t как целую алгебраическую функцию s. Из эллиптичности системы следует, что при вещественных s $t(s)$ может принимать только комплексно сопряженные значения. Обозначим их через

$$t_1(s),\ t_2(s),\ \ldots,\ t_{\frac{kn}{2}}(s),\ \overline{t_1(s)},\ \overline{t_2(s)},\ \ldots,\ \overline{t_{\frac{kn}{2}}(s)},$$

причем будем предполагать, что $\operatorname{Im} t_\alpha(s) > 0$, а $\operatorname{Im} \overline{t_\alpha(s)} < 0$ на всей вещественной оси. Как и в случае одного уравнения, мы можем предполагать даже, что

$$\operatorname{Im} t_\alpha(s) > K > 0, \quad \text{а} \quad \operatorname{Im} \overline{t_\alpha(s)} < -K.$$

Каждому корню $t_\alpha(s)$ уравнения (7′) отвечает по крайней мере один, определенный с точностью до множителя вектор, переводящийся в нуль матрицей (6). Обозначим этот вектор через u_α. В силу вещественности системы можно также считать, что комплексно сопряженным корням уравнения (7′) отвечают векторы с комплексно сопряженными компонентами.

Таким образом, для каждого вещественного s мы получаем kn попарно сопряженных нуль-векторов

$$u_\alpha(s) = u(s, t_\alpha(s)),\ \overline{u_\alpha}(s) = u(s, \overline{t_\alpha(s)}) \quad \left(\alpha = 1, 2, \ldots, \frac{kn}{2}\right).$$

Для определенности предположим компоненты $u_\alpha(s)$ равными многочленам относительно s и t, а именно алгебраическим дополнениям фиксированного столбца матрицы (6) при $s_1 = 1$, $s_2 = s$, $s_3 = t_\alpha(s)$. Функцию $\varphi(x_1 + sx_2 + t_\alpha(s) z)$ выберем, как и в случае одного уравнения, в зависимости от порядка краевого условия, а именно положим:

$$\varphi_l(z) = \frac{1}{4\pi^2 (l-2)!} z^{l-2} \ln z \quad \text{при} \quad l \geqslant 2,$$

$$\varphi_l(z) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{z} \quad \text{при} \quad l = 1,$$

$$\varphi_l(z) = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{z^2} \quad \text{при} \quad l = 0.$$

Таким образом, l-я производная от функции $\varphi_l(z)$ при любом l равна $-\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{z^2}$. Ветвь логарифма при $l \geqslant 2$ фиксируется произвольно (см. подстрочное примечание на стр. 541).

Для дальнейшего удобно записать полученные решения в виде произведения матрицы U, каждый столбец которой состоит из компонент нуль-вектора

$$U = \begin{pmatrix} u_1^1\, u_2^1\, u_3^1 \ldots u_{\frac{kn}{2}}^1\, \overline{u}_1^1\, \overline{u}_2^1\, \overline{u}_3^1 \ldots \overline{u}_{\frac{kn}{2}}^1 \\ u_1^2\, u_2^2\, u_3^2 \ldots u_{\frac{kn}{2}}^2\, \overline{u}_1^2\, \overline{u}_2^2\, \overline{u}_3^3 \ldots \overline{u}_{\frac{kn}{2}}^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1^n\, u_2^n\, u_3^n \ldots u_{\frac{kn}{2}}^n\, \overline{u}_1^n\, \overline{u}_2^n\, \overline{u}_3^n \ldots \overline{u}_{\frac{kn}{2}}^n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

на диагональную матрицу Φ, на диагонали которой стоят функции $\varphi_l(x_1 + sx_2 + t_\alpha(s)\,x_3)$ с различными значениями α:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_l(x_1+sx_2+t_1(s)\,x_3) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_l(x_1+sx_2+t_2(s)\,x_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_l(x_1+sx_2+\bar{t}_{\left|\frac{kn}{2}\right|}(s)x_3) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

kn столбцов матрицы $U\Phi$ представляют собой kn попарно сопряженных решений системы (1). Произвольную n-строчную матрицу, каждый столбец которой есть решение системы, мы будем называть для краткости «матрицей решений». Легко проверить, что умножение матрицы решений справа на произвольную, не зависящую от x_1, x_2, x_3 матрицу, дает снова матрицу решений. Поставим себе целью подобрать такую матрицу B, зависящую только от s, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} U\Phi B\,ds$$

по всем вещественным значениям s дал нам матрицу фундаментальных решений. Очевидно при этом, что у B должно быть $\frac{kn}{2}$ столбцов и kn строк.

Так как мы ищем вещественные решения, а у матрицы $U\Phi$ столбцы от $\frac{kn}{2}+1$ до kn комплексно сопряжены столбцам от 1 до $\frac{kn}{2}$ соответственно (в силу комплексной сопряженности соответствующих значений $t_\alpha(s)$), то у матрицы B последние $\frac{kn}{2}$ строк должны быть сопряжены первым. Каждая из этих матриц состоит, таким образом, из двух комплексно сопряженных «половин».

Легко видеть, что матрица $U\Phi B$ с $\frac{kn}{2}$ столбцами и n строками может быть получена как удвоенная вещественная часть произведения «левой половины» матрицы $U\Phi$ на «верхнюю половину» матрицы B. Мы будем поэтому понимать под U матрицу нуль-векторов, отвечающих значениям $t_\alpha(s)$, для которых $\operatorname{Im} t_\alpha(s) > 0$, а под $U\Phi$ — матрицу соответствующих решений (с n строками и $\frac{kn}{2}$ столбцами). Тогда в качестве B мы должны взять квадратную матрицу порядка $\frac{kn}{2}$ и искомая матрица фундаментальных решений будет иметь вид

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} U\Phi B\,ds. \tag{10}$$

Для выбора матрицы B рассмотрим результат применения краевого оператора Λ к матрице решений $U\Phi$.

Предварительно преобразуем граничные условия при помощи системы (1) и всевозможных систем, полученных из нее дифференцированиями,

исключив из всех операторов производные по x_3 выше $(k-1)$-го порядка. Краевой оператор в этом случае приобретает вид

$$\Lambda u = A_l u + \frac{\partial}{\partial x_3} A_{l-1} u + \cdots + \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_3^{k-1}} A_1 u,$$

где A_p — матрица дифференциальных операторов порядка p относительно переменных x_1 и x_2.

Применим этот дифференциальный оператор к матрице $U\Phi$, т. е. к каждому из столбцов этой матрицы. Дифференцирование решений по x_1, x_2, x_3 означает дифференцирование каждой функции $\varphi_l(x_1 + sx_1 + t_\alpha(s)\,x_3)$ по ее аргументу и умножение на 1, s и $t_\alpha(s)$ соответственно.

Если обозначить через $A_p(s)$ матрицу из многочленов, полученных заменой в дифференциальных операторах A_p дифференцирования по x_1 и x_2 умножением соответственно на 1 и s, а через T — диагональную матрицу порядка $\frac{kn}{2}$ из функций $t_1(s), t_2(s), \ldots, t_{\frac{kn}{2}}(s)$, то после применения оператора Λ к матрице решений $U\Phi$ мы получим матрицу

$$\left(A_l(s)\,U + A_{l-1}(s)\,U\cdot T + A_{l-2}(s)\,T^2 + \cdots + A_1(s)\,U\cdot T^{k-1}\right)\Phi^{(l)},$$

где $\Phi^{(l)}$ — диагональная матрица из производных l-го порядка от функций $\varphi_l(x_1 + sx_2 + t(s)\,x_3)$, т. е. из функций

$$-\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{[x_1 + sx_2 + t(s)\,x_3]^2}.$$

Матрица

$$A_l(s)\,U + A_{l-1}(s)\,UT + \cdots + A_1(s)\,UT^{l-1} = \sum_{p=1}^{l} A_p U T^{l-p} \tag{11}$$

— квадратная матрица порядка $\frac{kn}{2}$.

Мы предположим, что определитель этой матрицы не равен тождественному нулю. Это предположение выделяет класс краевых задач, которые мы назовем нормальными и рассмотрением которых ограничимся. Заведомо не будут нормальными такие краевые условия, которые противоречат системе. Так, например, для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ нельзя ставить краевое условие $\Delta u|_\Gamma = f$, так как задача не может иметь решения при $f \not\equiv 0$. Могут ли не быть нормальными задачи, в которых ни один из операторов, заданных на границе, не является комбинацией уравнений системы или производных от их уравнений, мы не знаем.

Предположим, далее, что при $s \to \infty$ определитель матрицы (11) растет не медленнее, чем $s^{(l+\omega)\frac{kn}{2}}$, где l — порядок краевого оператора Λ, а ω — наивысший порядок роста при $s \to \infty$ элементов матрицы U. Это предположение не является ограничением на систему и на краевые условия, так как при произвольных s^1, s^2 и s^3 этот определитель есть форма порядка

$(l+\omega)\frac{kn}{2}$. Произведя надлежащее аффинное преобразование переменных s^1 и s^2 (и одновременно сопряженное преобразование переменных x^1, x^2), мы можем добиться того, чтобы преобразованная переменная s^2 входила в определитель в наибольшей возможной степени.

Для нормальной краевой задачи определитель имеет конечное число нулей в точках $a_1, a_2, \ldots, a_N$ и для всех значений s, отличных от a_k, матрица $\sum\limits_{p=0}^{l} A_p U T^{l-p}$ имеет обратную. Положим

$$= \left(\sum_{p=1}^{l} A_p U T^{l-p}\right)^{-1}. \qquad (12)$$

Элементы матрицы $B(s)$ — рациональные функции от $s_1, t_1, \ldots, t_{\frac{kn}{2}}$, которые могут иметь полюсы только в точках a_k.

Матрица фундаментальных решений $F(x_1, x_2, x_3)$ определится тогда формулой

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U\Phi\left(\sum_{p=1}^{l} A_p U T^{l-p}\right)^{-1} ds. \qquad (13)$$

При этом, если среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N$ нет вещественных, то интеграл понимается в обычном смысле, а если у подинтегральной функции имеются вещественные полюсы, то под интегралом (13) понимается предел интеграла по контуру C_ε, обходящему эти вещественные полюсы по полуокружностям радиуса ε так же, как это делалось в случае одного уравнения.

2. Докажем, что интеграл (13) существует и действительно представляет собой матрицу фундаментальных решений для системы (1).

ТЕОРЕМА 1. *Интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} U\Phi\, B\, ds$ *существует и представляет собой матрицу непрерывных функций в любой области вида* $|x_1| < M$, $|x_2| < M$, $\delta < x_3 < M$, *где* δ — *как угодно малое, а* M — *как угодно большое положительное число.*

Для доказательства теоремы выберем путь интегрирования следующим образом. Если ни один полюс элементов матрицы $B(s)$ не лежит на вещественной оси, то за путь интегрирования примем вещественную ось, а если у $B(s)$ имеются вещественные полюсы, то «обойдем» их по окружностям настолько малого диаметра, чтобы ни для каких x_1, x_2, x_3 из рассматриваемой области на линии C_ε не обращалось в нуль выражение $x_1 + sx_2 + t(s)x_3$. (Доказательство того, что это возможно, ничем не отличается от приведенного на стр. 543—544.) При этом подинтегральная функция будет непрерывна в любой конечной точке контура интегрирования, и остается только доказать, что сходимость интегралов на бесконечности равномерна по x_1, x_2, x_3.

Действительно, так как определитель матрицы (11) по предположению растет не медленнее, чем $s^{(l+\omega)\frac{kn}{2}}$ (см. стр. 556), то элементы матрицы B, обратной к (11), убывают не медленней, чем $\frac{C}{s^{l+\omega}}$. Так как через ω обозначен наивысший порядок роста при $s \to \infty$ элементов матрицы U, то отсюда следует, что всякое произведение u_α^ν на b_α^μ, где u_α^ν и b_α^μ — элементы соответствующих матриц, при больших s удовлетворяет неравенству

$$|u_\alpha^\nu(s)\, b_\mu^\alpha(s)| < \frac{K}{|s|^l}.$$

Оценим теперь $\varphi_l(x_1, + sx_2 + t(s)\, x_3)$. Очевидно, что в рассматриваемой области

$$|x_1 + sx_2 + t(s)\, x_3| < K(M) \cdot |s|.$$

Отсюда получим оценку

$$|\varphi_l(x_1 + sx_2 + t_\alpha(s)\, x_3| <$$

$$< \left|\frac{1}{4\pi^2(l-2)!}\right| (x_1 + sx_2 + t(s)\, x_3)^{l-2} \ln(x_1 + sx_2 + t(s)\, x_3)| < B\, |s|^{l-2} \ln |s|,$$

где постоянная B зависит от выбранной области. Для $l = 1$ и $l = 0$ получим соответственно

$$|\varphi_l(x_1 + sx_2 + t(s)\, x_3| < \frac{B}{s}$$

и

$$|\varphi_l(x_1 + sx_2 + t(s)\, x_3)| < \frac{B}{s^2}.$$

Для элементов матрицы $U\Phi B$ при $l \geqslant 2$ получаем оценку

$$\left|\sum_\alpha u_\alpha^\nu \varphi_l(x_1 + sx_2 + t_\alpha(s)\, x_3) \cdot b_\mu^\alpha\right| < H\, \frac{\ln|s|}{s^2};$$

при $l = 1$ и $l = 0$ оценка еще улучшается за счет отсутствия логарифма. Следовательно, интегралы от всех элементов $U\Phi B$ абсолютно и равномерно сходятся в рассматриваемой области. Так как при $\varepsilon \to 0$ эти интегралы вообще не меняются, то тем самым теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2. *В любой точке* (x_1, x_2, x_3) *области* $x_3 > 0$ *производные любого порядка интеграла* (13) *могут быть найдены дифференцированием под знаком интеграла.*

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1. А именно, продифференцировав формально функцию (13) под знаком интеграла, мы доказываем равномерную сходимость полученных интегралов в любой конечной области полупространства $x_3 > 0$.

Из теоремы 2 следует, что полученная матрица есть матрица решений. Действительно, так как каждый столбец матрицы $U\Phi$ при любом s есть решение системы (1) и матрица $U\Phi B$ обладает тем же свойством, то

и матрица $F(x_1, x_1, x_3)$, полученная из матрицы решений интегрированием по параметру s, также есть матрица решений.

Найдем теперь результат применения граничного оператора к матрице $F(x_1 x_2, x_3)$ (т. е. к ее столбцам). Как было найдено выше, применяя граничный оператор к матрице $U\Phi$, мы получим матрицу

$$\sum_{p=1}^{l} A_p UT^{l-p} \Phi^{(l)},$$

где $\Phi^{(l)}$ есть диагональная матрица из функций

$$-\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(x_1 + sx_2 + t_\alpha(s)\, x_3)^2}.$$

Таким образом,

$$\Lambda F(x_1 x_2, x_3) =$$

$$= 2\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{l} A_p UT^{l-p} \right) \Phi^l (x_1 + sx_2 + t_\alpha(s)\, x_3) \left(\sum_{p=1}^{l} A_p UT^{l-p} \right)^{-1} ds. \quad (14)$$

Элементы матрицы (14) совпадают с интегралами, полученными в работе ([5]). В этой работе в несколько иных обозначениях доказано, что если $f(\xi_1, \xi_2)$ — некоторая вектор-функция, то

$$\lim_{x_3 \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2\,\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} B^{-1}(s)\, \Phi^l [x_1 - \xi_1 + s(x_2 - \xi_2) + t_\alpha(s)\, x_3]\, B(s)\, ds \right\} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= f(x_1, x_2). \quad (15)$$

Тот факт, что матрица $\sum_{p=1}^{l} A_p UT^{l-p}$ совпадала в указанной работе просто с матрицей U, для доказательства не является существенным.

Исходя из этих соображений, мы можем считать, что если вектор-функция

$$u(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F[x_1 - \xi_1 + s(x_2 - \xi_2) + t(s)\, x_3]\, f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \quad (16)$$

где $F(x_1, x_2, x_3)$ определено формулой (13), существует, удовлетворяет дифференциальному уравнению и если можно применять к этой функции дифференциальный оператор Λ под знаком двойного интеграла, то $u(x_1, x_2, x_3)$ представляет собой решение поставленной задачи.

ТЕОРЕМА 3. *Если вектор-функция $f(\xi_1, \xi_2)$ удовлетворяет условию*

$$|f(\xi_1, \xi_2)| \quad \frac{C}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{l+1}{2}}},$$

то интеграл (16) сходится и производные любого порядка от функции $u(x_1, x_2, x_3)$ можно находить дифференцированием под знаком интеграла.

Для доказательства теоремы оценим порядок возрастания функции $F(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3)$ при $(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2 \to \infty$. Вводя обозначения

$$\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}=R,$$

$$\frac{x_1-\xi_1}{R}=\tilde{x}_1, \quad \frac{x_2-\xi_2}{R}=\tilde{x}_2, \quad \frac{x_3}{R}=\tilde{x}_3,$$

и пользуясь тем, что

$$x_1-\xi_1+s(x_2-\xi_2)+t_\alpha(s)x_3=R(\tilde{x}+s\tilde{x}_2+t(s)\tilde{x}_3),$$

мы можем положить

$$\varphi_l(x_1+sx_2+t_\alpha(s)x_3)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2(l-2)!}(x_1+sx_2+t_\alpha(s)x_3)^{l-2}\ln(x_1+sx_2+t(s)x_3)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2(l-2)!}R^{l-2}\ln R\cdot(\tilde{x}_1+s\tilde{x}_2+t_\alpha(s)\tilde{x}_3)^{l-2}-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2(l-2)!}R^{l-2}\varphi_l(\tilde{x}_1+s\tilde{x}_2+t(x)\tilde{x}_3).$$

Так как интеграл

$$2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}U(s)\Phi(\tilde{x}_1+s\tilde{x}_2+t(s)\tilde{x}_3)B(s)\,ds$$

ограничен при любых $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ и $\tilde{x}_3$ $(\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2+\tilde{x}_3^2=1)$ и тем более ограничен интеграл, в котором вместо матрицы $\Phi(\tilde{x}_1+s\tilde{x}_2+t(s)\tilde{x}_3)$ стоит матрица из функций

$$\frac{1}{4\pi^2(l-2)!}(\tilde{x}_1+s\tilde{x}_2+t_\alpha(s)\tilde{x}_3)^{l-2},$$

то

$$F(x_1-\xi_1+s(x_2-\xi_2)+t(s)x_3)<R^{l-2}\ln R\tilde{F}(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3), \qquad (17)$$

где $\tilde{F}$ — матрица из функций, ограниченных при любых $x_1-\xi_1$, $x_2-\xi_2$ и $x_3>0$. С другой стороны, для всякой области вида $|x_1|<M$, $|x_2|<M$, $\delta<x_3<M$ существует постоянная A такая, что

$$\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}>A\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2},$$

где ξ_1 и ξ_2 произвольны, а точка (x_1, x_2, x_3) принадлежит области $|x_1|<M$, $|x_2|<M$, $\delta<x_3<M$. Для данной области изменения x_1, x_2, и x_3 мы имеем, следовательно,

$$f(\xi_1,\ \xi_2)<\frac{C}{A^{l+1}R^{l+1}}. \qquad (18)$$

Пользуясь оценками (17) и (18), мы убеждаемся, что подинтегральная функция в формуле (16) при $|x_1|<M$, $|x_2|<M$, $\delta<x_3<M$ по абсолютной величине не превосходит некоторой постоянной, умноженной на $\frac{\ln R}{R^3}$, и, следовательно, интеграл от этой функции по ξ_1 и ξ_2 сходится в данной области равномерно.

После каждого дифференцирования $F(x_1-\xi_1,\ x_2-\xi_2,\ x_3)$ по x_1, x_2 и x_3 порядок роста этой функции уменьшается на единицу, откуда следует, что производные функции (16) можно находить дифференцированием под знаком интеграла.

Так как $F(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3)$ — матрица решений для системы (1), то вектор $u(x_1, x_2, x_3)$, полученный как интеграл от линейной комбинации столбцов этой матрицы, также представляет собой решение. Из формул (14) и (15) очевидно, что это решение удовлетворяет граничным условиям (4) и, следовательно, вектор-функция $u(x_1, x_2, x_3)$ решает поставленную краевую задачу.

Заметим, что из нашего построения ни в какой мере не следует единственность решения поставленной краевой задачи даже для случая полупространства. Однородным краевым условиям l-го порядка удовлетворяет, во-первых, всякое решение системы, представляющее собой многочлен от x_1, x_2, x_3 не выше $l-1$-й степени, и, следовательно, решение неоднородной краевой задачи определено с точностью до такого многочлена. Во-вторых, как и в случае одного уравнения, фундаментальное решение и, следовательно, решение краевой задачи в случае, когда определитель $\left|\sum_{p=1}^{l} A_p U T^{l-p}\right|$ имеет вещественные нули, может зависеть от того, в каком смысле понимается интеграл по s от $-\infty$ до ∞.

3. Предположим теперь, что область D — произвольная выпуклая область с гладкой границей Γ, а оператор Λ — совокупность $\frac{kn}{2}$ линейных дифференциальных операторов l-го порядка с непрерывными коэффициентами над векторной функцией u. Аналогично тому, как мы делали это в случае одного уравнения 2-го порядка, мы каждой точке $Q \in \Gamma$ и каждой точке $P \in D$ поставим в соответствие матричную функцию $F_Q(P, Q')$, где Q' — точка в плоскости T_Q, касательной к Γ в точке Q. Эта матрица является матрицей фундаментальных решений в полупространстве, лежащем по одну сторону от T_Q, для краевой задачи, которую мы получаем из имеющейся, отбрасывая члены с производными ниже l-го порядка и заменяя переменные коэффициенты их значениями в точке Q. Дальше, полагая $Q' = Q$, мы ищем решение поставленной краевой задачи в виде интеграла по поверхности

$$u(P) = \iint_{\Gamma} F_Q(PQ)\, \rho(Q)\, d\sigma_Q, \tag{19}$$

где $\rho(Q)$ — некоторый $\frac{kn}{2}$-мерный вектор, заданный на поверхности.

Применяя к функции $u(P)$ краевой оператор Λ и требуя, чтобы

$$\lim_{P \to Q_0} \Lambda u(P) = f(Q_0),$$

где $f(Q)$ — заданная на границе функция, мы, так же как и в случае одного уравнения, получаем интегральное уравнение типа Фредгольма для вектор-функции $\rho(Q)$ (точнее систему интегральных уравнений для компонент этого вектора):

$$\iint_{\Gamma} F_Q(Q_0, Q)\, \rho(Q)\, d\sigma_Q + \rho(Q_0) = f(Q_0). \tag{20}$$

Если правая часть (вектор $f(Q_0)$) ортогональна ко всем решениям сопряженного однородного интегрального уравнения (т. е. системы), то краевая задача для области D имеет решение. Вопрос о числе решений связан с сопряженной краевой задачей и нами не рассматривался.

Поступило
19. XI. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М., ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

[2] Вишик М. И., Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Труды Моск. матем. общ-ва, т. 1 (1952), 187—246.

[3] Вишик М. И., Об общем виде разрешимых краевых задач для однородного и неоднородного эллиптического дифференциального уравнения, Доклады Ак. наук СССР, т. LXXXII, № 2 (1952), 181—184.

[4] Вишик М. И., О краевых задачах для системы эллиптических уравнений и об устойчивости их решений, Доклады Ак. наук СССР, т. LXXXVI, № 4 (1952), 645—648.

[5] Шапиро З. Я., Первая краевая задача для эллиптической системы дифференциальных уравнений, Матем. сб., т, 28 (70), вып. 1 (1951), 55—78.

[6] Лопатинский Я. Б., Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Украинский матем. журнал, № 2 (1953), 123—151.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
17 (1953), 563—578

А. А. ЛЯПУНОВ

О ПРИЗНАКАХ ВЫРОЖДЕНИЯ ДЛЯ R-МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

В работе показано, что R^{α}- и R_c^{α}-операции обладают жесткими базами, и установлено, что на операции с жесткими базами может быть перенесена значительная часть результатов теории плоских A-множеств при соответствующем изменении формулировок. Именно, для R_{α}-множеств сохраняются теоремы о покрытии, о расщеплении и об униформизации, а также для них обобщаются признаки вырождения проекции.

В теории A-множеств важную роль играют признаки, показывающие, что при некоторых условиях A-множество является B-множеством. Так, Н. Н. Лузин показал, что если A-множество является проекцией униформного B-множества или если оно получается A-операцией над B-множествами с непересекающимися слагаемыми, то оно само является B-множеством. Он же показал, что если все индексы решета из B-множеств ограничены, то это решето определяет B-множество. М. Я. Суслин установил, что два взаимно дополнительных A-множества суть B-множества.

Цель настоящей работы — выяснение аналогичных вопросов для R-множеств. Эта работа является непосредственным продолжением работ (1), (2), (3). Основные результаты этой работы были сообщены в заметке (4)

В работе (2) показано, что критерий Суслина не обобщается на R-множества. Там же установлено, что критерий ограниченности индексов для R-множеств является достаточным, но не необходимым. Ниже будет установлено, что критерий Лузина о представлении с непересекающимися слагаемыми в некотором смысле сохраняется в теории R-множеств. Кроме того, здесь будут рассмотрены некоторые аналоги теорем о накрытии A-множеств. В. И. Гливенко (5) показал, что униформное A-множество может быть накрыто униформным B-множеством. Дальнейшие теоремы родственной природы были получены П. С. Новиковым (6), (7), З. И. Козловой (8) и мною (9). Некоторые предложения этого типа удается установить и для R-множеств.

В теории A-множеств во всех перечисленных вопросах имеет существенное значение понятие точек единственности, которое имеет смысл только для δ_s-операций с жесткими базами [см. (10)]. Поэтому вначале мы должны подробнее изучить строение баз R- и R_c-операций и показать, что все операции R^{α} и R_c^{α} имеют жесткие базы.

§ 1. Строение базы R_c^{α}-операции

Пусть дана некоторая таблица баз $\{N_{n_1 \dots n_k}\}$. Образуем таблицу баз дополнительных операций $\{N^c_{n_1 \dots n_k}\}$. Мы будем говорить, что *цепь кортежей*

$\vartheta = \{(n_1 \dots n_k)\}$ *обладает свойством* (а), *если она содержит множество кортежей* $\{(m_1, \dots, m_k, m_{k+1})\} = \lambda_{m_1 \dots m_k}$ *такое, что первые* k *чисел* $m_1, \dots, m_k$ *постоянны, а последние числа* $\{m_{k+1}\}$ *образуют цепь базы* $N^c_{m_1 \dots m_k}$.

Рассмотрим множество всех систем $\{\lambda_{m_1 \dots m_k}\} = \lambda$, содержащихся в ϑ, и обозначим через ϑ' цепь, состоящую, во-первых, из всех кортежей $(m_1 \dots m_k)$ таких, что $\lambda_{m_1 \dots m_k} \subset \vartheta$, и, во-вторых, из всех кортежей $(n_1 \dots n_k) \in \vartheta$, не принадлежащих ни одной системе $\lambda_{m_1 \dots m_k}$. Мы будем говорить, что цепь ϑ' порождена цепью ϑ. Допустим, что определена цепь ϑ^α — порожденная цепь порядка α. Тогда если цепь ϑ^α обладает свойством (а), то мы положим $\vartheta^{\alpha+1} = (\vartheta^\alpha)'$ и будем называть ее порожденной цепью порядка $\alpha + 1$. Если определены все порожденные цепи порядков $\alpha < \gamma$, то обозначим через $\overline{\vartheta}^\alpha$ совокупность всех кортежей, обладающих сегментом, входящим в ϑ^α.

Положим

$$\overline{\vartheta}^\gamma = \sum_{\alpha < \gamma} \vartheta^\alpha.$$

Через ϑ^γ мы обозначим совокупность тех кортежей, входящих в $\overline{\vartheta}^\gamma$, которые не имеют сегмента, отличного от самого кортежа, входящего в $\overline{\vartheta}^\alpha$. Таким образом, можно определить порожденные цепи какого-угодно трансфинитного порядка $\alpha < \Omega$. Так как при этом множества $\overline{\vartheta}^\alpha$ только расширяются, а всех кортежей счетное число, то процесс образования порожденных цепей непременно должен оборваться *. Обрыв происходит оттого, что в некоторый момент появляется цепь, лишенная свойства (а). Мы будем обозначать ее через ϑ^Ω. Условимся говорить, что *цепь* ϑ *обладает свойством* (с), *если цепь* ϑ^Ω *содержит пустой кортеж*. Наименьшее число α такое, что $\vartheta^\alpha \ni (\ )$ мы назовем рангом цепи ϑ. Легко видеть, что ранг цепи всегда является числом первого рода. Обозначим через $\theta^c_{\mathfrak{R}}$ множество всех ϑ-цепей, обладающих свойством (с). Тогда, *какова бы ни была система множеств* $\{E_{n_1 \dots n_k}\}$, *имеет место равенство*:

$$CR_{\mathfrak{R}}(\{E_{n_1 \dots n_k}\}) = \sum_{\vartheta \in \theta^c_{\mathfrak{R}}} \prod_{(n_1 \dots n_k) \in \vartheta} CE_{n_1 \dots n_k}, \tag{A}$$

т. е. $\theta^c_{\mathfrak{R}}$ является базой операции, дополнительной к $R_{\mathfrak{R}}$.

Для доказательства справедливости равенства (А), опираясь на теорему А. Н. Колмогорова о строении базы дополнительной операции, нужно показать, что $\theta^c_{\mathfrak{R}}$ состоит из всех тех цепей ϑ, которые имеют общий элемент с каждой $R_{\mathfrak{R}}$-цепью.

1. *Всякая цепь* ϑ, *обладающая свойством* (с), *пересекается с каждой* $R_{\mathfrak{R}}$-*цепью.*

В самом деле, для цепей ранга нуль это очевидно, так как каждая такая цепь содержит пустой кортеж, а он входит в каждую $R_{\mathfrak{R}}$-цепь. Пусть цепь кортежей ϑ обладает свойством (с) и имеет ранг $\alpha + 1$. Рас-

* Легко видеть, что описанный процесс представляет собой в несколько другом виде проведенный процесс построения трансфинитных индексов для R^α-операции.

смотрим некоторую $R_{\mathfrak{N}}$-цепь ϑ_0. Покажем, что цепи ϑ и ϑ_0 непременно пересекаются. В самом деле, цепь ϑ^α не содержит пустого кортежа, но зато она содержит множество кортежей первого ранга $\lambda = \{(m_1)\}$ такое, что множество чисел $\{m_1\} = \eta'$ образует цепь базы N^c. Рассмотрим цепь $\eta \in N$, участвующую в образовании $R_{\mathfrak{N}}$-цепи ϑ_0. Ясно, что η' и η имеют общий элемент, так как $\eta \in N$, а $\eta' \in N^c$. Обозначим этот элемент через n_1^0. Очевидно, $(n_1^0) \in \vartheta^\alpha$ и $(n_1^0) \in \vartheta_0$. Есть две возможности: либо кортеж $(n_1^0) \in \vartheta$ и тогда он является общим для ϑ и ϑ_0, либо найдется число $\alpha_1 < \alpha$, наименьшее среди всех чисел β таких, что $(n_1^0) \in \vartheta^\beta$. Это число α может быть только числом первого рода. Тогда $\vartheta^{\alpha-1}$ содержит систему кортежей второго ранга $\lambda_{n_1^0} = \{(n_1^0, n_2)\}$ таких, что последовательность чисел $\{n_2\} = \eta_{n_1^0} \in N^c_{n_1^0}$. В то же время существует цепь $\eta'_{n^0} \in N_{n_1^0}$, участвующая в образовании цепи ϑ_0, т. е. такая, что $(n_1^0, n_2) \in \vartheta$, если $n_2 \in \eta'_{n_1^0}$. Цепи $\eta_{n_1^0}$ и $\eta'_{n_1^0}$ обязаны иметь общий элемент. Пусть это будет n_2^0. Ясно, что кортеж (n_1^0, n_2^0) входит как в ϑ_0, так и в $\vartheta^{\alpha-1}$. Опять возникают две возможности: либо он входит в ϑ, либо нет. Допустим, что мы дошли до кортежа $(n_1^0, \ldots, n_k^0)$, входящего в цепи ϑ_0 и $\vartheta^{\alpha_k - 1}$, и определили систему убывающих трансфинитных чисел $\alpha > \alpha_1 > \cdots > \alpha_k$. Тогда либо кортеж $(n_1^0, \ldots, n_k^0)$ входит в цепь ϑ и является общим для цепей ϑ и ϑ_0, либо этого нет. В этом случае существует наименьшее трансфинитное число α_{k+1} такое, что $\vartheta^{\alpha_{k+1}} \ni (n_1^0, \ldots, n_k^0)$. Следовательно, цепь $\vartheta^{\alpha_{k+1}-1}$ содержит множество кортежей ранга $k+1$

$$\lambda_{n_1^0 n_2^0 \ldots n_k^0} = \{(n_1^0, n_2^0, \ldots, n_k^0, n_{k+1})\}$$

таких, что цепь

$$\{n_{k+1}\} = \eta'_{n_1 n_2^0 \ldots n_k^0} \in N^c_{n_1^0 \ldots n_k^0}.$$

Кроме того, существует цепь

$$\{n\} = \eta_{n_1^0 n_2^0 \ldots n_k^0} \in N_{n_1^0 \ldots n_k^0},$$

участвующая в образовании цепи ϑ_0, т. е. такая, что все кортежи $(n_1^0 \ldots n_k^0 n) \in \vartheta$, если $n \in \eta_{n_1^0 \ldots n_k^0}$. Тогда цепи $\eta'_{n_1^0 \ldots n_k^0}$ и $\eta_{n_1^0 \ldots n_k^0}$ обязаны иметь общий элемент. Пусть это будет n_{k+1}^0. Мы приходим к кортежу $(n_1^0, \ldots, n_k^0, n_{u+1}^0)$, входящему как в ϑ_0, так и в $\vartheta^{\alpha_{k+1}-1}$. Так как система выбранных при этом трансфинитных чисел $\alpha > \alpha_1 > \ldots > \alpha_k > \alpha_{k+1}$ убывает, то процесс должен оборваться. Следовательно, мы дойдем до случая, когда выбранный кортеж входит в ϑ. Этим доказано, что каждая из цепей множества $\theta^c_{\mathfrak{N}}$ пересекается со всеми $R_{\mathfrak{N}}$-цепями.

2. *Всякая цепь, пересекающаяся со всеми $R_{\mathfrak{N}}$-цепями, обладает свойством* (с).

Докажем предварительно, что если цепь ϑ обладает свойством (а) и порожденная ею цепь ϑ' пересекается со всеми $R_{\mathfrak{N}}$-цепями, то последним

свойством обладает и цепь ϑ. Рассмотрим некоторую $R_{\mathfrak{N}}$-цепь ϑ_0. По условию, она имеет кортеж $(n_1 \ldots n_k)$, входящий в цепь ϑ'. Возможны два случая: либо этот кортеж входит в цепь ϑ и тогда цепи ϑ и ϑ_0 имеют общий элемент, либо этот кортеж не входит в ϑ. В этом случае цепь ϑ содержит систему кортежей $\lambda_{n_1 \ldots n_k} = \{(n_1 \ldots n_k n_{k+1})\}$, где первые k знаков совпадают с кортежем $(n_1 \ldots n_k)$, а числа $\{n_{k+1}\} = \eta^*$ образуют цепь базы $N^c_{n_1 \ldots n_k}$. Однако, ввиду того что кортеж $(n_1 \ldots n_k) \in \vartheta_0$, существует цепь $\eta = \{n\}$ базы $N_{n_1 \ldots n_k}$ такая, что все кортежи $(n_1 \ldots n_k n)$ входят в ϑ, если $n \in \eta$. В то же время цепи η и η^* обязаны иметь общий элемент, так как $\eta \in N_{n_1 \ldots n_k}$, а $\eta^* \in N^c_{n_1 \ldots n_k}$. Пусть это будет n'_{k+1}. Тогда кортеж $(n_1 \ldots n_k n'_{k+1})$ входит как в ϑ, так и в ϑ_0. Следовательно, цепь ϑ пересекается со всеми $R_{\mathfrak{N}}$-цепями. Всякая цепь ϑ, обладающая свойством (а), порождает некоторую цепь ϑ^Ω, лишенную этого свойства. Если эта последняя цепь содержит пустой кортеж, то цепь ϑ имеет свойство (с), в противном случае она лишена свойства (с).

Покажем, что если цепь ϑ не содержит пустого кортежа и не обладает свойством (а), то существует $R_{\mathfrak{N}}$-цепь, с которой цепь ϑ не пересекается. Этим наше основное утверждение будет полностью доказано.

В самом деле, пусть $\eta = \{n_1\}$ обозначает множество всех чисел n_1 таких, что кортежи первого ранга $(n_1) \in \vartheta$. Цепь η не содержит никакой цепи $\overline{\eta} \in N^c$. Следовательно, можно выбрать цепь $\eta' \in N$, не имеющую общих точек с η. Мы отберем все кортежи первого ранга (m_1) такие, что $m_1 \in \eta'$. Допустим, что отобран некоторый кортеж $(m_1 \ldots m_k)$, не входящий в цепь ϑ. Тогда, в силу того что ϑ не обладает свойством (а), если мы рассмотрим все кортежи $(m_1 \ldots m_k n)$, продолжающие отобранный и входящие в ϑ, то из чисел $\{n\}$ нельзя будет составить никакой цепи базы $N^c_{m_1 \ldots m_k}$. Следовательно, существует цепь $\eta'_{m_1 \ldots m_k} \in N_{m_1 \ldots m_k}$, не пересекающаяся с цепью $\{n\}$. Мы отберем все кортежи $(m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_k, m_{k+1})$, где $m_{k+1} \in \eta'_{m_1 \ldots m_k}$. Ясно, что, продолжая этот процесс до бесконечности, мы отберем $R_{\mathfrak{N}}$-цепь, не пересекающуюся с ϑ.

Если какая-нибудь цепь ϑ порождает цепь ϑ^Ω, не содержащую пустого кортежа, то существует $R_{\mathfrak{N}}$-цепь ϑ_0, которая не пересекается с ϑ^Ω. В таком случае цепь ϑ_0 не может пересекаться и с исходной цепью ϑ.

В самом деле, если некоторая $R_{\mathfrak{N}}$-цепь ϑ_0 пересекается с цепью ϑ, то она должна пересекаться и с порожденной ею цепью ϑ' либо по тому же самому кортежу, либо по кортежу, ему предшествующему. Следовательно, если бы цепи ϑ и ϑ_0 пересекались, то цепи ϑ^Ω и ϑ_0 тоже пересекались бы. Этим доказано, что условие (с) необходимо и достаточно для того, чтобы цепь ϑ пересекала все $R_{\mathfrak{N}}$-цепи.

Таким образом, формула (А) доказана полностью.

§ 2. О жестких базах

Пусть N — база некоторой δs-операции. Если цепь $\eta \in N$ не содержит никакой другой цепи $\eta' \in N$, то мы будем говорить, что η есть жесткая цепь базы N. Это понятие введено Ю. С. Очаном ([10]). Если база состоит из одних только жестких цепей, то мы будем называть ее жесткой базой.

Не всякая δs-операция обладает жесткой базой. Операция Π обладает таковой, так как ее база состоит из одной единственной цепи. Операция Σ тоже обладает жесткой базой, так как для нее базой может служить множество всех цепей, содержащих по одному элементу. Операции $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$ жестких баз не имеют.

A-операция имеет жесткую базу. Обычная запись A-операции в виде $\sum\limits_{(n_1 \ldots n_k \ldots)} \prod\limits_k$ представляет собой запись A-операции в форме δs-операции с жесткой базой. Г-операция также имеет жесткую базу, так как ее базой может служить множество цепей кортежей $\vartheta = \{(n_1 \ldots n_k)\}$, для каждой из которых интервалы Бэра $\{\delta_{n_1 \ldots n_k}\}$ составляют полное покрытие пространства Бэра и попарно не пересекаются.

Легко видеть, что *если все базы таблицы* $\mathfrak{N} = \{N_{n_1 \ldots n_k}\}$ *жесткие, то и операция* $R_{\mathfrak{N}}$ *обладает жесткой базой*. В самом деле, базу этой операции можно составить из цепей исходных баз без добавления лишних кортежей. Эта база состоит из всех цепей ϑ, имеющих следующие свойства:

1. $\vartheta \ni (\ )$.

2. Если кортеж $(n_1 \ldots n_k) \in \vartheta$, то существует единственная цепь $\eta \in N_{n_1 \ldots n_k}$ такая, что $(n_1 \ldots n_k n_{k+1}) \in \vartheta$, если $\eta \ni n_{k+1}$.

3. Цепь ϑ не содержит никаких кортежей, кроме тех, которые перечислены в пп. 1 и 2 моей работы ([1]) (§ 2, стр. 9).

Полученная таким образом база θ является жесткой, так как если из одной из этих цепей удалить один или несколько элементов, то она перестанет быть $R_{\mathfrak{N}}$-цепью. С другой стороны, всякая $R_{\mathfrak{N}}$-цепь содержит цепь описанного типа, следовательно,

$$\sum_{\vartheta \in \theta} \prod_{(n_1 \ldots n_k) \in \vartheta} (\{E_{n_1 \ldots n_k}\}) = R_{\mathfrak{N}} (\{E_{n_1 \ldots n_k}\})$$

для произвольной таблицы множеств $\{E_{n_1 \ldots n_k}\}$.

Если каждая из конечного или счетного числа δs-операций Φ_N обладает жесткой базой, то операции $\sum\limits_i \Phi_{N_i}$ и $\prod\limits_i \Phi_{N_i}$ тоже обладают жесткими базами. Для операции $\sum\limits_i \Phi_{N_i}$ это очевидно. Для операции $\prod\limits_i \Phi_{N_i}$ нужно воспользоваться базой, построенной в моей работе ([1]) (гл. III, § 3, лемма на стр. 40—41).

Мы докажем, что *если все базы* $\{N^c_{n_1 \ldots n_k}\}$ *жестки, то* $R^c_{\mathfrak{N}}$ *операция, дополнительная к* $R_{\mathfrak{N}}$*-операции, тоже обладает жесткой базой.* Для этого достаточно доказать, что всякая $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепь содержит жесткую $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепь.

Мы это докажем, проведя индукцию по рангу цепи. Для $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепей ранга нуль утверждение очевидно, так как они содержат цепь, состоящую из пустого кортежа, которая удовлетворяет нашим условиям. Допустим, что утверждение верно для всех $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепей ранга $\leqslant \alpha$. Докажем, что оно останется верным и для $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепей ранга $\alpha+1$. Пусть ϑ — такая цепь. Порожденная цепь ϑ^α имеет ранг 1. По предположению, цепь ϑ^α содержит жест-

кую $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепь. Пусть это будет ϑ^*. Теперь мы построим жесткую $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепь, содержащуюся в ϑ. Мы сохраним все кортежи, входящие в $\vartheta^* \cdot \vartheta$, а каждый кортеж цепи $\vartheta^* - \vartheta$ мы заменим системой кортежей, ему подчиненных и образующих $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепь ранга α относительно него. При этом мы ограничимся одной единственной цепью.

Ясно, что полученная нами цепь обладает свойством (c) и что она жесткая. В самом деле, порожденная ею цепь имеет свойство (c), а в силу того, что все базы $\{N^c_{n_1 \ldots n_k}\}$ жестки, из данной цепи нельзя выкинуть ни одного кортежа без того, чтобы она не перестала быть $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепью.

Пусть теперь γ — число второго рода. Цепей ранга γ не существует. Мы докажем, что если наше утверждение верно для всех цепей рангов $< \gamma$, то оно верно и для цепей ранга $\gamma + 1$. Пусть ϑ — такая цепь. Тогда $(\ ) \,\overline{\in}\, \vartheta^\gamma$ и $(\ ) \in \vartheta^{\gamma+1}$. Следовательно, ϑ^γ содержит систему кортежей первого ранга $\{(n_1)\} = \mu$ такую, что $\{n_1\} = \eta \in N^c$. В силу того что база N^c — жесткая, цепь η тоже жесткая. Выбросим все кортежи, сегмент первого ранга которых не входит в μ. Каждому из кортежей системы μ подчинена некоторая цепь кортежей, входящих в ϑ. Ясно, что эта цепь имеет свойство (c) и ранг $< \gamma$ относительно данного кортежа ранга 1. По допущению, такая цепь содержит жесткую цепь. Легко видеть, что объединение всех этих жестких цепей, продолжающих кортежи системы μ, образует жесткую $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепь. Этим доказано, что каждая $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепь содержит жесткую $R^c_{\mathfrak{N}}$-цепь.

Обозначим через $\theta^c_{\mathfrak{N}}$ множество всех $R_{\mathfrak{N}}$-цепей, а через θ — множество всех жестких $R_{\mathfrak{N}}$-цепей. Ясно, что для всякой таблицы множеств $\{E_{n_1 \ldots n_k}\}$

$$\sum_{\vartheta^* \in \theta} \prod_{(n_1 \ldots n_k) \in \vartheta^*} E_{n_1 \ldots n_k} = \sum_{\vartheta \in \theta^c_{\mathfrak{N}}} \prod_{(n_1 \ldots n_k) \in \vartheta} E_{n_1 \ldots n_k},$$

потому что $\theta \subset \theta^c_{\mathfrak{N}}$, и если $\vartheta^* \subset \vartheta$, то непременно

$$\prod_{(n_1 \ldots n_k) \in \vartheta^*} E_{n_1 \ldots n_k} \supset \prod_{(m_1 \ldots m_i) \in \vartheta} E_{m_1 \ldots m_i}.$$

Однако в каждой цепи ϑ содержится цепь ϑ^* и каждая цепь ϑ^* является цепью ϑ.

Этим доказано, что $R^c_{\mathfrak{N}}$-операция имеет жесткую базу. Сопоставляя все, что было изложено о жестких базах, мы покажем, что все операции R^α и R^α_c могут быть построены так, что у них будут жесткие базы. Для этого нужно показать, что если исходить из жестких баз A- и Γ-операций, то на протяжении всего индуктивного процесса построения R^α и R_c-операций будут возникать δs-операции с жесткими базами. Действительно, если операции R^α и R^α_c имеют жесткие базы, то это верно и для операций R^α, R^α_c и $R^\alpha \dotplus R^\alpha_c$, которые лежат в основе построения опера-

ций $R^{\alpha+1}$ и $R_c^{\alpha+1}$. Следовательно, эти последние тоже обладают жесткими базами. Наконец, если все операции R^α и R_c^α, где $\alpha<\gamma$ и γ — число второго рода, обладают жесткими базами, то и операции $\prod_{\alpha<\gamma} R^\alpha$ и $\sum_{\alpha<\gamma} R_c^\alpha$, лежащие в основе построения операций R^γ и R_c^γ, также обладают этим свойством. Следовательно, и операции R^γ и R_c^γ, в свою очередь, обладают жесткими базами.

Отметим, что две эквивалентные между собой δs-операции не обязаны одновременно иметь или не иметь жестких баз. В самом деле, A-операция обладает таковой, а операция $R_{\overline{\lim}}$, получаемая при помощи R-процесса, исходя из таблицы баз операции $\overline{\lim}$, очевидно, не может иметь жесткой базы.

§ 3. Точки N-однозначности

Рассмотрим некоторую δs-операцию Φ_N с жесткой базой N. Пусть $\{E_n\}$ — некоторая последовательность множеств. Будем говорить, что точка x является точкой *N-однозначности* последовательности $\{E_n\}$, если существует одна единственная цепь $\eta \in N$ такая, что $x \in \prod_{n\in\eta} E_n$.

Мы покажем, что в случае R^α-операций точки N-однозначности обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам точек единственности A-операции.

В этом параграфе будем считать, что R^α-операции заданы жесткими базами, существование которых установлено в предыдущем параграфе.

Пусть $\mathfrak{N}=\{N_{n_1\ldots n_k}\}$ — некоторая R-база. Обозначим

$$\Phi_{N(i)}(\{E_{n_1\ldots n_i n_{i+1}}\})=\underset{n_1}{E}\Phi_N(\{\underset{n_2}{\Phi}_{N_{n_1}}(\{\underset{n_2}{\Phi}_{N_{n_1n_2}}(\{\ldots\underset{n_{i+1}}{\Phi}_{N_{n_1\ldots n_i}}(\{E_{n_1\ldots n_i n_{i+1}}\})\})\})\}).$$

Здесь множества $E_{n_1\ldots n_i n_{i+1}}$ занумерованы кортежами ранга $i+1$.

ЛЕММА. *Пусть $\mathfrak{N}=\{N_{n_1\ldots n_k}\}$ есть база некоторой R-операции, состоящая из жестких баз δs-операций, и $\mathscr{E}=\{H_{n_1\ldots n_k}\}$ — некоторая таблица множеств, и пусть каждая точка множества $\underset{n_{k+1}}{\Phi}_{N_{n_1\ldots n_i}}(\{H_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}\})$ является точкой $N_{n_1\ldots n_i}$-однозначности для последовательности множеств $\{H_{n_1\ldots n_i n_i+1}\}$. Тогда*

$$R_{\mathfrak{N}}(\{H_{n_1\ldots n_k}\})=\prod_{i=0}^{\infty}\Phi_{N(i)}(\{H_{n_1\ldots n_i n_{i+1}}\}).$$

Доказательство. Обозначим левую часть доказываемого равенства через ν, а правую — через ν'. Пусть $x\in\nu$. Тогда существует $R_{\mathfrak{N}}$-цепь ϑ такая, что $x\in H_{n_1\ldots n_k}$, если $(n_1\ldots n_k)\in\vartheta$. Эта цепь ϑ образована при помощи некоторой системы цепей $\lambda=\{\eta_{n_1\ldots n_k}\}$ баз $N_{n_1\ldots n_k}$. Ввиду того что каждое из множеств

$$\underset{n_{k+1}}{\Phi}_{N_{n_1\ldots n_k}}(\{H_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}\})$$

состоит из одних только точек $N_{n_1\ldots n_k}$-однозначности последовательности $\{H_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}\}$, все цепи $\eta_{n_1\ldots n_k}$ определены точкой x единственным образом. Ясно, что

$$x \in \prod_{(n_1 \ldots n_k) \in \vartheta} H_{n_1 \ldots n_k} = \prod_{\eta_{n_1 \ldots n_k} \in \lambda} \prod_{n_{k+1} \in \eta_{n_1 \ldots n_k}} H_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}} =$$

$$= H \prod_{n_1 \in \eta} H_{n_1} \prod_{n \in \eta} \prod_{n_2 \in \eta_{n_1}} H_{n_1 n_2} \ldots \prod_{n_1 \in \eta} \prod_{n_2 \in \eta_{n_1}} \ldots \prod_{n_{k+1} \in \eta_{n_1 \ldots n_k}} H_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}} \subset$$

$$\subset H \sum_{\eta \in N} \prod_{n_1 \in \eta} H_{n_1} \sum_{\eta \in N} \prod_{n_1 \in \eta} \sum_{\eta_{n_1} \in N_{n_1}} \prod_{n_2 \in \eta_{n_1}} H_{n_1 n_2} \ldots$$

$$\ldots \sum_{\eta \in N} \prod_{n_1 \in \eta} \sum_{\eta_{n_1} \in N_{n_1}} \prod_{n_2 \in \eta_{n_1}} \ldots \sum_{\eta \in N_{n_1 \ldots n_k}} \prod_{n_{k+1} \in \eta} H_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}} \ldots =$$

$$= H \Phi_N (\{H_{n_1}\}) \cdot \Phi_N (\{\Phi_{N_{n_1}} (\{H_{n_1 n_2}\})\}) \ldots$$

$$\ldots \Phi_N (\{\Phi_{N_{n_1 \ldots n_k}} (\{H_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}\})\}) \ldots = H \prod_{i=0}^{\infty} \Phi_{N(i)} (\{H_{n_1 \ldots n_k}\}) = \nu'.$$

Этим доказано, что $\nu \in \nu'$. Пусть теперь $x \in \nu'$. Тогда $x \in H$ и, каково бы ни было натуральное число i, найдется цепь $\eta^i \in N(i)$ такая, что

$$x \in \prod_{(n_i \ldots n_j) \in \eta^i} H_{n_1 \ldots n_j} .$$

Отметим, что в правой части $j \leqslant i + 1$.

Рассмотрим строение цепи η^i. Согласно определению операции $\Phi_{N(i)}$, цепь η^i состоит из кортежей ранга $\leqslant i + 1$. Множество всех чисел $\{n_1\} = \eta(i)$ таких, что $(n_1) \in \eta^i$, составляет цепь базы N. Если некоторый кортеж $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \eta^i$, то множество всех чисел $\{n_{k+1}\} = \eta_{n_1, \ldots, n_k}(i)$ таких, что $(n_1 \ldots n_k n_{k+1}) \in \eta^i$, образует цепь базы $N_{n_1 \ldots n_k}$ (тут непременно $k \leqslant i$). Заметим, что построение цепи η^i совпадает с построением $R_{\mathfrak{N}}$-цепей, с той лишь разницей, что оно продолжается до кортежей ранга $i + 1$. В нашем случае, так как мы имеем дело лишь с точками $N_{n_1, \ldots n_k}$-однозначности, цепи $\eta_{n_1 \ldots n_k}(i)$, отвечающие одному и тому же кортежу $(n_i \ldots n_k)$ и разным значениям i, между собой совпадают. Таким образом, цепь $\eta^i \subset \eta^{i+1}$. Следовательно, объединение всех цепей η^i составляет $R_{\mathfrak{N}}$-цепь. Обозначим ее через ϑ. Ясно, что

$$x \in \prod_{(n_1 \ldots n_k) \in \vartheta} H_{n_1 \ldots n_k} \subset R_{\mathfrak{N}} (\{H_{n_1 \ldots n_k}\}) = \nu .$$

Таким образом, $\nu' \subset \nu$. Следовательно, $\nu' = \nu$. Лемма доказана.

Если N — какая-нибудь база δs-операции, то через N^* мы обозначим множество всех цепей, каждая из которых содержит по крайней мере две различные цепи базы N. Через N^n мы попрежнему будем обозначать множество всех цепей базы N, которые содержат число n, а под $N - N^n$

мы будем понимать множество-разность. Тогда для любой последовательности $\{E_n\}$ каких угодно множеств имеет место равенство:

$$\Phi_{N^*}(\{E_n\}) = \sum_n \Phi_{N^n}(\{E_n\})\, \Phi_{N-N^n}(\{E_n\}).$$

В самом деле, каждая цепь базы N^* содержит по крайней мере две разные цепи базы N. По крайней мере одна из них содержит элемент, не входящий в другую, т. е. найдется такое n, что одна из этих цепей входит в N^n, а другая не входит в это множество, т. е. входит в $N-N_n$. С другой стороны, всякое объединение двух цепей, из которых одна входит в N^n, а другая — в $N-N^n$, всегда составляет цепь базы N^*.

Мы будем говорить, что класс множеств Ξ и жесткая база N находятся в *правильном отношении*, если:

1) класс $\Phi_N(\Xi)$ инвариантен относительно счетных сумм и пересечений;

2) для всех натуральных n и p имеет место:

$$\Phi_N(\Xi) \supset \Phi_{N^n}(\Xi) \supset \Phi_{N^{np}}(\Xi),$$

а также

$$\Phi_N(\Xi) \supset \Phi_{N-N^n}(\Xi) \text{ и } \Phi_{N^n}(\Xi) \supset \Phi_{N^n-N^{np}}(\Xi);$$

3) $[R_{[N]}(\Xi)]_c = \Phi_{\overline{N}}([R_N(\Xi)]_c)$.

Здесь N^{np} обозначает множество всех цепей базы N, которые содержат числа n и p одновременно.

Если Ξ есть какой-нибудь R_α- или CR_α-класс, а Φ_N — какая-нибудь R^β- или R^β_c-операция [см. (2)], то данные условия выполняются (предполагается, что база N является жесткой базой, построенной по индукции), если $\beta < \alpha$.

Отметим некоторые свойства правильного отношения.

1. Если класс Ξ и жесткая база N находятся в правильном отношении, то

$$\Phi_{N^*}(\Xi) \subset \Phi_N(\Xi).$$

2. Обозначим через N^{*n} множество всех цепей, которые входят в N^* и содержат номер n. Тогда легко видеть, что

$$\Phi_{N^{*n}}(\{E_m\}) = \Phi_{N^n}(\{E_m\}) \cdot \Phi_{N-N^n}(\{E_m\}) + \sum_{p \neq n} \Phi_{N^{np}}(\{E_m\}) \cdot \Phi_{N^n-N^{np}}(\{E_m\}).$$

Таким образом, в случае правильного отношения между Ξ и N имеет место равенство:

$$\Phi_{N^{*n}}(\Xi) = \Phi_N(\Xi).$$

3. Опираясь на лемму о трансфинитных индексах [см. (3)], мы получаем следующее предложение.

Если класс множеств Ξ обладает индексами, удовлетворяющими принципу сравнения индексов, и если он находится в правильном отношении к жесткой базе N, то для него имеет место следующее предложение о кратной отделимости: *для всякой последовательности $\{E_n\}$ множеств класса Ξ найдется последовательность $\{H_n\}$ множеств класса $[\Phi_n(\Xi)]_c$ такая, что*

$$H_n \supset E_n - \Phi_{N^{*n}}(\{E_m\})$$

и

$$\Phi_{N^*}(\{H_n\}) = 0.$$

Ввиду того что отделители выбираются из класса $[\Phi_n(\Xi)]_c$, здесь не делается никаких предположений о природе класса Ξ.

Теперь мы можем доказать теорему о строении множества точек однозначности R-операции.

ТЕОРЕМА I. *Пусть N — жесткая база, находящаяся в правильном отношении с классом множеств Ξ, и пусть $\mathcal{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ — некоторая таблица множеств класса Ξ. Тогда множество точек $R_{[N]}$-однозначности таблицы $\mathcal{E}$ входит в класс $[R_{[N]}(\Xi)]_c$.*

Доказательство. Положим $U = R_{[N]}(\{E_{n_1 \ldots n_k}\})$ и обозначим через $U_{n_1 \ldots n_k}$ множество всех тех точек, которые входят в ядра $R_{[N]}$-цепей, содержащих кортеж $(n_1 \ldots n_k)$. Покажем, что все множества $U_{n_1 \ldots n_k}$ входят в класс $R_{[N]}$. Положим

$$M = N^{n_1}, \ M_{n_1} = N^{n_2}, \ldots, M_{n_1 \ldots n_{k-1}} = M^k.$$

Если же кортеж $(m_1 \ldots m_j)$ не является сегментом кортежа $(n_1 \ldots n_k)$, то $M_{m_1 \ldots m_j} = N$. Обозначим $\mathfrak{M} = \{M_{m_1 \ldots m_j}\}$. Ясно, что операция $R_{[N]}$ мощнее, чем $R_{\mathfrak{M}}$, так как операция Φ_N мощнее, чем все операции $\Phi_{M_{m_1 \ldots m_j}}$ в применении к классу Ξ. Однако очевидно, что

$$U_{n_1 \ldots n_k} = R_{\mathfrak{M}}(\{E_{n_1 \ldots n_j}\}).$$

В самом деле, по построению, в θ_m входят те и только те цепи из $\theta_{[N]}$, которые содержат кортежи (n_1), $(n_1 n_2)$, ..., $(n_1 \ldots n_k)$, но это то же самое, что цепи из $\theta_{[N]}$, которые содержат кортеж $(n_1 \ldots n_k)$. Следовательно, все множества $U_{n_1 \ldots n_k}$ входят в класс Ξ.

Применим к последовательности множеств $\{U_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}\}$, где ранг k и числа $n_1 \ldots n_k$ остаются неизменными, а число n_{k+1} пробегает все натуральные числа, приведенную выше теорему о кратной отделимости по отношению к операции Φ_{N^*}. В классе $[\Phi_N(R_{[N]}(\Xi))]_c$ существуют множества

$$T_{m_1 \ldots m_k m_{k+1}} \supset U_{m_1 \ldots m_{k+1}} - \underset{t}{\Phi}_{N^{n_{k+1}}}(\{U_{m_1 \ldots m_k t}\})$$

и

$$\underset{t}{\Phi}_{N^*}(\{T_{m_1 \ldots m_k t}\}) = 0.$$

Отметим, что класс $R_{[N]}(\Xi)$ инвариантен относительно операции Φ_N.

Следовательно, все множества $T_{m_1 \dots m_k m_{k+1}}$ входят в класс $[R_{[N]}(\Xi)]_c$. Положим

$$H_{n_1 \dots n_k} = T_{n_1 \dots n_k} E_{n_1 \dots n_k} \text{ при } k > 0 \text{ и } H = E.$$

Ясно, что все множества $H_{n_1 \dots n_k}$ входят в класс $[R_{[N]}(\Xi)]_c$.

Обозначим через w множество точек $[N]$-однозначности таблицы $\mathcal{E}$. Мы докажем, что

$$w = R_{[N]}(\{H_{n_1 \dots n_k}\}). \tag{B}$$

Обозначим правую часть доказываемого равенства через w'. Допустим, что $x \in w$. Тогда существует единственная $R_{[N]}$-цепь ϑ такая, что $\vartheta \in E_{n_1 \dots n_k}$, если $(n_1 \dots n_k) \in \vartheta$. Но тогда цепь ϑ будет единственной, имеющей такое свойство:

$$x \in U_{n_1 \dots n_k} \text{ тогда и только тогда, когда } (n_1 \dots n_k) \in \vartheta.$$

В самом деле, если $x \in U_{n_1 \dots n_k}$, то это означает, что существует $R_{[N]}$-цепь $\vartheta^* \ni (n_1 \dots n_k)$ такая, что

$$x \in \prod_{(m_1 \dots m_j) \in \vartheta^*} E_{m_1 \dots m_j},$$

однако, в силу того, что x есть точка $[N]$-однозначности таблицы $\mathcal{E}$, цепь ϑ^* совпадает с ϑ.

Следовательно, если зафиксировать первые k индексов $n_1 \dots n_k$ так, что $(n_1 \dots n_k) \in \vartheta$, то числа $\{n_{k+1}\}$ такие, что $(n_1 \dots n_k n_{k+1}) \in \vartheta$, составят цепь базы N. Обозначим ее через $\eta_{n_1 \dots n_k}$. Она является единственной цепью базы N, имеющей такое свойство:

$$x \in U_{n_1 \dots n_k n_{k+1}} \text{ тогда и только тогда, когда } n_{k+1} \in \eta_{n_1 \dots n_k}.$$

Следовательно,

$$x \in \Phi_N_{n_{k+1}}(\{U_{n_1 \dots n_k n_{k-1}}\})$$

и

$$x \,\overline{\in}\, \Phi_{N^*}{}_{n_{k+1}}(\{U_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}\});$$

таким же образом,

$$x \,\overline{\in}\, \Phi_{N^{*m}}(\{U_{n_1, \dots, n_k n_{k+1}}\}),$$

каково бы ни было m. Поэтому

$$x \in U_{n_1 \dots n_k n_{k+1}} - \underset{m}{\Phi}_{N^* n_{k+1}}(\{U_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}\}),$$

если только $n_{k+1} \in \eta_{n_1 \dots n_k}$. Но тогда для этих номеров n_{k+1}

$$x \in T_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}, \text{ если } (n_1 \dots n_k n_{k+1}) \in \vartheta.$$

Следовательно,

$$x \in H_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}, \text{ если } x \in \vartheta,$$

т. е.

$$x \in \prod_{(n_1, \dots n_k) \in \vartheta} H_{n_1 \dots n_k} \in R_{[N]}(\{H_{n_1 \dots n_k}\}) = w', \text{ т. е. } w \subset w'.$$

Пусть теперь $x \in w'$. Тогда существует $R_{[N]}$-цепь ϑ такая, что $x \in H_{n_1 \dots n_k}$, если $(n_1 \dots n_k) \in \vartheta$. При этом условии $x \in T_{n_1 \dots n_k}$. Следовательно, если числа k, $n_1 \dots n_k$ фиксированы, то точка x является точкой N-однозначности для последовательности множеств $\{U_{n_1 \dots n_k}\}$, где $(n_1 \dots n_k) \in \vartheta$. Поэтому x является также точкой $[M]$-однозначности для таблицы множеств $\{U_{n_1 \dots n_k}\}$. Однако

$$\prod_{(n_1 \dots n_k) \in \vartheta} U_{n_1 \dots n_k} = \prod_{(n_1 \dots n_k) \in \vartheta} E_{n_1 \dots n_k}$$

для всех $R_{[N]}$-цепей ϑ. Следовательно, x является точкой $[N]$-однозначности для таблицы множеств $\{E_{n_1 \dots n_k}\}$, т. е. $x \in w$. Этим доказано, что $w' \subset w$. Следовательно, $w' = w$. Таким образом, равенство (B) доказано.

Отметим, что каждая точка множества w является в то же время точкой $[N]$-однозначности таблицы множеств $\{H_{n_1 \dots n_k}\}$, потому что $E_{n_1 \dots n_k} \supset H_{n_1 \dots n_k}$. Рассмотрим некоторую $R_{[N]}$-цепь ϑ. Пусть

$$x \in \prod_{(n_1 \dots n_k) \in \vartheta} H_{n_1 \dots n_k} \text{ и } (n_1 \dots n_k) \in \vartheta.$$

Рассмотрим совокупность всех множеств $H_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$, где первые k индексов имеют отмеченные выше значения. Ясно, что существует цепь $\eta \in N$ такая, что $x \in H_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$, если $n_{k+1} \in \eta$. Следовательно,

$$x \in \Phi_{N \atop n_{k+1}} (\{H_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}\}).$$

Однако

$$0 = \Phi_{N^* \atop n_{k+1}} (\{T_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}\}) \supset \Phi_{n_{k+1}} (\{H_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}\}).$$

Таким образом, x является точкой N^*-однозначности для последовательности множеств $H_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$ и, следовательно, выполнено условие леммы. Итак, множество $R_{[N]}(\{H_{n_1 \dots n_k}\})$ может быть получено, исходя из множеств таблицы $\{H_{n_1 \dots n_k}\}$ при помощи многократного применения операции Φ_N и операции II. Однако, так как множества $H_{n_1 \dots n_k}$ входят в класс $[R_{[N]}(\Xi)]_c$, который, по определению правильного отношения (см. условие 3, стр. 573), инвариантен относительно операции Φ_N, а так-

же относительно операции II, то все перечисленные выше операции не выводят за пределы класса $[R_{[N]}(\Xi)]_c$. Следовательно, множество w входит в этот класс. Теорема доказана.

Как отмечалось выше, условия предыдущей теоремы выполнены для R^α-классов и R^α-операций. Поэтому из нее вытекают следующие теоремы об R-множествах.

ТЕОРЕМА II. *Если* $[N]$ *есть жесткая база* R^α*-операции и* $\mathcal{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ — *таблица* BR^α*-множеств (или* $BR_{\alpha\beta}$*-множеств), то множество точек* $R_{[N]}$*-однозначности таблицы* $\mathcal{E}$ *входит в класс* CR_α*-множеств (или* $CR_{\alpha\beta}$*-множеств).*

Особый интерес представляет случай, когда каждая точка множества $R_{[N]}(\{E_{n_1 \ldots n_k}\})$ является точкой $R_{[N]}$-однозначности таблицы $\{E_{n_1 \ldots n_k}\}$. В этом случае множество w входит в оба класса $R_{[N]}(\Xi)$ и $[R_{[N]}(\Xi)]_c$. Поэтому имеют место теоремы:

ТЕОРЕМА III. *Пусть* $[N]$ — *жесткая база, находящаяся в правильном отношении с классом множеств* Ξ, $\mathcal{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ — *таблица множеств класса* Ξ *и множество* $R_{[N]}(\{E_{n_1 \ldots n_k}\}) = U$ *состоит из одних только точек* $[N]$*-однозначности. Тогда множество* U *входит в класс* $[R_{[N]}(\Xi)]_b$.

В применении к R-множествам это дает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА IV. *Если* $[N]$ *есть жесткая база* R^α*-операции,* $\mathcal{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ — *таблица* BR_α*-множеств (или* $BR_{\alpha\beta}$*-множеств) и множество* $R_{[N]}(\{E_{n_1 \ldots n_k}\}) = U$ *состоит из одних только точек* $[N]$*-однозначности таблицы* $\mathcal{E}$*, то* U *является* BR_α*-множеством (или* $BR_{\alpha\beta}$*-множеством).*

Теорема II является аналогом теоремы Н. Н. Лузина о проекции точек единственности плоских B-множеств, а теорема IV — обобщением критерия Н. Н. Лузина в теории B-множеств, согласно которому A-операция над B-множествами с непересекающимися слагаемыми всегда дает B-множество.

В связи с полученными результатами возникает вопрос о том, всякое ли $BR_{\alpha+1}$-множество может быть получено $R_{\alpha+1}$-операцией над CR_α-множествами с непересекающимися слагаемыми.

Мы установим еще одну теорему о распространении R^α-операции, которая аналогична теореме В. И. Гливенко о накрытии плоского униформного A-множества таким же B-множеством.

§ 4. Дальнейшие свойства точек однозначности

Результаты этого параграфа частично являются приложением результатов предыдущего параграфа, частично — приложением теорем о кратной отделимости [см. ([3])]. Мы изложим их, ограничиваясь R-множествами и R^α-операциями, хотя их нетрудно получить и для более общего случая, однако изложение оказалось бы излишне громоздким.

Обозначим через $R_{[N]^*}$ операцию, которая отбирает точки, входящие более чем в одно ядро $R_{[N]}$-цепи, т. е. точки, получаемые $R_{[N]}$-операцией, но не являющиеся точками $R_{[N]}$-однозначности.

Если $[N]$ есть жесткая база R^α-операции, то класс R^α-множеств инвариантен относительно операции $R_{[N]^*}$, а также относительно всех опе-

раций вида $R_{[N]^*n_1\ldots n_k}$, отбирающих ядра тех цепей операции $R_{[N]^*}$, которые содержат кортежи $(n_1 \ldots n_k)$. Следовательно, для класса R_α-множеств и операции $R_{[N]^*}$ имеет место первая теорема о кратной отделимости [см. (2), стр. 524—525]. Это дает возможность установить следующую теорему.

ТЕОРЕМА V. *Если $[N]$ есть жесткая база R^α-операции и $\mathcal{E} = \{E_{n_1\ldots n_k}\}$ — таблица R_α-множеств (или $R_{\alpha\beta}$-множеств) такая, что каждая точка множества $R_{[N]}(\{E_{n_1\ldots n_k}\})$ есть точка $R_{[N]}$-однозначности таблицы $\mathcal{E}$, то существует таблица $\mathcal{E}' = \{H_{n_1\ldots n_k}\}$ BR_α-множеств (или $BR_{\alpha\beta}$-множеств) такая, что $H_{n_1\ldots n_k} \supset E_{n_1\ldots n_k}$, и каждая точка множества $R_{[N]}(\{H_{n_1\ldots n_k}\})$ есть точка $[N]$-однозначности таблицы $\mathcal{E}'$.*

Доказательство. Составим операцию $R_{[N]^*}$ и применим к таблице множеств $\mathcal{E}$ и этой операции первую теорему о кратной отделимости, так как

$$R_{[N]^*}(\{E_{n_1\ldots n_k}\}) = 0.$$

Существует таблица $\mathcal{E}' = \{H_{n_1\ldots n_k}\}$ BR_α-множеств (или $BR_{\alpha\beta}$-множеств) такая, что

$$H_{n_1\ldots n_k} \supset H_{n_1\ldots n_k} \text{ и } R_{[N]^*}(\{H_{n_1\ldots n_k}\}) = 0.$$

Но это означает, что каждая точка множества $R_{[N]}(\{H_{n_1\ldots n_k}\})$ является точкой $R_{[N]}$-однозначности для таблицы $\mathcal{E}$. Теорема доказана.

Изложим обобщение теоремы предыдущего параграфа.

Пусть N есть некоторая жесткая база δs-операции. Точку x мы назовем точкой $[N]$-p-значности последовательности множеств $\{\mathcal{E}_n\}$, если. существует p и только p различных цепей базы N, в ядра которых входит точка x. Все точки $[N]$-p-значности, где p — какое угодно натуральное число, мы будем называть точками N-конечнозначности. Имеет место

ТЕОРЕМА VI. *Если $[N]$ есть жесткая база $R^\varkappa$-операции и $\mathcal{E} = \{E_{n_1\ldots n_k}\}$ — таблица BR_α-множеств, то множество точек $[N]$-p-значности таблицы $\mathcal{E}$ есть CR_α-множество.*

Доказательство. Рассмотрим p различных цепей базы $[N]$. Мы всегда можем указать $p(p-1)$ кортежей, попарно не подчиненных друг другу, которые можно разбить на p групп по $(p-1)$ кортежу таким способом, что в каждой из указанных цепей содержится одна и только одна из этих групп.

Рассмотрим какую-нибудь систему из $p(p-1)$ кортежей, из которых ни один не подчинен другому и которые разбиты на p групп по $(p-1)$ кортежу. Для данной системы мы рассмотрим p множеств, входящих в базу $[N]$ и обладающих тем свойством, что каждое из них содержит все цепи этой базы, содержащие кортежи одной из указанных групп. Пусть эти множества будут

$$[N]^1, \ [N]^2, \ldots, \ [N]^p.$$

Обозначим через H^i множество точек $[N]^i$-однозначности таблицы $\mathscr{E}$. Оно является CR_α-множеством. Составим таблицу множеств $\mathscr{E}^i$, которая отличается от $\mathscr{E}$ только тем, что в каждой из зафиксированных нами групп кортежей, кроме i-й, выбрано по одному кортежу, и множество, отвечающее выбранному кортежу, заменено пустым множеством. Всех таких таблиц — конечное число. Для каждой из них рассмотрим множество точек $[N]^i$-однозначности и возьмем их пересечение — пусть это будет L_i; оно является тоже CR_α-множеством. Наконец, для тех же таблиц $\mathscr{E}^i$ составим множества точек $[N]$-однозначности и рассмотрим их пересечение — пусть это будет L_i^*; оно также является CR_α-множеством. Пусть k есть множество точек, входящих в ядра $[N]$-цепей, содержащих все кортежи нашей системы. Это — R_α-множество.

Рассмотрим множество

$$L = \prod_i L_i L_i^* - k.$$

Оно является CR_α-множеством и состоит из всех тех точек, каждая из которых входит в ядра p и только p различных $R_{[N]}$-цепей, соответственно принадлежащих множествам $[N]^1 \ldots [N]^p$. Ясно, что множество L зависит от выбранной нами системы из $p(p-1)$ кортежей и от ее разбиения на p групп и что оно состоит из точек $[N]$-p-значности таблицы $\mathscr{E}$. Если мы составим сумму всех множеств L, получаемых описанным путем, то мы получим множество всех точек $[N]$-p-значности таблицы $\mathscr{E}$. Этим доказано, что это множество является всегда CR_α-множеством.

Следствие. *Если в условиях предыдущей теоремы каждая из точек множества $R_{[N]}(\{E_{n_1 \ldots n_k}\}) = U$ является точкой $[N]$-конечнозначности, то множество U входит в класс BR_α. В этом случае каждое из множеств $[N]$-p-значности тоже входит в класс BR_α-множеств.*

Поступило
26. IV. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпунов А. А., R-множества, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XL, 1953.

[2] Ляпунов А. А., Отделимость и неотделимость R-множеств, Матем. сб., 32 (74) (1953), 515—532.

[3] Ляпунов А. А., О классификации R-множеств, Матем. сб., 32 (74) (1953), 255—262.

[4] Ляпунов А. А., Об R-множествах, Доклады Ак. наук СССР, LVIII, № 9 (1947), 1887—1890.

[5] Гливенко В. И., О неявных функциях, Матем. сб., 36 (1929), 138—142.

[6] Новиков П. С., Sur les fonctions implicites mesurable B, Fund. math., 17 (1931), 8—25.

[7] Новиков П. С., О проекциях некоторых B-множеств, Доклады Ак. наук СССР, XXIII (1939), 863—864.

[8] Козлова З. И., О некоторых классах A- и B-множеств, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 4 (1940), 479—500.

[9] Ляпунов А. А., Об отделимости аналитических множеств, Доклады Ак. наук СССР, II (1934), 276—280.

[10] Очан Ю. С., О переместимости δs-операций, Матем. сб., 10 (52) (1942), 151—164.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 17

ОТКРЫТА ПОДПИСКА
НА ЖУРНАЛЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР
на 1954 год

Название журналов	Количество номеров в год	Подписная цена в руб.
Астрономический журнал	6	54
Биохимия	6	72
Ботанический журнал	6	90
Вестник Академии наук СССР	12	96
Вестник древней истории	4	96
Вопросы языкознания	6	72
Доклады Академии наук СССР (без переплета)	36	360
Доклады Академии наук СССР (с 6 папками, коленкоровыми с тиснением)	36	384
Журнал аналитической химии	6	36
Журнал высшей нервной деятельности имени И. П. Павлова	6	90
Журнал общей биологии	6	45
Журнал общей химии	12	180
Журнал прикладной химии	12	126
Журнал физической химии	12	216
Записки Всесоюзного минералогического общества	4	30
Зоологический журнал	6	135
Известия Академии наук, Отделение литературы и языка	6	54
Известия АН СССР, Отделение химических наук	6	96
Известия АН СССР, Отделение технических наук	12	180
Известия АН СССР, серия биологическая	6	72
Известия АН СССР, серия географическая	6	54
Известия АН СССР, серия геологическая	6	90
Известия АН СССР, серия геофизическая	6	54
Известия АН СССР, серия математическая	6	54
Известия АН СССР, серия физическая	6	72
Известия Всесоюзного географического общества	6	54
Коллоидный журнал	6	45
Математический сборник	6	108
Микробиология	6	72
Почвоведение	12	108
Прикладная математика и механика	6	72
Природа	12	84
Советское государство и право	8	120
Советская этнография	4	72
Успехи современной биологии	6	48
Успехи химии	8	64
Физиологический журнал им. И. М. Сеченова	6	72
РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ		
Астрономия	12	91.20
Математика	12	91.20
Механика	12	91.20
Физика	12	240
Химия	24	360

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ

ГОРОДСКИМИ И РАЙОННЫМИ ОТДЕЛАМИ «СОЮЗПЕЧАТИ»,
ОТДЕЛЕНИЯМИ И АГЕНТСТВАМИ СВЯЗИ, МАГАЗИНАМИ «АКАДЕМКНИГА».
А ТАКЖЕ КОНТОРОЙ «АКАДЕМКНИГА» ПО АДРЕСУ:
МОСКВА, ПУШКИНСКАЯ УЛ., ДОМ 23.